REPÚBLICA DE NICARAGUA

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional

El Pueblo, Presidente!

MINED

Un Ministerio en la Comunidad

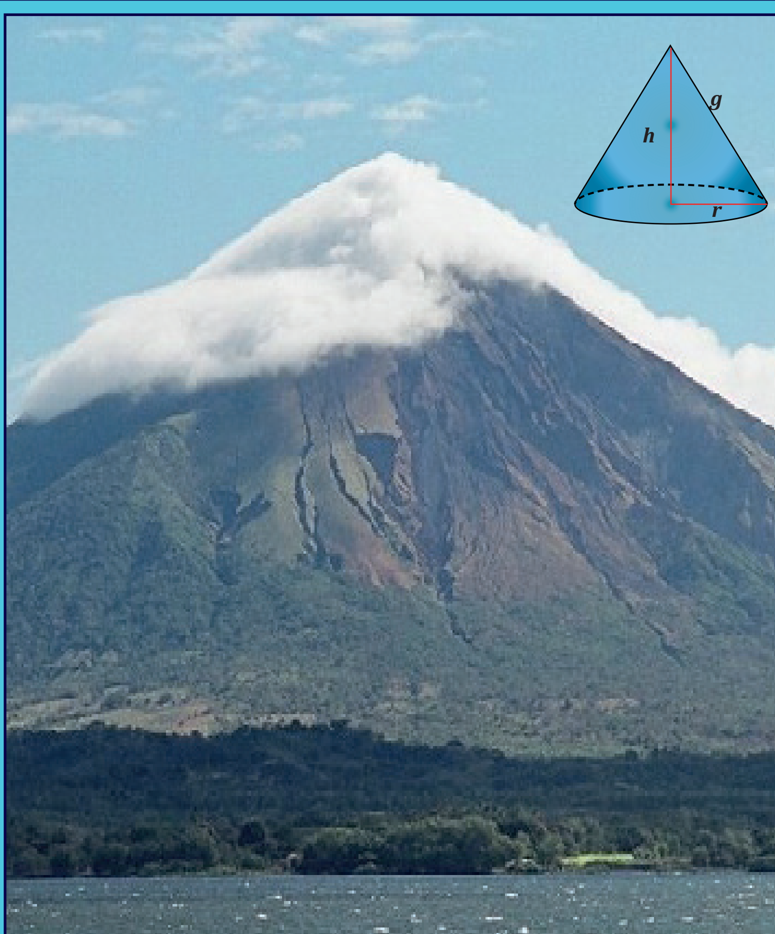
UNIÓN EUROPEA

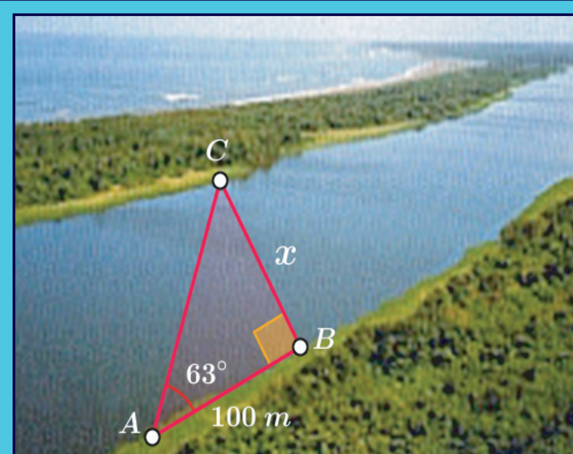
Programa de Apoyo al Sector de Educación en Nicaragua

PROSEN

Matemática 10 GRADO

Educación Secundaria





SERIE EDUCATIVA:
"EDUCACIÓN GRATUITA Y DE CALIDAD, DERECHO HUMANO FUNDAMENTAL DE LAS Y LOS NICARAGÜENSES"

Coordinación General, Revisión y Asesoría Técnica
Profesora María Elsa Guillén
Profesora Rosalía Ríos Rivas

Autora
Profesora Gloria Parrilla Rivera

Revisión Técnica General
Profesora Rosalía Ríos Rivas

Revisión y Asesoría Técnica Científica
Profesor Francisco Emilio Díaz Vega
Profesor Humberto Antonio Jarquín López
Profesor Armando José Huete Fuentes
Sociedad Matemática de Nicaragua

Diseño y Diagramación
Róger Hernández Bustamante
Javier González Manzanarez

Ilustración
Róger Alberto Romero
Javier González Manzanarez

Fuente de Financiamiento
PASEN I - Recursos del Tesoro - PROSEN

Agradecemos los valiosos aportes de la Sociedad Matemática de Nicaragua y de los docentes durante el proceso de validación.

Primera Edición___________

Presentación

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través del Ministerio de Educación (MINED) entrega a docentes y a estudiantes de Educación Secundaria el libro Matemática Décimo Grado como una herramienta para la adquisición efectiva de las habilidades de cálculo, ubicación espacial y razonamiento que se pretende desarrollar con el estudio de la disciplina.

En general, en un libro de texto de Matemática, a través de sus contenidos y actividades sugeridas se plantea un proceso activo de formación de valores individuales, comunitarios y sociales, que luego se evidenciarán en el comportamiento de las y los estudiantes frente a los desafíos de la vida moderna.

En este sentido proponemos a usted jugar un papel más activo en el proceso de aprendizaje, invitándole a gozar de las ventajas formativas de la interacción individual y colectiva a través de la pluralidad de conceptos presentados, y articular la teoría aprendida con las diferentes aristas de la realidad circundante con las que se tiene que enfrentar en el quehacer cotidiano. Si usted se decide a asumir los retos planteados a lo largo de todas estas páginas, este material puede tener la fortuna de convertirse en algo muy valioso en sus manos.

El libro que tiene hoy en sus manos es una propiedad social. Cuidarlo con esmero, sin rayarlo ni destruirlo, permitirá que posteriormente otros compañeros que están en los grados que le anteceden también puedan hacer uso de él. En esto consistirá su contribución desinteresada y solidaria con los próximos estudiantes que lo utilizarán contribuyendo así a la formación de posteriores generaciones de estudiantes de secundaria.

Ministerio de Educación

Introducción

La capacidad de plantear interrogantes ante cualquier suceso de origen ignoto fue un gran paso dado por la humanidad, porque estaba adquiriendo la primera herramienta cognoscitiva que lo conduciría posteriormente al establecimiento pleno del método científco. Si se observa la historia, la matemática comenzó del mismo modo, y la concreción de este procedimiento ya se dio, desde tiempos milenarios, en la civilización helénica con el método socrático de interrogar, establecer hipótesis, seguir interrogando, hasta obtener la verdad a través de un proceso intenso de tamizado para que quede al final la verdad pura y nítida.

El presente texto trata de apropiarse de este método socrático de desenterrar la verdad porque en matemática, más que aprender fórmulas, lo más importante es apropiarse de las formas básicas de razonamiento, que incluyen también la faceta de la imaginación, elementos esenciales para encontrar las aplicaciones de la matemática en la vida práctica, porque la modelación matemática es precisamente una metáfora procedente de la imaginación, que usa reglas lógicas y se dirige a resolver un problema de la vida cotidiana. Cuando Darío escribe en su Sinfonía en Gris Mayor

El mar como un vasto cristal azogado
refleja la lámina de un cielo de zinc;
lejanas bandadas de pájaros manchan
el fondobruñido de pálido gris

estamos en presencia de una expresión poética que a la par es un fenómenno físico-matemático susceptible de modelar.

El presente texto comprende 6 unidades: Probabilidad, Trigonometría, Identidades y ecuaciones trigonométricas, Grafiquemos funciones, Sistemas de ecuaciones lineales con tres variables y Sólidos.

En la unidad de Probabilidad introducimos al lector a una forma de pensamiento que tiene que ver con el azar y su relación con las actividades humanas que llevan consigo el elemento de la incertidumbre, técnicas de conteo, combinaciones, hasta culminar con el concepto clásico de probabilidades y algunas de su características.

La segunda y tercera unidades comprenden los elementos esenciales de Trigonometría: concepto dinámico de ángulos, funciones trigonométricas de ángulos agudos, gráficas de funciones trigonométricas hasta concluir con la colección de funciones trigonométricas inversas. Las identidades son presentadas como un método fácil de convertir una fórmula a otra más sencilla y dan término con la ley de los senos y cosenos.

La cuarta unidad tiene un cariz algebraico: trata de la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables, y la teoría de matrices como un instrumento elegante para resolverlas.

La quinta unidad se refiere a algunos tipos de funciones que ocupan un lugar preeminente en el dominio de las aplicaciones: función valor absoluto, función definida a trozos y entero mayor.

La sexta unidad comprende el cálculo de área y volumen de poliedros regulares e irregulares. De alguna manera resulta ser la segunda oportunidad de ponerse en contacto con cuerpos que se encuentran en la realidad circundante.

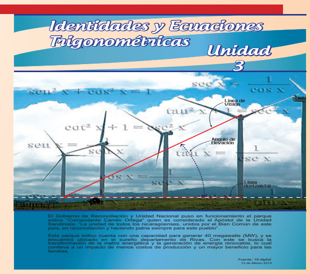
Todas las unidades están estructuradas a través de íconos representativos de situaciones reales que llevan un significado ligado a una etapa específica del aprendizaje. El ícono recuerde, reflexione y concluya, representado por la actitud reflexiva del poeta soberano Rubén Darío, constituye la etapa inicial del aprendizaje, en la que se asegura la puesta en escena de los conocimientos previos. En el ícono Compruebe lo aprendido, simbolizado por una estudiante en la pizarra, se manifiesta la manipulación de ejercicios réplicas derivados inmediatamente de los ejemplos presentados. La actividad en grupo, sintetizado por estudiantes en un aula de nuestro país, revela la dinámica integral del trabajo colectivo. Finalmente, el ícono de Aplique lo aprendido, un muchacho en plena tensión, representa la etapa más alta de concentración, independencia y despliegue intelectual personal, que naturalmente exige un poco más de dedicación.

Joven lector: tienes en tus manos un texto sencillo que te permitirá seguir descubiendo las cosas bellas y útiles del pensamiento matemático que son honra de la estirpe humana.

Índice

Unidad 1 Probabilidad 1

Unidad 2 Trigonometría 53



Identidades y Ecuaciones Trigonométricas
Unidad 3

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables
Unidad 4


Grafiquemos
Funciones
Unidad
5


Sólidos
Unidad
6

Probabilidad

Unidad 1

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional a través de la Lotería Nacional entregó al Ministerio de la Familia (MIFAN) y al Instituto Nicaragüense de Deportes (IND), utilidades por 28 millones 514 mil 658 córdobas con 80 centavos, lo que representa 35,64 % de la meta establecida para este año 2 014, que es de 80 millones de córdobas, expresó el compañero Ernesto Vallecillo, Gerente General de la Lotería Nacional.

Fuente: 19 digital y portal de la Lotería Nacional.
03 de Mayo 2 014.

Unidad 1

Probabilidad

Introducción

Esta unidad inicia el esfuerzo de acercarlo a usted a una disciplina que ayuda a entender mejor una gran cantidad de fenómenos sociales, económicos y naturales, que guardan una relación muy cercana con muchas creencias, equivocadas o no, heredadas de nuestros padres, o que nosotros mismos nos hemos formado a partir de la propia experiencia personal.

El estudio de la probabilidad es muy agradable porque nace precisamente de una necesidad que cargamos desde los primeros años de la infancia: el deseo inmenso de jugar; pero además, tendremos la oportunidad de ver, en las páginas que siguen, que estas mismas ideas, que nos distrajeron por tanto tiempo, también se aplican con mucha eficiencia en situaciones prácticas.

Desde el inicio le proponemos discutir sobre lo que significa para usted el azar, un concepto tan atrayente e inquietante como el del infinito, para concluir con el estudio de las permutaciones, combinaciones y las primeras nociones de probabilidad.

> "El puro azar siempre deja lugar a una cantidad suficiente de aciertos que permiten justificar casi cualquier cosa a alguien dispuesto a creer."
>
> El hombre anumérico, John Allen Paulos

Azar y Juegos de Azar

El juego es una actividad que todo ser humano ha practicado alguna vez en su vida. Nos produce placer y tanto padres de familia como maestros lo utilizan como recurso educativo. Cuando jugamos nos divertimos y nos relacionamos con los demás, pero sobre todo nos sometemos a ciertas reglas con las que siempre tenemos la posibilidad de ganar o perder. Este carácter incierto es el que nos cautiva.

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué es más fácil predecir: El equipo que ganará un partido de fútbol o la persona que saldrá victoriosa en un juego de dados?

2. ¿Ha jugado alguna vez a la tómbola?

3. ¿Ha utilizado el recurso de lanzar una moneda al aire para decidir qué hacer en una determinada situación?

4. ¿Es posible predecir en qué número se detendrá la aguja de una ruleta?

5. Cuando comparte su tiempo libre jugando a las cartas con sus amigos, ¿sabe de antemano quién será el triunfador?

6. ¿Se puede conocer con anticipación las últimas tres cifras del premio mayor de la lotería?

7. ¿Ha visto ganar dinero a una persona, con frecuencia, ante una máquina "tragamonedas"?

Gerolamo Cardano (1 501-1 576)

Médico y matemático italiano, su libro sobre juegos de azar, ***Liber de ludo aleae***, constituye el primer tratado serio sobre probabilidades.

Discuta estas preguntas con sus compañeros y encuentre una característica común a todas las repuestas que obtuvo.

Seguramente notó que en los juegos mencionados las posibilidades de ganar o perder no dependen solamente de la habilidad del jugador, sino de una combinación de circunstancias que el hombre no puede controlar ni prever; en este caso decimos que el resultado ocurre por casualidad o por azar, de ahí el nombre **juegos de azar.**

¿Sabías qué?

El término "azar" se deriva del árabe "azzahr".

El azar es una cuestión que ha ocupado a todos los seres humanos a través de la historia. Podríamos afirmar que el mundo está dividido entre aquellos que piensan que el azar existe y los que lo niegan y afirman que todo lo que se le atribuye al azar no es más que nuestra incapacidad para prever y controlar todas las variables que intervienen en un acontecimiento.

El **azar** es la característica de algunos fenómenos cuyos resultados no son previsibles.

Compruebe lo aprendido

Dé un ejemplo de:

1. Una situación de la vida cotidiana en cuya ocurrencia parezca estar presente el azar, pero que al final no sea así.

2. Una situación de la vida cotidiana cuya ocurrencia dependa del azar.

3. Un fenómeno de la naturaleza cuya ocurrencia dependa del azar.

4. Un fenómeno social cuya ocurrencia no dependa del azar.

Actividad en grupo

Cuatro estudiantes tienen tableros como los de abajo, y dos dados. Cada estudiante lanza los dados, en el caso que la suma de los números que aparezcan en la cara superior de los dados no coincida con un número de su tablero le permite lanzar al otro estudiante, pero si la suma de los resultados de los dados es igual a un número que aparece en su tablero, coloca una ficha en la casilla que corresponde al número y continúa el otro jugador. Gana aquél que complete primero una fila o una columna.

> "En los juegos de azar la suerte es no jugar."
>
> **Anónimo**

A

7	10	3
5		12
4	2	6

B

4	1	2
3		5
6	9	8

C

7	5	4
8		6
2	3	10

D

11	4	1
6		3
12	5	2

1. ¿Tienen los cuatro jugadores la misma probabilidad de ganar?

2. ¿Cuál de los jugadores puede tener más éxito? ¿Por qué?

3. Elaboren cuatro tableros con la condición de que un jugador tenga menos posibilidades de ganar.

4. ¿Pueden elaborar un tablero con el cual un jugador nunca gane?

5. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar: Un jugador con un tablero que tiene todos los números distintos o un jugador con un tablero que tiene tres números repetidos?

6. ¿Qué números deben aparecer en un tablero para que un jugador siempre gane?

Experimentos aleatorios y deterministas

Habiéndonos familiarizado con el término azar e intuitivamente con la palabra probabilidad, pasemos a precisar algunos conceptos.

Un **experimento** es un proceso, planificado o no, a través del cual se obtiene una observación (o una medición) de un fenómeno.

Recuerde, reflexione y concluya

1. Si lanza un dado correcto ¿sabe con certeza qué cara saldrá?

2. Si lanza una moneda al aire ¿puede asegurar que saldrá escudo?

3. Se ha preguntado alguna vez si es posible saber de antemano:

- ¿Si usted enfermará la próxima semana?
- ¿El número de lotería que saldrá premiado en un determinado sorteo?
- ¿Si caerá una piedra que se lanza hacia arriba?
- ¿Si mañana saldrá el sol?

¿Sabías qué?

En las antiguas civilizaciones los dados eran hechos de madera, piedras, huesos, etc.

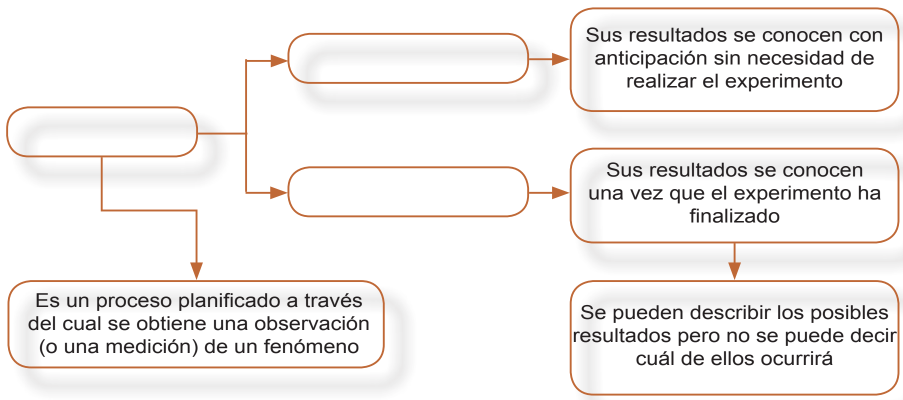
En algunas de las situaciones planteadas anteriormente se puede predecir el resultado con certeza, en este caso decimos que el **experimento** es **determinista**, en cambio si ignoramos el resultado es porque éste depende del azar y lo denominamos **experimento aleatorio**.

Un **experimento** es **aleatorio** si se conocen todos los resultados posibles pero no se puede predecir qué resultado particular se va a obtener.

Compruebe lo aprendido

1. Escriba en su cuaderno un cuadro sinóptico de la clasificación de los experimentos que refleje las características de cada uno de ellos.

2. Complete los cuadros vacíos del siguiente esquema con los conceptos que correspondan.



!Importante!

Un **experimento aleatorio** se llama **compuesto** cuando ocurren dos o más experimentos aleatorios simples al mismo tiempo, o bien uno después de otro.

Podemos afirmar que cualquier fenómeno es determinista o aleatorio, aunque debemos aceptar que los fenómenos o experimentos deterministas son raros porque cualquier situación a la que nos enfrentamos cotidianamente tiene algún grado de inseguridad o incertidumbre de que ocurra.

Por ejemplo, dos personas podrían medir la misma distancia con cintas métricas y habrá diferencia en algún decimal. Incluso se piensa que los procesos cognitivos tienen una índole aleatoria.

Los **experimentos aleatorios** se clasifican en **simples** y **compuestos**. Por ejemplo cuando lanzamos un dado y registramos el número que aparece en la cara superior, estamos realizando un experimento simple, en cambio si se lanza un dado y una moneda al aire y se anota el resultado es un experimento compuesto, conformado por dos experimentos simples: el lanzamiento de la moneda y el lanzamiento del dado.

Ejemplo 1

Lanzar un dado y observar el número que aparece en su cara superior es un experimento simple.

Ejemplo 2

Lanzar dos dados de manera simultánea y observar los resultados que aparecen en sus caras superiores es un experimento aleatorio compuesto.

Ejemplo 3

Sacar una bola de una urna que contiene dos blancas, dos rojas, y tres negras y registrar el color, es un experimento aleatorio simple.

Actividad en grupo

Clasifiquen los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas.

¡Importante!

El agua es una sustancia cuya molécula está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Es esencial para la supervivencia de todos los seres vivos. !Cuidemos este recurso no renovable!

1. Lanzar un dado y registrar el resultado de la cara superior.
2. Llover y medir la cantidad de agua por mm^3.
3. Jugar a la lotería y esperar el resultado.
4. Escoger al presidente de un comité habiendo solamente un candidato.
5. Registrar durante un año el sexo de los niños nacidos en el hospital Bertha Calderón de Managua.
6. Contar el número de accidentes automovilísticos que ocurrirán en un año en la carretera Chinandega-Managua.
7. Anotar la sucesión de días en la semana.
8. Mezclar dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno.

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Realice los siguientes experimentos y anote en su cuaderno todas sus observaciones:

   - Encender una vela.
   - Sacar una carta de una baraja un gran número de veces y anotar el resultado.
   - Lanzar un objeto 20 veces y registrar su velocidad al caer al suelo.

- Observar por 15 minutos el cambio de color de un semáforo.
- Lanzar una moneda al aire 30 veces y registrar el resultado.
- Lanzar un dado 20 veces y anotar si el número que aparece en la cara superior es par o impar.

2. Conteste las siguientes preguntas utilizando las observaciones obtenidas en el ejercicio anterior:

- ¿Cuáles de los experimentos se pueden repetir de forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones?
- ¿En cuáles de ellos no se puede predecir un resultado particular, pero sí el conjunto de todos los resultados posibles?
- ¿Observa algún patrón o regularidad (que se repite) en algunos de los experimentos realizados?
- ¿En cuáles de los experimentos que realizó los resultados individuales ocurren aparentemente de manera caprichosa? ¿En cuáles se puede predecir el resultado?
- ¿Cuáles experimentos ofrecen los mismos resultados cuando se realizan de una misma forma y en las mismas condiciones?

"Una vez eliminado lo imposible, lo que queda debe ser la verdad, por muy improbable que parezca".

Sir Arthur Conan Doyle (1 859 - 1 930)
.

Espacio muestral

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué entiende por conjunto?

2. ¿Cuándo un conjunto es unitario? Dé ejemplos.

3. Dé dos descripciones del conjunto vacío.

4. ¿Cuáles son las distintas maneras de expresar un conjunto?

5. Dé ejemplo de un conjunto expresado por comprensión y que tenga 5 elementos.

Recuerde

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas de nuestro alfabeto.

6. Exprese por extensión el conjunto

$$\{ x \mid x \text{ es un municipio de Managua} \}.$$

7. ¿Cuántos y cuáles son los resultados posibles al realizar los siguientes experimentos?

1. Tirar un dado y registrar el resultado que aparece en la cara superior.

2. Lanzar una moneda al aire y anotar el resultado.

3. Lanzar simultáneamente al aire una moneda y un dado y observar los resultados.

8. Exprese como un conjunto los resultados de los experimentos anteriores.

Observación

Una forma fácil de expresar los resultados posibles de un experimento aleatorio compuesto es por medio de una tabla.

Ejemplo 1

Al lanzar dos monedas al aire los resultados posibles expresados como pares ordenados son:

Recuerde

Un par de elementos $(x;\ y)$ en el cual importa el orden en el que están colocados se llama **par ordenado**.

	N	e
N	$(N; N)$	$(N; e)$
e	$(e; N)$	$(e; e)$

donde N y e representan el número y el escudo que aparecen en cada una de nuestras monedas.

Recuerde

Un **conjunto** es una colección de objetos que satisfacen ciertas propiedades.

Observe que para construir la tabla anterior se colocaron en fila y columna los posibles resultados que se obtienen al lanzar cada moneda. El total de resultados posibles para este experimento, expresado como un conjunto es:

$$E = \{(N; N),\ (N; e),\ (e; N),\ (e; e)\}.$$

Es claro que $E = \{N,\ e\} \times \{N,\ e\}$.

Recuerde

Producto cartesiano de dos conjuntos A y B que se denota $A \times B$ es el conjunto

$A \times B = \left\{ (a; b) \middle| \begin{matrix} a \in A \text{ y} \\ b \in B \end{matrix} \right\}$.

¿Sabías qué?

A la llegada de los españoles a Nicaragua la moneda utilizada era el cacao, fue hasta el 16 de Noviembre de $1\,878$ que se autorizó la emisión de nuestra primera moneda (metálica) como país independiente y se llamó el "centavo".

- Complete la tabla que corresponde a todos los resultados que se pueden obtener cuando se lanza un dado y una moneda al aire.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
N	$(N; 1)$				$(N; 5)$	
e		$(e; 2)$		$(e; 4)$		

En total, el experimento anterior tiene 12 resultados posibles, esta cantidad la podemos obtener multiplicando el número de resultados posibles al lanzar la moneda por el número de resultados que es probable obtener al lanzar el dado.

- Exprese en forma de conjunto los resultados que representó en la tabla.

Al conjunto que encontró para cada uno de los experimentos anteriores se le llama espacio muestral de ese experimento.

En general:

Se llama **espacio muestral** E asociado a un experimento aleatorio al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento.

Observación

Si un experimento aleatorio es compuesto, su espacio muestral coincide con el producto cartesiano de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen.

Ejemplo 2

Suponga que María tiene 5 blusas de distintos colores: Roja (R), Azul (A), Blanca (B), Verde (V), Púrpura (P); y 3 faldas: Azul (A), Roja (R) y Blanca (B).

Encuentre las combinaciones distintas de blusa y falda que puede elegir.

Solución

Haga una tabla que represente el espacio muestral del experimento:

Recuerde

El espacio muestral debe ser construido de manera que sea posible determinar claramente todas las posibilidades de ocurrencia de un experimento aleatorio.

	A	R	B	V	P
A	$(A;A)$	$(A;R)$	$(A;B)$	$(A;V)$	$(A;P)$
R	$(R;A)$	$(R;R)$	$(R;B)$	$(R;V)$	$(R;P)$
B	$(B;A)$	$(B;R)$	$(B;B)$	$(B;V)$	$(B;P)$

Expresado como un conjunto, el espacio muestral es:

$$E=\left\{\begin{matrix}(A;A),(A;R),(A;B),(A;V),(A;P),(R;A),(R;R),(R;B),\\ (R;V),(R;P),(B;A),(B;R),(B;B),(B;V),(B;P)\end{matrix}\right\}.$$

Observe que $E=\{A,R,B\}\times\{A,R,B,V,P\}$ donde $\{A,R,B\}$ es el espacio muestral del experimento "seleccionar una falda al azar y registrar el color" y $\{A,R,B,V,P\}$ es el espacio muestral del experimento "seleccionar una blusa al azar y registrar el color". Esto significa que el par $(A;A)$ representa la combinación falda azul y blusa azul.

¡Importante!

Un experimento aleatorio puede tener diferentes espacios muestrales, cada uno de ellos estará en dependencia de lo que se quiera observar.

- ¿Cuántos días puede María vestirse sin repetir combinación de blusa y falda?
- ¿Cuántos días puede vestirse de un solo color? ¿De dos colores distintos?

Compruebe lo aprendido

Al lanzar una moneda al aire hay 2 posibles resultados, si se lanzan dos monedas el espacio muestral de este experimento tiene 4 elementos, esto es 2^2 elementos. El experimento lanzar tres monedas tiene ocho resultados posibles, es decir 2^3 elementos.

¡Importante!

Una terna de elementos $(x;y;z)$ en la cual importa el orden en que están colocados se llama **terna ordenada**.

1. ¿Cuántos resultados posibles tiene el lanzamiento al aire de 4 monedas y de 6 monedas?
2. Lance tres monedas al aire. Encuentre el espacio muestral expresando el resultado como un conjunto de ternas ordenadas.

Actividad en grupo

Encuentren el espacio muestral para el experimento "lanzar 4 monedas al aire y anotar el resultado".

Evento

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿A qué se le llama unión de dos conjuntos?
2. ¿Es posible que la unión de dos conjuntos sea vacía? Explique su respuesta.
3. ¿A qué se le llama intersección de dos conjuntos? Dé ejemplo de dos conjuntos cuya intersección tenga 3 elementos.
4. ¿Cómo se define el complemento de un conjunto?
5. ¿Cuál es el complemento del conjunto vacío y del universo?
6. ¿A qué es igual la unión de un conjunto y su complemento? ¿Con que conjunto coincide la intersección de un conjunto y su complemento?

Recuerde

Un **conjunto unitario**, es un conjunto con un único elemento. Por ejemplo, el conjunto $\{2\,015\}$ es un conjunto unitario.

El espacio muestral del experimento lanzar un dado y observar el número en la cara superior es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Encuentre los subconjuntos de E con las siguientes condiciones:

1. Tiene como elementos a todos los números primos de E.
2. Sus elementos son todos los números pares de E.
3. A él pertenecen los números pares y primos de E.
4. Sus elementos son solución de la ecuación $3x - 2 = 4$.
5. Tiene como elementos los números cuadrados perfectos de E.

¡Importante!

Un conjunto A es **subconjunto** de B si todo elemento de A es un elemento de B.
Ejemplo
Si
$E = \{8, 5, 20, 1,5\}$, $A = \{1,5\}$ es un subconjunto de E. Observe que A es un conjunto unitario.

¡Importante!
En un diagrama de Venn el rectángulo representa la totalidad de elementos a considerar, el universo, y los círculos los subconjuntos del universo.

¡Importante!
Cuando se utiliza un diagrama de Venn para representar la relación evento-espacio muestral, el rectángulo representa al espacio muestral E y los círculos a los eventos.

6. Sus elementos son los números irracionales de E.

7. Tiene como elementos a todos los números mayores o iguales a 3 que pertenecen a E.

8. Es la intersección de E con los números múltiplos de 5.

9. Sus elementos son números racionales que pertenecen a E.

Discuta con sus compañeros los resultados obtenidos y observe cuál de los conjuntos encontrados es unitario, vacío o coincide con el espacio muestral.

A cada uno de los subconjuntos que encontró anteriormente se le llama evento o suceso.

Un **evento** es todo subconjunto del espacio muestral que resulta de un experimento aleatorio.

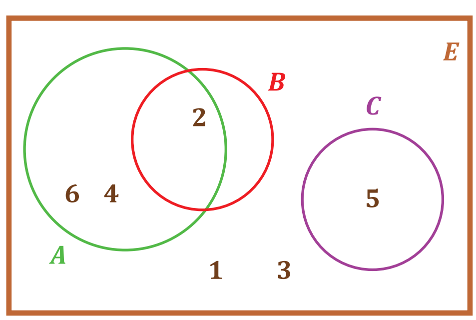
Un evento puede ser definido enumerando cada uno de sus elementos o bien mediante un enunciado lógico que cumplan todos sus elementos.

Los eventos asociados a un experimento serán representados con las letras mayúsculas de nuestro alfabeto A, B, C, etc.

Ejemplo 3

Haga un diagrama de Venn que represente el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del experimento "lanzar un dado y registrar el resultado que aparece en la cara superior" y los eventos asociados a este experimento $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2\}$ y $C = \{5\}$.

Solución



¿Qué relación existe entre los eventos A y B? ¿tienen elementos en común A y C? ¿son distintos B y C?¿por qué?

Ejemplo 4

Defina los eventos A, B y C del ejemplo 3 con un enunciado lógico que cumplan sus elementos. Recuerde que el experimento consiste en "lanzar un dado y anotar el número que aparece en la cara superior".

Solución

El evento A consiste en que:

la cara superior del dado caiga en un número par. Sabemos que los números que cumplen esta propiedad son el 2, 4 y 6.

El evento B está definido por la condición de que:

el resultado sea un número primo y par. Recuerde que el único par y primo es el 2.

¿Cuál es el enunciado lógico que caracteriza al evento C?

Compruebe lo aprendido

Utilizando los eventos del 1 al 9 de las páginas 12 y 13, represente en un diagrama de Venn las siguientes situaciones:

Recuerde

Dos **eventos** A y B son **compatibles** o no disjuntos si

$$A \cap B \neq \varnothing$$

Recuerde

Dos **eventos** A y B son **incompatibles** o disjuntos si

$$A \cap B = \varnothing$$

1. Dos eventos cuya intersección es vacía, esto es, son eventos disjuntos.
2. Dos eventos que tengan al menos 2 elementos en común.
3. Tres eventos que sean disjuntos dos a dos.
4. Dos eventos cuya unión esté formada por elementos mayores o iguales a 2.
5. Dos eventos cuya diferencia tenga 2 elementos.
6. Un evento que tenga como complemento al evento vacío.

Un **evento** es **seguro** si siempre ocurre, esto es, coincide con el espacio muestral y es **imposible** si nunca ocurre, es decir, es el conjunto vacío.

- Dé ejemplo de un evento seguro.
- Dé ejemplo de dos eventos imposibles.

¿Cuáles de los eventos del 1 al 9 de las páginas 12 y 13 son imposibles? ¿cuáles son seguros?

Aplique los conocimientos adquiridos

I. Complete la siguiente tabla que represente al espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio “lanzar dos dados y registrar el resultado”.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	$(1; 1)$					
2		$(2; 2)$				$(2; 6)$
3						
4			$(4; 3)$			
5				$(5; 4)$		
6					$(6; 5)$	

Recuerde

Un **número primo** es un número natural que tiene exactamente dos divisores distintos, el mismo número y el 1.

Ejemplo

31 es un número primo porque es un número natural y además tiene exactamente dos divisores, el 31 y el 1.

II. ¿Cuál es el total de elementos del espacio muestral del experimento?

III. Para el experimento “lanzar dos dados y registrar el resultado” encuentre los conjuntos que corresponden a los siguientes eventos:

1. Los dos resultados sean números primos.

2. La suma de los cuadrados de los dos resultados sea mayor que 30.

3. El cuadrado de la suma de los resultados sea menor que 5.

4. Uno de los resultados sea primo y el otro par.

5. Un resultado sea impar y el otro un número cuadrado perfecto.

6. Los dos resultados sean número impares.

7. Uno de los resultados sea un número cuadrado perfecto.

Recuerde

Un **número** es **par** si es múltiplo de 2.

Ejemplo

$2\,016$ es un número par porque es múltiplo de 2, esto es, $2\,016 = 2 \cdot 1\,008$.

8. Ambos resultados sean números racionales. ¿Con qué coincide este evento?

IV. Para el experimento "lanzar dos dados y registrar el resultado" dé ejemplo de:

1. Dos eventos disjuntos, esto es, mutuamente excluyentes.

2. Dos eventos no disjuntos.

3. Dos eventos cuya unión sea igual al espacio muestral y su intersección sea no vacía.

4. Tres eventos A, B y C, y compruebe:

   a) $A \cup B = B \cup A$

   b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   c) $A' \cup A = U$

   d) $B' \cap B = \varnothing$

   e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   f) $A \cup \varnothing = A$

   g) $(C')' = C$

   h) $A - B = A \cap B'$.

5. Un evento cuyo complementario tenga 36 elementos.

6. Dos eventos cuya diferencia sea igual al evento

$$C = \{(x; y) \mid x = y\}.$$

7. Dos eventos A y B cuya intersección sea el complemento del complemento de

$$C = \{(x; y) \mid x < y\}.$$

¡Importante!

Dos **eventos** A y B son **mutuamente excluyentes** si no tienen elementos en común, es decir, si su intersección, $A \cap B$, es vacía.

Ejemplo

Para el experimento "lanzar un dado y registrar el resultado" los eventos

A: El resultado es un número par y

B: El resultado es un número impar

son eventos mutuamente excluyentes.

Diagrama de árbol

El diagrama de árbol es una herramienta gráfica muy útil para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio, principalmente para el caso cuando éste es compuesto.

Recuerde, reflexione y concluya

I. ¿Qué es un experimento compuesto?

II. ¿Tienen el mismo espacio muestral los experimentos “lanzar dos dados y registrar el resultado” y “lanzar dos dados de manera consecutiva y registrar los resultados”?

III. Dé ejemplo de dos experimentos aleatorios compuestos, uno con un espacio muestral de 12 elementos y el otro con un espacio muestral de 21 elementos.

IV. Para cada uno de los experimentos anteriores dé ejemplo de 2 eventos expresados por extensión y por comprensión.

V. Norma (N) e Ivania (I) tienen niños en edad para el pre-escolar, y cerca de sus viviendas existen los preescolares *El Brujito* (P_1), *El Principito* (P_2), *Los Cumiches* (P_3) y *Los Pollitos* (P_4).

Si cada una de ellas y por separado decide seleccionar al azar un preescolar. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento “seleccionar un preescolar”?

Sean los eventos:

A : “Norma e Ivania escogen preescolares iguales” y
B : “Norma e Ivania escogen preescolares distintos”.

1. Exprese A y B por extensión.

2. Calcule el evento $A \cup B$. ¿Con quién coincide? ¿son complementarios A y B? ¿su intersección es un evento imposible?

3. Encuentre A' y B'. ¿Son complementarios? ¿Son disjuntos?

Pierre de Fermat
(1 601-1 665)

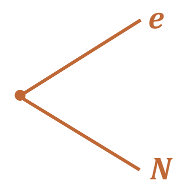
Jurista y matemático francés, co-fundador de la teoría de probabilidades junto con Pascal.

Si se lanza una moneda al aire dos veces, el espacio muestral para este experimento es:

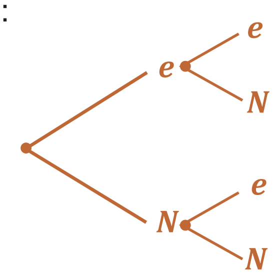
$$E = \{(e;e), (e;N), (N;e), (N;N)\}.$$

Construya un diagrama de árbol que ilustre los resultados posibles para el experimento anterior utilizando los pasos siguientes:

1. Parta de un nodo o punto inicial del que salga una rama por cada posible resultado del primer lanzamiento de la moneda y al final de cada rama especifique el símbolo del resultado correspondiente. Obtendrá la siguiente gráfica:



2. Utilice el extremo de cada rama como un nuevo nodo del que saldrán nuevas ramas en cantidad igual al número de resultados posibles en el segundo lanzamiento de la moneda. El diagrama final es:



Observe que en cada rama del grafo anterior está representado un resultado del experimento dado. Esto es a lo que se llama **diagrama de árbol.**

¡Importante!

Un **grafo** es un conjunto de objetos llamados **vértices** o **nodos** unidos por enlaces llamados **aristas** o **arcos** que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. De manera gráfica un grafo se representa por puntos (nodos) unidos por líneas (aristas).
Un **árbol** es un tipo especial de grafo.

VI. Construya el diagrama de árbol que corresponde al lanzamiento de una moneda tres veces.

Sugerencia

Aplique en el diagrama anterior el paso **2.**

En general, un diagrama que represente los resultados posibles de un experimento aleatorio compuesto por una serie finita de experimentos se construye así:

1. Fije un nodo inicial.

2. Trace a partir del nodo inicial tantas ramas como resultados sean posibles para el primer experimento, al final de cada rama especifique el símbolo del resultado correspondiente.

¡Importante!

- Al nodo inicial de un diagrama de árbol se le llama **raíz**.

3. Utilice como nodo el extremo de cada rama obtenida en el paso **2.** y dibuje a partir de este extremo un número de ramas igual al total de resultados posibles para el experimento que sigue en la serie y de nuevo especifique al final de cada rama el símbolo asignado a cada resultado.

4. Continúe la construcción del árbol repitiendo el paso **3.** para cada uno de los experimentos que restan de la serie.

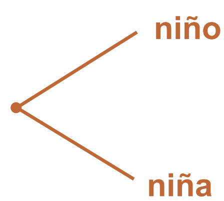
Ejemplo 1

En un aula de clase hay 16 niñas y 20 niños, y se escogen tres estudiantes al azar para formar un comité.

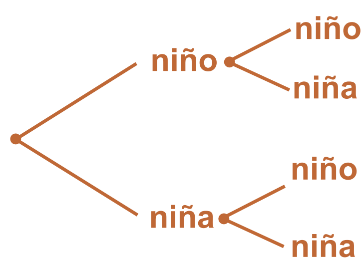
Solución

Utilice un diagrama de árbol para encontrar el espacio muestral de este experimento.

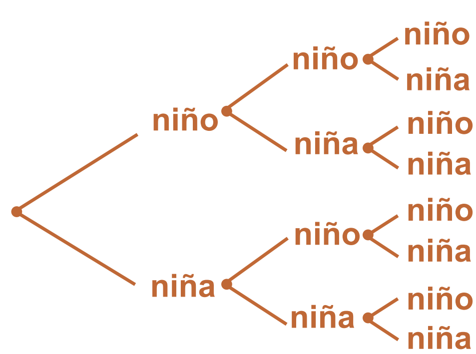
En la primera escogencia tiene dos resultados posibles, niño o niña. Aplicando el paso **1.** y **2.** coloque el nodo inicial y abra dos ramas, al final de éstas coloque los dos resultados.



Luego, escoja al azar el segundo estudiante y aplique el tercer paso, el diagrama de árbol luce así:



Finalice la construcción del diagrama considerando los posibles resultados para la escogencia del tercer estudiante (aplique el paso **4.**



¿Sabías qué?

Arlen Siú fue hija de Armando Siú (chino) y de Nubia Bermúdez (nicaragüense). Desde su niñez mostró pasión por ayudar a los desamparados, lo que la llevó a unirse a la causa sandinista. Fue asesinada por la Guardia Nacional a sus 20 años de edad.

Exprese como un conjunto el espacio muestral representado en el diagrama anterior.

- ¿Qué es más probable, que el comité lo formen 3 niños o que lo formen 3 niñas? Justifique su respuesta.
- ¿Cuántos comités formado por al menos una ñiña son probables?
- Si en el experimento anterior se cambia el grupo por otro que tenga 20 niñas y 25 niños, ¿cambia el diagrama de árbol?
- ¿Cuál es el diagrama de árbol si en el grupo de clases sólo hay una niña? En este caso, ¿cuál es un evento imposible? ¿cuántos eventos elementales tiene este experimento?

Ejemplo 2

Biblioteca Arlen Siú ubicada en San Marcos, Carazo.

Utilizando un diagrama de árbol encuentre el espacio muestral para el siguiente experimento:

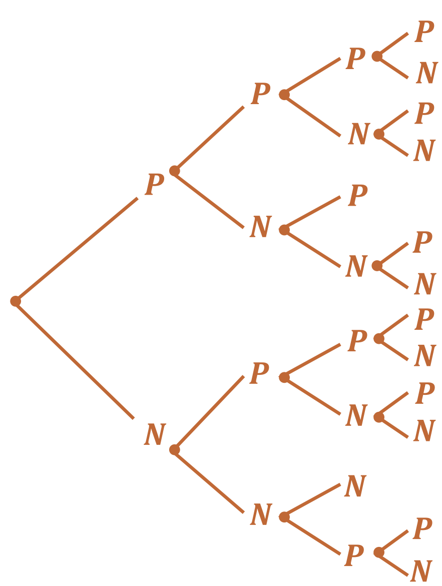
Ana Sofía visita la biblioteca "Arlen Siú" del municipio de San Marcos, Carazo en la cual se encuentra un estante con novelas y libros de poesía de escritores nicaragüenses, y decide escoger al azar algunos de estos libros, se detendrá cuando haya obtenido 3 novelas de manera consecutiva, 2 libros de poesía no consecutivos o 4 libros en total.

Sugerencia

Simbolice los libros de poesía por P y las novelas por N. Siga los pasos que se recomiendan y obtenga el diagrama de árbol siguiente:

Recuerde

Para construir un diagrama de árbol a veces se hace necesario simbolizar las opciones dadas en el problema.



El espacio muestral representado por el diagrama anterior es:

$$E=\left\{\begin{array}{l}(N;N;N),(N;P;N;P),(N;P;P;N),\ (N;P;P;P),\ (P;P;N;N),\\ (P;N;N;N),(P;N;N;P),(N;P;N;N),(N;N;P;P),(P;N;P),\\ (N;N;P;N),(P;P;P;P),(P;P;P;N),(P;P;N;P)\end{array}\right\}.$$

VII. ¿Cuál evento tiene más probabilidad de ocurrir? ¿que salgan 3 novelas consecutivas o 2 libros de poesía no consecutivos?

Sean los eventos:

$$A=\{(P;P;P;P),\ (P;P;P;N),(N;P;P;P)\}\ \text{ y}$$
$$B=\{(N;N;N),(N;P;N;P),(N;P;P;N)\}.$$

- Encuentre el evento $A\cup B$, descríbalo por comprensión y represéntelo mediante un diagrama de Venn.

- Encuentre dos eventos de E cuya intersección sea un evento imposible. Represente esta situación mediante un diagrama de Venn.

Compruebe lo aprendido

1. En un comedor de Masatepe se vende comidas populares siendo su plato principal el mondongo, pero además se ofrece indio viejo, tamugas y carne asada; todos los platillos, excepto el mondongo que se sirve con café, van acompañados con tiste o cacao. Encuentre todas las combinaciones posibles de platillo y bebida utilizando un diagrama de árbol.

2. Si en el ejercicio anterior el comedor ofrece la opción vaso pequeño, mediano o grande para cada bebida, ¿cuál es el diagrama de árbol?

3. Utilice un diagrama de árbol para encontrar el espacio muestral correspondiente al lanzamiento al aire de tres monedas.

4. Si va a determinar el espacio muestral del experimento lanzar tres dados y registrar los resultados, ¿qué utilizaría, una tabla o un diagrama de árbol? ¿por qué?

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Dé ejemplo de un experimento cuyo diagrama de árbol tenga el mismo esquema que el diagrama de árbol del espacio muestral del ejemplo 2, página 20.

   Exprese el espacio muestral, del ejemplo que dio, en forma de conjunto.

   Compare los dos espacios muestrales obtenidos a partir del los diagramas de árboles anteriores. ¿Tienen la misma cantidad de elementos? ¿Son iguales?

Recuerde

- Dos **conjuntos** son **iguales** si tienen los mismos elementos.

2. Suponga que en una bolsa hay 10 bolitas blancas y 10 azules. Un estudiante extrae una bolita al azar y registra el color, otros dos estudiantes repiten el experimento. Haga un diagrama de árbol para encontrar el espacio muestral que corresponde al experimento “registrar el color de las tres bolitas extraídas”.

3. ¿Hay algún evento simple del espacio muestral del experimento anterior cuyo elemento coincida con la secuencia de colores de nuestra bandera?

¡Importante!

- Un **evento** es **simple** si tiene un solo elemento.

4. ¿Cuál es el evento cuyos elementos tienen una sucesión de colores iguales ?¿es simple o compuesto?

5. ¿Qué condiciones usted debe variar en el experimento para que el diagrama de árbol sea diferente?

6. ¿Tiene relación esta variación con la cantidad de bolitas de cada color?

7. Cambie la cantidad de bolitas azules o blancas con el objetivo de obtener para el mismo experimento un diagrama de árbol que no contenga la combinación blanco-blanco-blanco, esto es, que

$$A = \{(\text{blanco; blanco; blanco})\}$$

   sea un evento imposible.

8. Si se cambian las bolitas azules y blancas por bolitas rojas y negras ¿cambia el esquema del diagrama de árbol anterior?

Actividad en grupo

1. Discuta con sus compañeros las ventajas y desventajas que tiene la utilización de los diagramas de árbol, en comparación con el uso de tablas al representar un espacio muestral de un experimento aleatorio. Recuerde que el intercambio de ideas debe hacerse de manera respetuosa.

2. Imaginen situaciones de la vida real donde se apliquen los diagramas de árbol.

Blaise Pascal,
(1 623 - 1 662)

Matemático francés co-fundador de la teoría de las probabilidades.

Técnicas de Conteo

Cuando se realiza un experimento aleatorio de antemano sólo conocemos los posibles resultados, es decir, sabemos el total de situaciones a las que nos podemos enfrentar.

En los ejemplos que hemos analizado hasta el momento ha sido fácil encontrar el espacio muestral de los experimentos aleatorios, pero existen otros experimentos con espacios muestrales y eventos con una gran cantidad de elementos que para calcular su cardinalidad se requiere de herramientas matemáticas llamadas técnicas de conteo.

Principio Fundamental del Conteo

Recuerde, reflexione y concluya

Realice las siguientes operaciones

1. **a)** $2\cdot 3+4^2$ **b)** $(5^2+2^3)3$ **c)** $(2+8-5)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)$.

2. ¿En qué casos el cociente de dos números enteros positivos es un entero positivo? Dé ejemplo de tres fracciones que representen números enteros positivos.

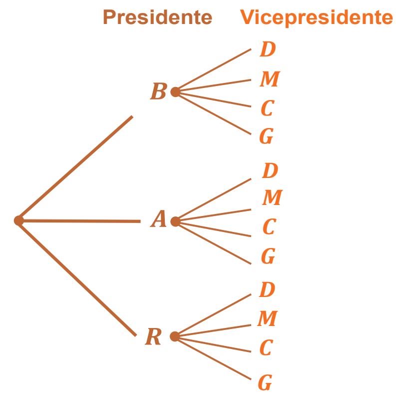
Ejemplo 1

Suponga que en el colegio San José de la ciudad de Bluefields se va a elegir la junta directiva de padres de familia conformada por un presidente y un vicepresidente. Se han presentado para el cargo de presidente Bridget (B), Anasha (A) y Ray (R) y para el cargo de vicepresidente Danna (D), Craig (C), Miriam (M) y Gerald (G).

¿De cuántas maneras se puede conformar la junta directiva?

Solución

Utilice un diagrama de árbol.



El total de maneras de conformar la junta directiva se obtiene siguiendo las diversas trayectorias a lo largo de las ramas del diagrama de árbol. La primera trayectoria nos da uno de los posibles resultados, la junta la pueden conformar Bridget como presidente y Danna como vicepresidente. Siga las distintas trayectorias y obtenga

$$E = \{BD. BM, BC, BG, AD, AM, AC, AG, RD, RM, RC, RG\}$$

cuyo cardinal es 12.

¡Importante!

- El **cardinal de un conjunto** finito es un número natural que representa la cantidad de elementos (distintos) que posee dicho conjunto.

- ¿Cuántas juntas estarían conformadas sólo por mujeres?
- ¿Cuántas juntas estarían conformadas por un varón y una mujer?
- ¿En cuántos de los resultados posibles el cargo de presidente lo ocupa una mujer?

Observe que si Bridget es elegida presidenta existe la posibilidad de formar 4 juntas porque hay 4 postulados para el cargo de vicepresidente, es posible formar la misma cantidad de juntas en el caso de que Anasha o Ray ocupen el cargo de presidente. En resumen, podemos decir que es posible formar 3 grupos de cuatro parejas cada uno, lo que en total nos daría la posibilidad de conformar 12 directivas, que son las representadas en el diagrama de árbol anterior.

Para calcular de manera rápida el total de juntas que se pueden formar se puede utilizar el siguiente esquema:

Presidente	Vicepresidente

Debajo de presidente y vicepresidente colocamos el total de opciones que tenemos para escoger estos dos cargos. El esquema entonces, se completa así:

Presidente		Vicepresidente	
3	x	4	$= 12.$

Se multiplica 3 por 4 y se obtiene el mismo número de resultados que arrojó el diagrama de árbol.

Suponga ahora que para completar la junta directiva se tiene que escoger a un secretario y que hay 5 candidatos para el cargo, utilice de nuevo el esquema pero agregue una casilla para el nuevo cargo, coloque debajo de esta nueva casilla el número 5 (hay 5 disponibles para el cargo de secretario), finalmente multiplique el número de maneras de escogencia para cada cargo.

Presidente		Vicepresidente		Secretario	
3	x	4	x	5	$= 60.$

Ahora se pueden formar 60 juntas directivas distintas.

En general, se cumple el llamado **principio del conteo**:

Si un evento A puede ocurrir de n_1 maneras, y luego otro evento B puede ocurrir de n_2 maneras, entonces la cantidad total de formas diferentes en que ambos eventos pueden ocurrir es el producto $n_1 \cdot n_2$.

Observación

El principio anterior se puede generalizar para el caso en que ocurren más de dos eventos, por lo tanto, para obtener el número total de formas diferentes en que todos los eventos pueden ocurrir solamente multiplicamos las distintas maneras en que puede ocurrir cada evento.

Ejemplo 2

¿Cuántos números impares de tres cifras existen?

Solución

Aplique el principio del conteo.

Para formar los números pedidos en la casilla de las centenas sólo podemos colocar dígitos distintos de cero. ¿Por qué? Por tanto tenemos 9 opciones; en la casilla de las decenas es posible colocar todos los 10 dígitos y por último las opciones que tenemos para la última casilla son 5, los dígitos impares, luego nuestro esquema queda así:

Centena		Decena		Unidad	
9	x	10	x	5	$= 450.$

Recuerde

Un **número** es **impar** si termina en cifra impar.

Hay 450 números impares de 3 cifras.

- ¿Existe otra forma de resolver este problema?
- ¿Existe la misma cantidad de números pares de tres cifras?
- ¿Cuál es el total de números de tres dígitos?

Compruebe lo aprendido

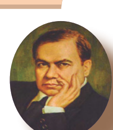
1. En una fábrica de zapatos de Masaya se elaboran 8 estilos de zapatos de mujer, en 5 colores diferentes y 6 numeraciones distintas ¿Qué cantidad debe comprar un comerciante para tener en su negocio de todos los estilos, colores y tamaños?

2. A un estudiante de Arquitectura se le ha pedido como trabajo final de curso diseñar 4 modelos de casas diferentes en 2 tamaños distintos. ¿Cuántos planos deberá entregar?

¡Importante!

En un arreglo importa el orden cuando al cambiar de ubicación los elementos que arreglamos los resultados los consideramos diferentes.

Permutaciones



Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Cuántos y cuáles números de 2 cifras puede formar con los dígitos 1 y 2? ¿Importa el orden en que coloque los números?

2. ¿Cuántos y cuáles números de tres cifras puede formar utilizando los dígitos 1, 2 y 3? ¿es importante el lugar que ocupa cada cifra en los arreglos encontrados?

Ejemplo 1

Encuentre todos los arreglos posibles de las letras de la palabra "paz".

Solución

Determine primero los arreglos que comienzan con p, luego con a, y por último con z, y obtenga:

paz, pza, apz, azp, zap, zpa.

¡Importante!

El factorial de un número entero positivo n se define como

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

Además

$1! = 1$

$0! = 1$

Ejemplo:

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

Observe que el orden que ocupa cada letra es importante porque genera diferentes arreglos. A este tipo de arreglo le llamamos permutación.

Una **permutación** es un arreglo sin repeticiones de todos o parte de los elementos de un conjunto para el cual importa el orden.

En el ejemplo anterior el total de arreglos o permutaciones encontradas es 6. ¿Coincide este resultado con la cantidad de números de tres cifras que encontró anteriormente? ¿factorial de qué número es el 6? ¿coincide el número encontrado con la cantidad de elementos que arregló?

El total de permutaciones de una cantidad determinada de objetos lo puede encontrar aplicando el principio del conteo.

Ejemplo 2

Encuentre el total de números de dos cifras utilizando el 1 y el 2.

Solución

Nuestro esquema es:

Decenas		Unidades	
2	x	1	$= 2$

porque para ocupar el lugar de las decenas se puede elegir al 1 o al 2, luego de escoger el que ocupará el lugar de las decenas sólo queda una opción para ocupar el lugar de las unidades.

Observe que

$$2 = 2 \cdot 1 = 2!$$

Ejemplo 3 Aplique de nuevo el principio del conteo para encontrar las permutaciones de los números 1, 2 y 3.

Solución

Centena		Decena		Unidad	
3	x	2	x	1	$= 6$

El total de números de tres cifras es:

$$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

Ejemplo 4 Encuentre todas las permutaciones posibles de las letras de la palabra "amor".

Solución Por el principio fundamental del conteo el resultado es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4!$$

Algunas de estas permutaciones son: roma, amor, mora, orma.

Si en general se tiene n objetos y se desea obtener el total de permutaciones de estos n objetos, el resultado es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

porque para la escogencia del primer objeto tenemos n disponibles, una vez seleccionado el primero, para la segunda escogencia sólo disponemos de $n-1$ objetos, en el siguiente paso de $n-2$ objetos, y así sucesivamente hasta la última escogencia en la que se dispone de solamente un objeto. Observe que este producto coincide con la definición de $n!$ de un número entero positivo n.

¡Importante!

Otra notación para representar la cantidad de permutaciones de n objetos tomando r a la vez es ${}_nP_r$ o bien $P(n;r)$

Podemos entonces afirmar que:

El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$ y se denota por ${}_nP_n$.

Suponga que en el ejemplo 4 en lugar de permutar las 4 letras sólo permutamos 2, el número de arreglos es:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Ejemplo de estas permutaciones son: ro, mo, ma, ar, or.

Multiplique y divida ahora por $2!$ la expresión $4 \cdot 3$ con el objetivo de expresarla en notación factorial

$$12 = 4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!}.$$

Es de notar que en la expresión $\frac{4!}{(4-2)!}$ el 4 corresponde al total de letras de la palabra amor y el 2 a la cantidad de letras que se permutan.

Ejemplo 5

Se organiza un maratón en el que participan 15 personas ¿De cuántas maneras se puede premiar el primero y segundo lugar?

Solución

Utilice el principio de conteo

1^{er} lugar		2^{do} lugar	
15	x	14	$= 210.$

> En la fórmula para el cálculo del número de permutaciones
>
> $1 \leq r \leq n$
>
> representa al conjunto
>
> $\{1, 2, 3, \cdots, n\},$
>
> y se llama intervalo natural.
>
> Ejemplo
>
> $1 \leq r \leq 7$ es el conjunto
>
> $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$

Obtiene 210 formas de asignar los premios. Siguiendo el procedimiento anterior expresemos el 210 utilizando notación factorial:

$$210 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = \frac{15!}{13!} = \frac{15!}{(15-2)!}.$$

Repita el análisis anterior y observe que el 15 corresponde al total de participantes y el 2 a la cantidad de personas que serán premiadas.

> El número de permutaciones de n objetos distintos tomando r a la vez es:
>
> $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 1 \leq r \leq n.$$

Ejemplo 6

Encuentre el total de permutaciones de las letras de la palabra "maestro" tomando 3 a la vez.

Solución

En este caso $n = 7$ y $r = 3,$ luego

$$P(7;3)=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!}=210.$$

1. Dé ejemplo de 5 de estas permutaciones.

2. ¿Cuántas permutaciones hay de las letras de la palabra "maestro" tomando 5 a la vez?

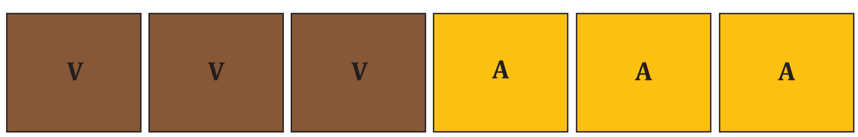
3. Dé ejemplo de 4 de las permutaciones anteriores que aparezcan en nuestro diccionario.

4. Calcule el número de permutaciones de las letras de la palabra "maestro" tomando 4 a la vez y dé ejemplo de 5 de ellas.

Permutaciones con repetición

En algunos problemas se debe encontrar el total de permutaciones de n objetos dados, algunos de los cuales son indistinguibles, por ejemplo:

Se tienen 6 cuadrados (de cartulina) del mismo tamaño, de los cuales 3 son cafés y 3 amarillos, un arreglo en fila de los 6 objetos es:



¡Importante!

En un arreglo existe repetición si al menos uno de los objetos que se arreglan se repite.

Si cambiamos de lugar sólo los cuadrados cafés las permutaciones que resultan no se distinguen de la anterior. Tomando en cuenta que los cuadrados de color café los podemos arreglar en $3!$ maneras hay 6 arreglos que no se pueden distinguir, lo mismo ocurre en el caso de los 3 objetos amarillos. De aquí tenemos que hay $3!\cdot 3!$ arreglos que no producen permutaciones distintas.

Para calcular el número de arreglos diferentes de los 6 cuadrados obtenemos el total de permutaciones, esto es, $6!$, luego se divide este resultado por $3!\cdot 3!$, es decir,

$$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}=\frac{120}{6}=20.$$

¡Importante!
Observe que en la definición de la derecha

$n_1+n_2+\ldots+n_k=n,$

y, k representa el número de objetos distintos.

En el caso general tenemos que:

El número de permutaciones diferentes de n objetos de los cuales un objeto aparece n_1 veces, otro objeto aparece n_2 veces y así sucesivamente es:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

Ejemplo 7

Dos hermanos han decidido repartirse una propiedad que heredaron de su padre, para ello sembrarán en la línea divisoria árboles frutales en las cantidades siguientes: 3 de mango, 4 de aguacate y 3 de guayaba. ¿De cuántas maneras pueden plantarse los árboles?

Solución

La cantidad de árboles a plantar es 10 de los cuales 3 son de un tipo, 4 de otro y 3 de otro tipo, el total de maneras en que pueden plantarse es:

$$\frac{10!}{3!\,4!\,3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\,4!\,3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 12\cdot 35=4\,200.$$

A veces queremos encontrar todas las permutaciones de n objetos permitiendo que éstos se repitan.

Ejemplo 8

Encuentre el total de números de dos cifras, utilizando el 1 y el 2, si se permite repetir los números.

Solución

En líneas anteriores encontramos que el total de números de dos cifras, sin repetición, que se forman con el 1 y el 2 son dos, el 12 y el 21. En este caso, como se permite que los números se repitan se pueden formar dos nuevos números, el 11 y el 22. Hay en total 4 números. Este resultado se puede obtener utilizando el siguiente esquema:

Decenas		Unidades	
2	x	2	$= 2^2 = 4.$

Se colocó el 2 en ambas casillas porque para ocupar el lugar de las decenas y de las unidades se puede elegir el 1 ó el 2.

En general, se cumple que

> El número de permutaciones que pueden formarse con n objetos, si se permite repetición es n^n.

En algunas situaciones estamos interesados en calcular el total de permutaciones de n elementos que se pueden repetir pero tomando r elementos a la vez.

Ejemplo 9

Encuentre el total de "palabras" que se pueden formar con las letras de la palabra "maestro", tomando 3 a la vez si se permite repetición.

Solución

Para la escogencia de la primera letra existen 7 posibilidades ya que son 7 las letras que forman la palabra maestro, lo mismo ocurre para la escogencia de la segunda y tercera letra, así el total de palabras que se puede formar es:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 73 = 343.$$

Algunos de estos arreglos son: mes, reo, mmm, tos, tor, sas, aes.

¡Importante!

En el ejemplo 9 entenderemos por "palabra" cualquier secuencia de letras que aparezcan o no en nuestro diccionario.

- ¿Cuáles de los arreglos anteriores aparecen en nuestro diccionario? Dé ejemplos de 3 permutaciones que no sean parte del diccionario de la real academia.

- ¿Cuántas permutaciones hay de las letras de la palabra "maestro" tomando 4 a la vez, si se permite repetir las letras?. Si en lugar de tomar 4 letras tomamos 6 ¿cuál es el total de permutaciones? Dé ejemplo de 5 de estas permutaciones.

Combinaciones

En el lenguaje común muchas veces utilizamos la palabra combinación en variadas situaciones asignándole un significado según el caso, pero que desde el lenguaje preciso de la matemática es necesario diferenciar, por ejemplo, combinar vegetales para obtener una ensalada, comprar una cerradura de combinación y combinar números y letras, son actividades comunes que permiten una interpretación matemática.

Desde el punto de vista de la matemática, cuando arreglamos letras y números importa el orden y a estos arreglos se les llama permutaciones; en cambio cuando se selecciona a tres personas de un conjunto de personas para formar un comité no importa el orden.

¡Importante!
A una colección cuyos elementos son conjuntos se le llama **familia de conjuntos** o **clase de conjuntos**.

Ejemplo:

El conjunto potencia de un conjunto dado es una familia de conjuntos

Recuerde

Potencia del conjunto A es la familia de todos los subconjuntos de A y se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Un conjunto de n elementos posee 2^n subconjuntos.

Ejemplo
El conjunto $A=\{\text{D, i, o, s}\}$, tiene 4 elementos, luego el potencia de A tiene $2^4=16$ elementos.

Recuerde, reflexione y concluya

Dado el conjunto $A=\{a, b, c\}$, determine $\mathcal{P}(A)$. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$? ¿son iguales los conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{c, b, a\}$, y $\{c, c, b, a\}$? ¿por qué?

El conjunto potencia de A puede obtenerse de la siguiente manera: tomando un elemento a la vez y formando todos los subconjuntos unitarios, luego tomando dos elementos a la vez obteniendo todos los subconjuntos con dos elementos, continuamos de esta manera hasta obtener el subconjunto con el mayor número de elementos que es el mismo A. A cada uno de estos subconjuntos le llamamos combinación.

Dado un conjunto $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{n}$ elementos, una **combinación de A, tomando r elementos** a la vez, es todo subconjunto de $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{r}$ elementos. El total de combinaciones de los $\boldsymbol{n}$ elementos de $\boldsymbol{A}$, tomando $\boldsymbol{r}$ a la vez se denota por ${}_{n}C_{r}$.

Para $A=\{a, b, c\}$,

$$\mathcal{P}(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\},\{a, b, c\},\varnothing\}.$$

Los subconjuntos de A de dos elementos son:

$$\{a, b\},\ \{a, c\}\ \text{y}\ \{b, c\}.$$

Observe que cada subconjunto de A con 2 elementos representa una combinación de los 3 elementos de A, tomando dos a la vez.

Encuentre para cada subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ el total de permutaciones de sus elementos, así:

Combinaciones	Permutaciones
$\{a, b\}$ $\longrightarrow$	$ab,\ ba$
$\{a, c\}$ $\longrightarrow$	$ac,\ ca$
$\{b, c\}$ $\longrightarrow$	$bc,\ cb.$

A partir de tres combinaciones se han obtenido 6 permutaciones, esto es:

$$C\,(3;2)=3=\frac{6}{2}=\frac{P\,(3;2)}{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}.$$

Ejemplo 10

Utilice el procedimiento anterior y encuentre $C(4;\,3)$ en notación factorial, donde $A=\{a,b,c,d\}$.

Solución

$C(4;3)=4$, porque hay 4 subconjuntos de A con tres elementos, estos son:

$$\{a,b,c\},\ \ \{a,b,d\},\ \ \{a,c,d\}\ \ \text{y}\ \ \{b,c,d\}.$$

Por cada combinación anterior tenemos 6 permutaciones, por ejemplo:

Combinación		Permutaciones
$\{a,\ b,\ c\}$	$\longrightarrow$	$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$

En total se obtienen 24 permutaciones que coincide con $P(4;\,3)$

$$C(4;3)=4=\frac{24}{6}=\frac{P(4;3)}{3!}=\frac{4!}{3!(4-3)!}.$$

¡Importante!

Para denotar el total de combinaciones de n elementos de un conjunto A, tomando r a la vez, además de $\boldsymbol{C(n;\,r)}$ también se utilizan

$${}_nC_r \ \ \text{y} \ \ \binom{n}{r}.$$

1. Obtenga para cada una de las tres combinaciones restantes las 6 permutaciones asociadas.

2. Determine $C(4;2)$, $\binom{4}{1}$ y ${}_4C_4$.¿A qué es igual $C(4;3)-{}_3C_3$

3. y $C(4;\,2)+\binom{4}{1}+{}_4C_4$?

4. ¿Con qué coincide $\mathcal{P}(A)-\{\varnothing\}$? ¿es $\mathcal{P}(A)-\{\varnothing\}$ una familia de conjuntos?

Generalizando tenemos

> El **número de combinaciones** de $\boldsymbol{n}$ objetos distintos, tomando $\boldsymbol{r}$ a la vez es
>
> $${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Ejemplo 11

¿Cuántas manos distintas de 5 cartas es posible dar si se toman de una baraja de 52 cartas?

Solución

Primero debe observar que el orden en la selección de las 5 cartas no es importante, entonces es válida la fórmula para combinaciones:

$$C\,(52;\,5)=\frac{52!}{5!\,(52-5)!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47!}{5!\ 47!}=2\ 598\ 960.$$

Compruebe lo aprendido

1. Utilice los dígitos del 1 al 9 y encuentre el total de números de tres cifras.

2. A continuación se presentan distintos experimentos aleatorios. Determine en cuáles de ellos es importante el orden y en cuáles no.

   a. Seleccionar un comité de 4 personas de un conjunto de 10 personas.

   b. Lanzar 5 veces al aire una moneda y registrar el resultado.

   c. Un profesor presenta a un estudiante un examen con 12 preguntas de las cuales debe escoger 7.

   d. Colocar en fila de manera aleatoria a 12 personas que abordarán un bus Managua-León.

3. Encuentre el número de elementos de los espacios muestrales de los experimentos anteriores.

4. De ejemplo de 3 elementos del espacio muestral del experimento “lanzar 5 veces al aire una moneda y registrar el resultado”.

Recuerde

Dos **números** enteros a y b son **coprimos**, si no tienen ningún factor primo en común, o, dicho de otra manera, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1. Equivalentemente a y b son coprimos si y sólo si, su máximo común divisor es igual a 1.

Combinaciones con repetición

En el caso en que arreglemos objetos y no interesa el orden, pero se permite repetición de estos objetos, el arreglo recibe el nombre de **combinación con repetición**.

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomando r a la vez si se permite la repetición de estos objetos es:

$$CR(n; r) = C(n+r-1; r).$$

Ejemplo 12

Se han seleccionado 10 personas para distribuir 4 premios. ¿De cuántas maneras puede realizarse esta asignación, si los premios son iguales y si una persona puede recibir más de un premio?

Solución

Primero observemos que se trata de un arreglo para el cual no importa el orden en que se distribuyan los premios porque todos son iguales, esto es, una combinación.

Además se permite que una persona pueda recibir más de un premio, por lo tanto es una combinación con repetición, luego

$$CR(10;\ 4) = C(10+4-1;\ 4) = \frac{13!}{4!(13-4)!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 9!} = 715.$$

Hay 715 maneras de asignar los premios.

1. Reformule el enunciado del ejemplo anterior para obtener arreglos que sean:

   a) Combinaciones sin repetición.

   b) Permutaciones sin repetición.

   c) Permutaciones con repetición.

2. Calcule las distintas maneras de asignar los premios para los casos **a)**, **b)** y **c)**.

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Redacte en su cuaderno la diferencia entre permutación y combinación.

2. Un grupo de estudiantes elabora un mural y en él quieren colocar, de manera horizontal, 3 fotografías diferentes. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?

3. Una señora tiene 10 vestidos y en su viaje de vacaciones quiere llevar consigo el 50% de ellos. ¿Cuántas opciones tiene?

4. 20 estudiantes se ofrecen para visitar un asilo de ancianos. Si sólo deben ir dos estudiantes, ¿cuántas parejas distintas se pueden formar?

5. Juan tiene 8 libros diferentes de matemática y elige 3.

   a) Encuentre el total de permutaciones posibles.

¿Sabías qué?

Número palíndromo es un número natural que se lee igual de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, Ej. 212.

b) Determine el total de combinaciones posibles.

c) ¿Qué hay más, permutaciones o combinaciones? Explique su respuesta.

Recuerde

Un número es **múltiplo de 5** cuando su última cifra es 0 ó 5. Ejemplo $2\,015$ es múltiplo de 5 porque su última cifra es 5.

6. En el departamento de Managua las placas de vehículos particulares comienzan con la letra M, seguida de 6 dígitos. ¿Cuántas placas son posibles? Dé ejemplo de una placa donde:

a) Su cadena de dígitos comience con un número primo mayor que 4 y termine en un número compuesto mayor que 6.

b) Su último y primer dígito sean coprimos.

c) Sus 6 dígitos formen un número palíndromo.

¿Sabías qué?

Número feliz es todo número natural que si sumamos los cuadrados de sus dígitos y seguimos el proceso con los resultados obtenidos, el último resultado es 1. Por ejemplo, 7 es un número feliz porque

$$7^2=49$$
$$4^2+9^2=97$$
$$9^2+7^2=130$$
$$1^2+3^2+0^2=10$$
$$1^2+0^2=1.$$

7. Encuentre el total de placas posibles en los siguientes casos:

a) En Granada las placas de buses de transporte colectivo comienzan con las letras GR seguidas de 3 dígitos.

b) En Carazo las placas de vehículos particulares empiezan con las letras CZ seguidas de 4 dígitos.

8. Para el inciso **a)** del ejercicio anterior, dé ejemplo de una placa cuya parte numérica sea un número feliz. ¿Es éste un número primo? ¿si sumamos sus dígitos, el resultado es un múltiplo de 5?

9. Calcule

a) $P(5;\,5)$

b) $P(5;\,5) - C(5;\,5)$

c) ¿Por qué el resultado en **b)** no es un número negativo?

d) $P(6;\,1)$

e) $C(6;\,1)$

f) $C(5;\,4) + P(3;\,2) + C(3;\,3) + P(4;\,1)$

g) $(C(5;\,4))^2 + (P(3;\,2))^2 + C(3;\,3) + P(4;\,1)$.

Actividad en grupo

I. Resuelve para un número natural x las siguientes ecuaciones. Recuerde que en $C(n; r)$ y $P(n; r)$ se cumple que $1 \leq r \leq n$.

1. $C(x; 2) = 10$
2. $C(x; 2) = 45$
3. $C(x; 2) - C(x; 3) = 0$
4. $C(x; 1) = 200$
5. $2C(x; 4) = P(x; 3)$
6. $P(x; x) = 6$
7. $2C(x; 4) = P(x; 3)$.

Probabilidad Clásica

Seguramente usted ha escuchado o utilizado la palabra probabilidad, pero ¿qué entiende por ella?

Recuerde, reflexione y concluya

1. En una urna hay 5 bolas verdes, 5 rojas y 2 negras. Se extrae una bola al azar.
   - **a)** ¿Qué es más probable, extraer una bola roja o una negra?
   - **b)** ¿Es más probable sacar una bola verde que sacar una bola roja? Explique su respuesta
2. Lance una moneda al aire ¿qué es más probable que aparezca en la cara superior, un número o un escudo?
3. ¿Qué toma en cuenta un árbitro cuando en determinado partido de fútbol lanza una moneda para decidir el lado en que cada equipo jugará?
4. Suponga que está por finalizar la primera vuelta de la liga de fútbol categoría sub-20 en la ciudad de Estelí y el equipo Filemón Rivera se encuentra como líder 5 puntos por encima del William Fonseca, que ocupa el segundo lugar, y el último partido, según calendario, es entre ellos.

¡Importante!

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada resultado posible de un experimento aleatorio con el objetivo de saber si un evento es más probable que otro.

a) ¿Cuáles resultados son posibles después de este encuentro?

b) ¿Puede el William Fonseca lograr acumular más puntos que el Filemón Rivera si por juego ganado se asignan 3 puntos?

c) ¿Qué probabilidad tiene el William Fonseca de ocupar el primer lugar?

d) ¿Es un evento imposible que este equipo ocupe el primer lugar?

e) ¿Es un evento seguro que el Filemón Rivera se mantenga como líder?

¿Sabías qué?
El hombre más alto de la historia ha sido Robert Pershing de Alton Illinois, Estados Unidos. Alcanzó una altura de $2{,}72$ metros. Nació el 22 de Febrero de $1\,918$.

5. Se selecciona un estudiante en su grupo de clase.

a) ¿Qué posibilidad existe de que el estudiante seleccionado tenga una altura menor de 2 metros?

b) ¿Es un evento seguro que el estudiante que se escoja tenga menos de dos metros de altura? ¿por qué?

c) ¿Cuántos estudiantes de su grupo tienen menos de dos metros de altura?¿cuántos tienen más de 2 metros de altura?

d) ¿Cuántos casos favorables hay para el evento “el estudiante seleccionado tiene una altura menor de dos metros”?

e) ¿Cuántos casos favorables hay para el evento “el estudiante seleccionado tiene una altura mayor de 2 metros”?

6. Sabemos que el conjunto de resultados posibles al lanzar un dado es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Si el dado no está cargado

a) ¿Tiene cada uno de los eventos simples de E la misma probabilidad de ocurrir? ¿cuál es la justificación?

b) ¿Cuántos resultados favorables hay para el evento "el dado cae en un número par"?

c) ¿Cuál resultado es más probable, que el dado caiga 1 ó que caiga par?

d) ¿Su respuesta a la pregunta anterior tiene relación directa con los resultados favorables a cada caso?

Actividad en grupo

Discuta en grupo las respuestas que dio a las preguntas anteriores. Al intercambiar respuestas hágalo de manera respetuosa. Anote de manera clara y ordenada el consenso al que llegó su grupo y preséntelo al resto de compañeros.

Retome los ejemplos anteriores y seleccione los eventos de cada experimento aleatorio que son igualmente probables. Dos eventos son igualmente probables o equiprobables si tienen la misma probabilidad de ocurrir, por ejemplo al lanzar al aire una moneda legal tiene la misma probabilidad de caer escudo o número. En el caso del lanzamiento de un dado no cargado son equiprobables los eventos simples de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, porque cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ocurrir.

¡Importante!

Cuidado, responsabilidad, respeto y conocimiento son mutuamente interdependientes.

Erich Fromm

La bondad es el principio del tacto, y el respeto por los otros es la primera condición para saber vivir.

Henry F. Amiel

Si se le pide que le asigne a un evento un número que pertenezca al intervalo $[0; 1]$, tomando en cuenta los resultados favorables para este evento:

¿Qué número le haría corresponder a un evento imposible?

Suponga que se lanza un dado y se registra el número en la cara superior ¿A qué evento le asignaría un número mayor, que el dado caiga en un número par o que caiga en un número par primo?

Calcule para los dos eventos anteriores el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles. ¿Son estos cocientes menores que 1? Observe que a medida que aumenta el número de casos favorables, mayor es el cociente.

En el ejercicio 4 de la página 38 el evento que el equipo William Fonseca termine como líder en la primera vuelta es imposible, esto significa que el número de casos favorables es 0, por lo tanto,

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número total de casos posibles}}=\frac{0}{2}=0.$$

De lo anterior concluimos que a todo evento imposible le asignamos el número 0.

En cambio, en el mismo ejercicio, que el equipo Filemón Rivera finalice en la primera vuelta como el líder absoluto ocurrirá gane o pierda el último partido, esto significa que el número de casos favorables (2) coincide con el número de casos posibles (2); estamos por lo tanto en presencia de un evento seguro y el cociente es

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número total de casos posibles}}=\frac{2}{2}=1.$$

Podemos entonces asegurar que a un evento seguro le hacemos corresponder el número 1.

En general dado un determinado experimento aleatorio y un evento, la expresión

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número total de casos posibles}}$$

posee la característica de ser siempre mayor o igual a cero y menor o igual a 1. ¿Por qué?

A la razón entre el cardinal de un evento de un experimento aleatorio y el cardinal del espacio muestral de ese experimento se le define como probabilidad clásica.

Dado un experimento aleatorio y un espacio muestral $\boldsymbol{E}$ asociado a este experimento, la probabilidad de que ocurra el evento $\boldsymbol{A}$, se denota por $\boldsymbol{P(A)}$ y está dada por

$$P(A)=\frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(E)}=\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

Observe que en la definición de probabilidad a cada evento se asigna un número real a fin de saber si ese evento o resultado es más probable que otro.

Recuerde

- Una fracción numérica es menor que 1 si el numerador es menor que el denominador.

Recuerde

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

!Importante!

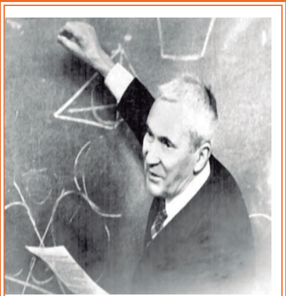
- $\#$ se lee "cardinal de "

¡Importante!

Otra forma para denotar el cardinal de un conjunto A es $\mathrm{card}(A)$ ó bien $\mathrm{n}(A)$

Ejemplo

Si $A=\{\text{J, e, s, u, s}\}$, $\mathrm{n}(A)=5$.



Andréi Kolmogórov, (1 903-1 987) creó una base axiomática que supone el pilar básico de la teoría de las probabilidades a partir de la teoría de conjuntos.

Características de la probabilidad

1. La probabilidad de un evento A es no negativa y menor o igual a 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. La probabilidad de un evento seguro E es 1.

$$P(E) = 1.$$

El espacio muestral de un experimento aleatorio es un evento seguro.

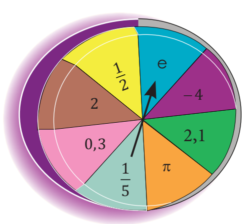
3. La probabilidad de un evento imposible es 0.

$$P(\varnothing) = 0.$$

4. La probabilidad de un evento $A \subset E$, es la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos elementales que lo conforman. Aquí se está considerando que la probabilidad es discreta porque el espacio muestral es finito.

Ejemplo 1

Utilice la ruleta de la izquierda haciendo girar la aguja y calcule las siguientes probabilidades.



1) P(número entero).

2) P(número real).

3) P(número irracional).

Solución

1) El total de resultados posibles es 8 y en la ruleta aparecen los enteros 2 y -4, luego los resultados favorables son 2, así:

$$P(\text{número entero}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Exprese el resultado anterior en notación decimal y en porcentaje.

2) En este caso el número de resultados favorables es igual al total de resultados posibles ¿por qué?, por tanto:

$$P(\text{número real}) = \frac{8}{8} = 1.$$

¿Cómo interpreta este resultado?

¡Importante!

La probabilidad de un evento se puede expresar como una fracción, un decimal o un porcentaje.

3) Tenemos que la probabilidad pedida es:

$$P(\text{número irracional}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Exprese P(número irracional) como un porcentaje.

Ejemplo 2

Dos monedas legales de 1 córdoba son lanzadas al aire:

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 escudos?

2. Encuentre la probabilidad de obtener dos unos.

Solución

El espacio de este experimento muestral es:

$$E = \{(N;\, N),\, (N;\, e),\, (e;\, N),\, (e;\, e)\}.$$

donde N simboliza al número 1 y e al escudo.

$$P(\text{dos escudos}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{dos unos}) = \frac{1}{4}.$$

Escriba el espacio muestral anterior utilizando 1 en lugar de N. ¿Cambian los resultados P(dos escudo) *y* P(dos unos)?

Reina y rey de la baraja inglesa.

Compruebe lo aprendido

1. Una hiladora se divide en 4 sectores iguales, coloreados con amarillo, azul, verde y rojo. Si se rota frente a una persona:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en un sector rojo?

b) Calcule P(no rojo).

c) Verifique que $P(\text{rojo}) = 1 - P(\text{no rojo})$.

2. Se escoge una carta de un mazo de 52 cartas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger una carta que sea rey?

b) Calcule P(no reina).

c) Obtenga $1 - P$(no reina). ¿Es este resultado igual a P(rey)?

¿Sabías qué?

La baraja inglesa consta de 52 cartas distribuidas en cuatro palos, dos de color rojo y dos de color negro: tréboles, diamantes, corazones y picas. Cada uno de estos palos está compuesto por 13 cartas de las cuales 9 son numerales y 4 literales.

Gregorio Mendel, (1 822-1 884) Fraile Augustino, austríaco del s. XIX, aplicó la teoría de las probabilidades en su obra *La Matemática de la herencia*.

3. María vende frutas en el Mercado Oriental y tiene en un canasto 6 naranjas, 4 bananos, 5 piñas y 3 mangos. Se toma una fruta al azar. Calcule la probabilidad de:

a) Escoger un banano.

b) Escoger un mango.

c) Que la fruta que se escoja no sea piña.

d) Que la fruta escogida sea una naranja.

e) Escoger una piña.

f) ¿Cuál es el valor esperado si suma los resultados obtenidos en **a)**, **b)**, **d)** y **e)**? ¿por qué? ¿cuál es el resultado si suma **c)** y **e)**? ¿cómo explica este resultado?

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Suponga que hay dos alelos A y a para llenar un locus de genes. Imagine que tiene dos monedas genéticas cuyas caras tienen A y a.

Lance las monedas al aire y registre el resultado.

¿Cuál es el espacio muestral? ¿El número que encontró es diferente si lanza dos monedas con escudo y número en sus caras?

Desde el punto de vista genético Aa y aA no se distinguen; tomando en cuenta esto, calcule el nuevo espacio muestral.

Considere el evento “homocigótico” que consiste en los eventos elementales AA y aa. Calcule $P(\{AA, aa\})$.

2. Encuentre la probabilidad de que al arrojar, de manera consecutiva, una moneda al aire, salga 5 veces cara. Use un diagrama de árbol para representar el espacio muestral de este experimento. ¿Cambia el resultado si en lugar de lanzar una moneda 5 veces, lanza 5 monedas una sola vez? ¿es otro el diagrama de árbol?

¡Importante!

Gen: la unidad de información hereditaria que forma parte del ADN.

Alelo: variación de un gen.

Locus: lugar que ocupa un gen en un cromosoma.

Homocigoto: célula o individuo con alelos idénticos en un mismo locus.

Probabilidad Frecuencial

Hay dos tipos de probabilidades, la ya estudiada, llamada probabilidad clásica o teórica, que se aplica cuando cada evento simple del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ocurrir (eventos equiprobables) y la que ahora estudiaremos, la frecuencial, que para obtenerla se realiza un experimento un gran número de veces en condiciones semejantes.

Recuerde, reflexione y concluya

1. Si lanzamos un dado ¿cuáles de los siguientes eventos son equiprobables?

   a) A: El dado cae 1.

   b) B: El dado cae en un número impar.

   c) C: El dado cae en un múltiplo de 2.

   d) D: La cara superior del dado, al caer, muestra el número 4.

¡Importante!

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, es decir si su intersección es vacía.

2. Calcule la probabilidad (teórica) de cada uno de los eventos anteriores.

3. ¿Cuáles de los eventos anteriores son excluyentes? ¿cuáles no son excluyentes?

4. ¿Qué es frecuencia relativa? ¿cuál es la definición de frecuencia absoluta?

5. ¿Qué propiedades tiene la frecuencia relativa?

6. ¿Qué entiende por frecuencia relativa acumulada?

7. Suponga que lanza una moneda 500 veces y que ésta cae número 260 veces y el resto de veces cae escudo.

   a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta del evento “la moneda cae número” y la del evento ”la moneda cae escudo”?

   a) ¿Cuál es la frecuencia relativa de cada evento?

8. Realice el experimento anterior 500 veces, pero anote cada 100 veces la frecuencia absoluta del evento “la moneda cae escudo”, y luego con los datos obtenidos encuentre la frecuencia relativa acumulada. Compare los cocientes encontrados. ¿Disminuye la diferencia entre ellos, a medida que se aumenta el número de ensayos? La probabilidad teórica del evento “la moneda cae escudo” es $\frac{1}{2}$. ¿los valores encontrados se aproximan a este valor?

9. Repita una experiencia similar a la anterior, pero en lugar de lanzar una moneda, lance un dado y llene la tabla siguiente.

Recuerde

f_i = Frecuencia absoluta.
f_r = Frecuencia relativa.
F_i = Frecuencia absoluta acumulada.
F_r = Frecuencia relativa acumulada.

	# de veces que se repite el ensayo	EVENTOS								
		El dado cae 6			El dado cae 3			El dado cae 1		
		f_i	F_i	f_r	f_i	F_i	f_r	f_i	F_i	f_r
1^{er} experimento	100									
2^{do} experimento	100									
3^{er} experimento	100									
4^{to} experimento	100									
5^{to} experimento	100									
	Totales									

Compare las frecuencias relativas acumuladas obtenidas con las probabilidades teóricas siguientes:

a) $P\,(\text{el dado cae } 6) = \frac{1}{6}$

b) $P\,(\text{el dado cae } 3) = \frac{1}{6}$

c) $P\,(\text{el dado cae } 1) = \frac{1}{6}$

¿Se aproximan las frecuencias relativas acumuladas encontradas a $\frac{1}{6}$ a medida que aumenta el número de experimentos?

¡Importante!

Observe que en la definición de probabilidad frecuencial que aparece a la derecha se puede sustituir $n(A)$ por n_A o por f siendo ésta la frecuencia absoluta, esto es, número de casos favorables del evento A.

Los conceptos de frecuencia absoluta y frecuencia relativa y las propiedades de esta última, que pueden observarse de manera empírica, sirven de base para la definición axiomática de probabilidad ya que los axiomas de la probabilidad teórica son solamente abstracciones de las propiedades de la frecuencia relativa. Además también sirven de base del concepto de probabilidad empírica o frecuencial, estableciendo de esta manera el puente entre la estadística y la probabilidad, así tenemos:

En un experimento aleatorio realizado n veces la probabilidad frecuencial de cada posible evento A es el cociente $\frac{n(A)}{n}$, entre el número de veces que ocurre A "$n(A)$" y el número de repeticiones del experimento n.

Ejemplo 1

Se realizó una encuesta a 1000 estudiantes, de los cursos sabatinos de la UNAN – Managua, sobre su estado civil y se obtuvo que 552 nunca estuvieron casados, 416 casados y el resto viudo o divorciado.

Si se selecciona al azar un estudiante ¿Cuál es la probabilidad de que nunca ha estado casado, sea casado, viudo o divorciado?

Solución

Supongamos que:

A: El estudiante nunca estuvo casado.

B: El estudiante es casado.

C: El estudiante es viudo o divorciado.

Entonces

$$P(A)=\frac{552}{1000}=0{,}552, \quad P(B)=\frac{416}{1000}=0{,}416,$$
$$P(C)=\frac{32}{1000}=0{,}032.$$

Observe que $P(A)+P(B)+P(C)$ es igual a 1. Además todas las probabilidades obtenidas son valores menores que 1.

En general, la probabilidad frecuencial o empírica goza de las mismas propiedades que la probabilidad clásica o teórica.

¡Importante!

En el ejemplo 1 cambie nunca estuvo casado por soltero. ¿Es posible resolver el nuevo ejercicio considerando que en el conjunto de los solteros hay viudos y divorciados? ¿Necesita alguna información adicional?

Ejemplo 2

A un grupo de clase de 40 estudiantes se les preguntó sobre las actividades realizadas el fin de semana y se obtuvo que 25 estudiaron, 20 habían practicado algún deporte y 12 habían realizado ambas actividades.

¿Cuál es la probabilidad que un alumno escogido al azar haya estudiado solamente? ¿cuál es la probabilidad que practicó solamente un deporte?. Calcule la probabilidad que haya realizado ambas actividades.

Solución

Sean los eventos

A: Los alumnos estudiaron, pero no practicaron algún deporte.

B: Los estudiantes solamente practicaron algún deporte.

C: Los estudiantes practicaron algún deporte y estudiaron.

Luego,

$$P(A)=\frac{13}{40}=0{,}325, \qquad P(B)=\frac{8}{40}=0{,}2 \qquad P(C)=\frac{12}{40}=0{,}3.$$

En conclusión, la probabilidad que un estudiante escogido al azar haya estudiado y no practicado algún deporte es $0{,}325$, que haya solamente practicado algún deporte es $0{,}2$ y que realizó ambas actividades es $0{,}3$.

¿Cuál es la probabilidad que un estudiante tomado al azar no realizó ninguna de las dos actividades? Sugerencia: Dibujar un diagrama de Venn que ilustre los eventos involucrados. Sume las probabilidades obtenidas en el ejemplo anterior y la que usted calculó? Justifique el resultado.

Ejercicios Finales de la Unidad

1. Coloque dentro del paréntesis la letra que corresponde:

( ) No es posible predecir con certeza el resultado de los eventos.

( ) Es la ocurrencia de un hecho observable.

( ) Es observar el resultado de un fenómeno bien definido.

( ) Es la ciencia subjetiva y cualitativa.

( ) Evento cuya probabilidad es 1.

( ) Número de ocurrencias de un resultado en proporción al número de veces que se repite el experimento.

( ) Se puede predecir su resultado con certeza en función de la información que se dispone.

( ) Es cuando siempre se tiene un mismo resultado.

a) Fenómeno.
b) Suceso determinista.
c) Probabilidad.
d) Experimento.
e) Evento seguro
f) Experimento determinista.
g) Frecuencia relativa.
h) Experimento aleatorio.

2. Exprese tres características de un experimento aleatorio.

3. Un experimento consiste en lanzar primero una moneda luego, si ésta cae escudo, se lanza un dado. Si el resultado es número se lanza de nuevo la moneda. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento.

4. Para el espacio muestral anterior describa un evento imposible, uno unitario, un evento que tenga 4 elementos, 2 eventos que tengan un elemento en común.

5. Un experimento consiste en preguntarle a 3 hombres de manera aleatoria si votaron en las elecciones pasadas para presidente. Se registra la respuesta (si), (no) de cada uno.

a) Encuentre el espacio muestral.

b) Describa por extensión los siguientes eventos.

- Al menos un hombre votó.
- Ningún hombre votó.
- Todos los hombres votaron.

¿Cambiaría el espacio muestral de este experimento si en lugar de preguntarle a 3 hombres se le preguntara a tres mujeres?

6. Una fábrica de tortillas decide observar la posibilidad de rebajar sus costos. Hay dos alternativas: comprar harina transgénica importada y harina nacional ¿Describa cuál es el espacio muestral?

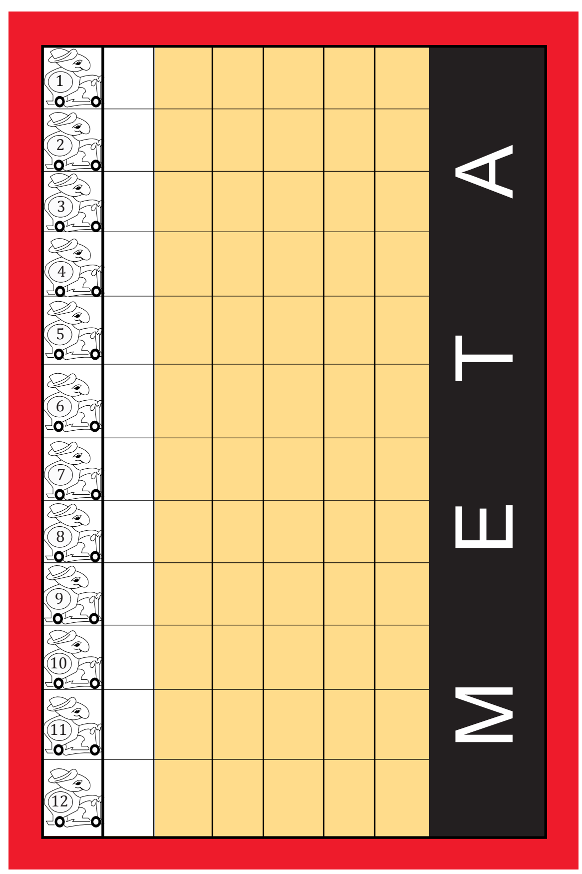
7. Mencione dos eventos para cada uno de los siguientes experimentos.

a) Lanzar un dado.

b) Lanzar dos dados.

c) Lanzar tres dados.

8. Construye un tablero como el siguiente



Utilícelo para jugar con sus amigos a la carrera de la siguiente manera.

a. Cada jugador selecciona una tortuga con un número entre 1 y 12.

b. Una vez seleccionada la tortuga se inicia el juego lanzando un par de dados y avanzará el jugador cuyo número corresponda a la suma de los números que caigan en los dados.

c. Ganará el primero que llegue a la meta.

- ¿Cuál es la tortuga que tiene más posibilidad de llegar primero a la meta y porqué?
- ¿Cuál tortuga no se moverá del punto de partida? Explique.
- ¿A qué evento corresponde que la tortuga 12 avance un lugar?
- ¿A qué evento corresponde que la tortuga 7 avance un lugar?
- ¿Cuántos elementos tiene el evento anterior?
- ¿La cantidad de elementos que tenga cada uno de los eventos involucrados en este juego tiene una relación directa con la probabilidad de ganar?
- ¿Qué tortugas tienen la misma oportunidad de ganar? ¿En qué se basa su respuesta?

9. A los arreglos en los cuales los objetos se disponen de manera circular se les llama **permutaciones circulares**.

> El número de permutaciones de n objetos distintos colocados en forma circular es $(n-1)!$

¿De cuántas maneras pueden sembrarse alrededor de una rotonda de Managua 10 plantas diferentes?

10. Una familia de 4 personas se sientan a almorzar diariamente en una mesa circular ¿Es posible que durante toda una semana se sienten de manera diferente?

11. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 8 personas en una fila si solamente hay 4 sillas disponibles?

12. ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse con los números $0, 1, 2, 3, \dots, 9$?

13. Diagonal de un polígono es todo segmento que une un par de vértices no adyacentes del polígono. Obtenga el número de diagonales de un pentágono y en general de un polígono de n lados.

14. Si se lanzan 5 monedas de un córdoba de manera simultánea, ¿cuántos casos hay que salgan 3 escudos y 2 unos? ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento?

15. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar en un librero 5 libros de Matemáticas, 3 de Física, 4 de Química, 6 de Historia de Nicaragua, 3 de Español si los libros de cada materia son iguales y deben estar juntos? ¿Si se considera que todos los libros son diferentes y los de cada materia deben estar juntos, cuántos arreglos hay? ¿Cuántos arreglos son posibles en el caso que los libros de Física y Matemáticas sean iguales, el resto diferente y los de cada materia deben estar juntos?

16. Luis debe resolver 7 de 8 problemas de un examen de los cuales 3 son obligatorios ¿De cuántas maneras puede elegir? ¿Cuántas opciones tiene en el caso que ninguna sea obligatoria?

17. ¿Cuántos ramilletes distintos pueden venderse en una floristería si cuenta con 6 variedades de flores y cada ramillete debe componerse de 4 variedades distintas?

18. Si se lanza un dado de 20 caras
   a) ¿Cuáles de los eventos siguientes son equiprobables?

   A: Que el dado muestre 4.

   B: Que salga un múltiplo de 5.

   C: Salir un número primo.

   D: Salir un número par mayor que 3 y menor o igual que 10.

   E: Salir un número impar mayor o igual que 5 y menor que 18.

   F: Salir un número par mayor que 12 y menor que 16.

   b) Calcule la probabilidad de cada uno de los eventos anteriores.

   c) ¿Cuál es el evento complementario de A? ¿Cuál es su probabilidad?

19. Si $P(A)=0{,}75$ y $P(B)=0{,}5$ donde $P(A)$ y $P(B)$ es la probabilidad asignada a los eventos A y B respectivamente. ¿Cuál es más seguro que suceda?

20. Se va a seleccionar al azar una carta de una baraja americana de 52 cartas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta elegida sea de color rojo y de corazones?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta elegida sea un 2 de cualquier figura?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta escogida sea múltiplo de 5?

21. Suponga que un espacio muestral contiene exactamente 4 resultados igualmente probables E_1, E_2, E_3 y E_4 y sean los eventos,

$$A=\{E_1, E_4\}$$
$$B=\{E_2, E_4\}$$
$$C=\{E_1, E_2, E_4\}.$$

   a) Encuentre la probabilidad de cada uno de estos eventos.

   b) Encuentre $A\cup B$, $A\cap B$, A', B', C', $A'\cap B'$, $A'\cup B'$.

¿Son A y C mutuamente excluyente? Investigue si A' y B' son mutuamente excluyentes.

c) Calcule $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B \cup C)$.

d) Verifique las siguientes igualdades:

$1 - P(A') = P(A)$

$P(B) + P(B') = 1$

$P(E) = 1$

$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$(P(A \cap B) + P(A' \cap B'))^2 = 0{,}25$

$P(A \cup B) = P(C)$.

22. Las probabilidades de dos eventos A y B son $P(A) = 0{,}55$, $P(B) = 0{,}64$ y $P(A \cap B) = 0{,}44$.

¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Porqué si o por qué no?

Si A y B no son mutuamente excluyentes, cambie los valores de $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$ para que A y B sean mutuamente excluyentes.

23. Un experimento con 4 resultados $E=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ se repite 100 veces, E_1 ocurre 30 veces, E_2 26 veces, E_3 13 veces y E_4 31 veces. Calcule la probabilidad de cada uno de los resultados. ¿Utilizó probabilidad teórica o empírica? Explique.

24. Si se lanzan 7 monedas de 5 córdobas encuentre la probabilidad de obtener:

a) Al menos 4 escudos
b) Exactamente 4 escudos
c) Menos de 4 escudos
d) Más de 4 escudos

25. Los números de los teléfonos fijos de la ciudad de Estelí empiezan con 2713 seguido de 4 dígitos. ¿Cuántos números telefónicos son posibles?

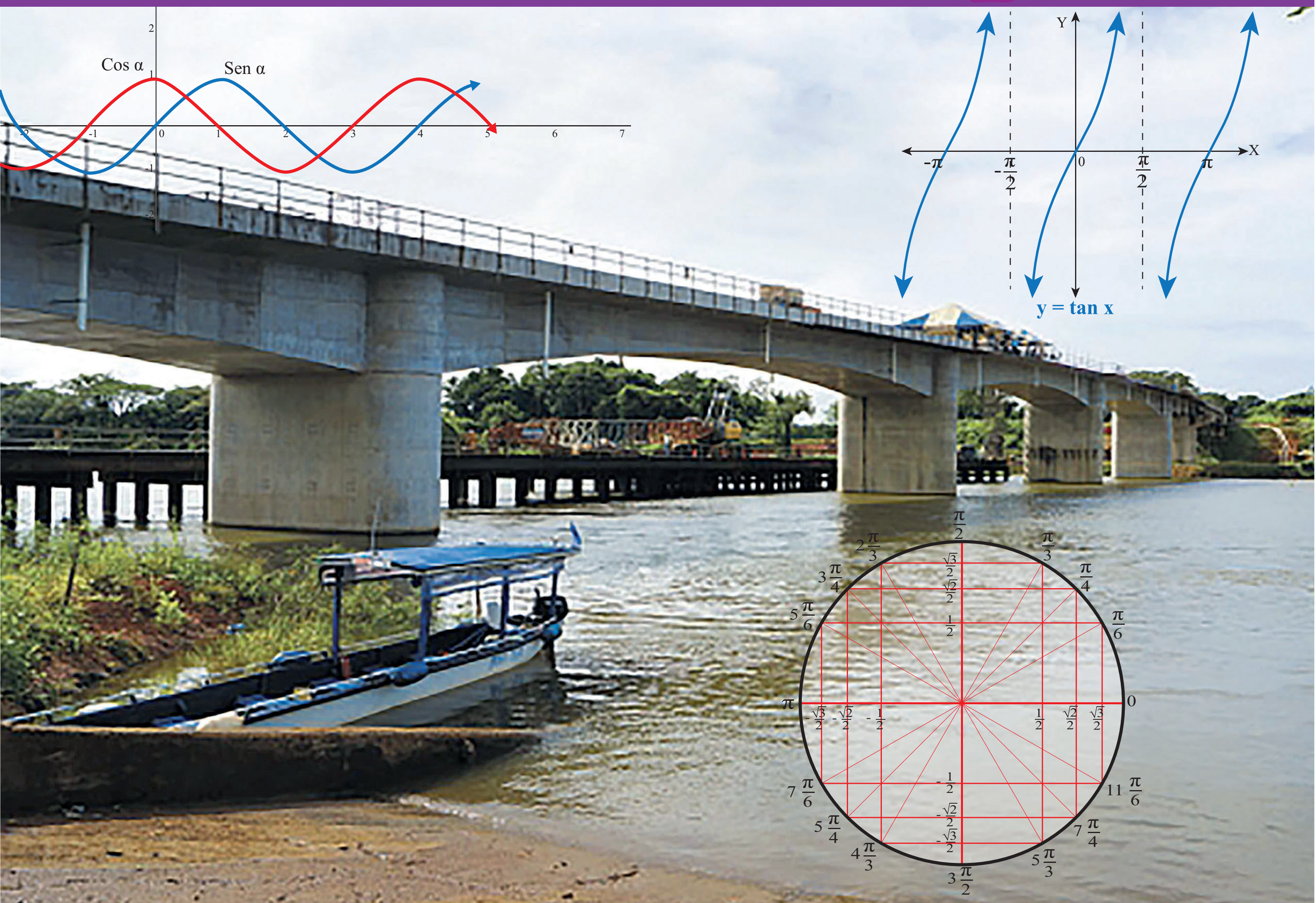
26. Investigue el número de dígitos que tienen los teléfonos fijos de Managua, Granada y Masaya y calcule cuántos números telefónicos son posibles para cada ciudad, tome en cuenta que los primeros cuatro dígitos son fijos.

27. El gobierno a través del Ministerio de Educación entregó a Pablo, alumno de décimo grado, los siguientes libros: Matemática, Lengua extranjera, Geografía, Química, Física y Lengua y literatura. Él sabe que son propiedad social y que debe cuidarlos; cada día los coloca en un librero. ¿De cuántas maneras distintas puede él arreglar los libros?

28. Utilice un diagrama de árbol para formar su árbol genealógico hasta la cuarta generación.

Trigonometría

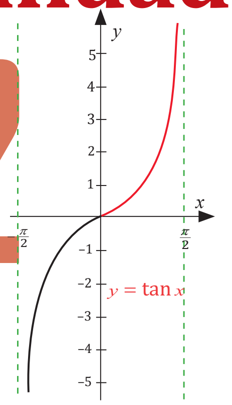
Unidad 2



El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional ha impulsado un importante proyecto como es la construcción del puente Santa Fe y paralelo a la construcción del puente también se construyó la carretera ubicada en la costa Sur del Río San Juan de Nicaragua hasta concluir en la frontera con Costa Rica, lo que facilitará que las exportaciones de la zona central del país puedan salir en esa dirección hacia Puerto Limón en Costa Rica, además de la entrada y salida de nicaragüenses hacia el país vecino del Sur.

Fuente: 19 digital.
Abril 2 014.

Unidad 2



Trigonometría

Introducción

La trigonometría es una rama vieja de las matemáticas que surgió de las manos de los ingenieros egipcios y babilonios quienes utilizaban las proporciones entre los lados de un triángulo para simplificar los cálculos astronómicos.

Hiparco de Nicea, $(190-120\ a.c)$ considerado el padre de la trigonometría, compiló las primeras tablas trigonométricas para simplificar también el estudio de la astronomía y la geografía. En $1\,220$, Fibonacci (Leonardo de Pisa) publicó un tratado de trigonometría plana que contenía aproximadamente lo que presenta esta unidad. Sin embargo, la aparición del concepto de función le dio un nuevo significado a esas proporciones entre los lados de un triángulo que es lo que conocemos actualmente como funciones trigonométricas.

La trigonometría desde entonces, aparece en todas las tecnologías que se ocupan de los fenómenos periódicos, desde el estudio del ritmo cardíaco hasta el almacenamiento de ondas sonoras digitales en un disco compacto.

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Cómo se define ángulo en geometría?

2. ¿A qué se llama ángulo central?

3. ¿Qué se entiende por arco de una circunferencia?

4. ¿Cuál es la fórmula para encontrar la longitud de un arco?

5. ¿Cuál es la longitud de una circunferencia de radio r?

6. Si una circunferencia tiene radio 2 y otra tiene radio 4, ¿es la longitud de la primera circunferencia la mitad de la longitud de la segunda?

7. ¿A qué se llama sector circular?

8. ¿Cuál es el área del sector circular?

¿Sabías qué?

Circunferencia viene del latín ***circum*** (*alrededor*) + ***ferre*** (*llevar*), lo que se lleva alrededor.

9. ¿Qué diferencia hay entre círculo y circunferencia?

10. Si partimos de la definición de circunferencia ¿qué se necesita conocer para graficar una de ellas?

11. ¿Qué es un rayo?

¿Sabías qué?

La palabra trigonometría se deriva del vocablo griego τριγωνο (trígono) triángulo y μετρον (métron), medida de un triángulo.

Ángulo y sistema circular

En geometría, el concepto de ángulo se toma desde un punto de vista estático, pues este no es más que la unión de dos rayos que tienen un mismo punto de partida llamado vértice. Por el contrario, en trigonometría el concepto de ángulo es dinámico. Un ángulo resulta de la rotación de un rayo, más exactamente:

Un **ángulo** está determinado por la rotación de un rayo alrededor de su punto extremo, el vértice del ángulo, desde una posición inicial, el lado inicial del ángulo (l_1), hasta una posición terminal, el lado terminal (l_2) del ángulo.

La perspectiva de la trigonometría sobre el concepto de ángulo permite que:

1. La medida de un ángulo pueda ser arbitrariamente grande o pequeña.
2. Haya dos direcciones.

Figura 1

Si un ángulo es generado por una rotación en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj (anti horario), el **ángulo** es **positivo**.

Si un ángulo es generado por una rotación a favor de la rotación de las manecillas del reloj (horario), el **ángulo** es **negativo**.

En la figura 1 están representados un ángulo positivo y otro negativo.

En trigonometría, para conocer o representar un ángulo, ¿qué información debe tener?

Medida de ángulos

Las unidades de medidas de ángulos más usuales son los grados y los radianes.

Medida en grados

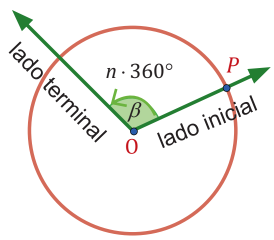


Figura 2

La medida en grados de un ángulo positivo determinado por n revoluciones es igual a $n \cdot 360°$ (figura 2). Por ejemplo, la medida del ángulo positivo que describe un cuarto de revolución es igual a $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$. La medida del ángulo que determina un rayo al efectuar 5 revoluciones alrededor de su vértice en sentido antihorario es de $5 \cdot 360° = 1\,800°$.

La medida en grado de un ángulo negativo se define de forma análoga con la diferencia de que se toma con signo negativo. Así, la medida en grados del ángulo determinado por $\frac{3}{4}$ de una vuelta completa en sentido horario es igual a $-\frac{3}{4} \cdot 360° = -270°$.

¡Importante!

Una rotación completa (o revolución) es la medida de una vuelta que hace que el lado terminal de un ángulo coincida con su lado inicial.

De lo anterior se deduce que:

Un **grado**, el cual se denota por $1°$, es la medida de un ángulo positivo formado por $\frac{1}{360}$ de revolución. Un grado a su vez, puede ser dividido en 60 partes iguales llamadas **minutos** y un minuto puede ser dividido en 60 partes iguales llamadas **segundos**.

De lo anterior se obtiene

$1° = \frac{1}{360}$ de una rotación completa.

$1' = \frac{1}{60}$ de un grado (se lee un minuto).

$1'' = \frac{1}{60}$ de un minuto (se lee un segundo).

Ejemplo 1

Exprese $-120{,}43°$ en términos de grados, minutos y segundos.

Solución

Vemos que $-120{,}43° = -(120 + 0{,}43)°$ y

$$0{,}43° = (0{,}43)(1°) = (0{,}43)(60') = 25{,}8'.$$

Convierta la parte decimal de la expresión anterior a segundos.

$$(0{,}8)(1') = (0{,}8)(60'') = 48''.$$

Así,

$$-120{,}43° = -120°\,25'\,48''.$$

Ejemplo 2

Calcule la cantidad de rotación y dirección de los ángulos con medidas

1. $\beta = -300°$ **2.** $\alpha = 200°$.

Solución

1. Para calcular la cantidad de rotación que corresponde a β se divide $300°$ entre $360°$, esto es, $\frac{300°}{360°} = \frac{5}{6}$.

Además, la rotación es en sentido horario porque la medida del ángulo β está precedida del signo menos.

2. La cantidad de rotación para α es

$$\frac{200°}{360°} = \frac{5}{9}$$

y la rotación es en sentido anti horario porque la medida de α es positiva.

¡Importante!

Los ángulos se denotarán con las letras griegas α, β, γ, θ, δ, etc.

Observación

El signo menos no fue considerado al obtener el cociente del inciso 1, porque éste solo interesa para determinar la dirección del ángulo.

¿Cuál es la medida, en grados, de un ángulo formado por $\frac{2}{3}$ de una rotación completa en sentido anti horario? ¿y por una rotación completa en sentido horario? ¿cuál es la gráfica de los ángulos anteriores?

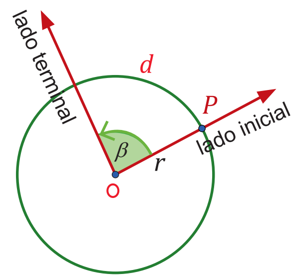
Medida de radianes

Al rotar un rayo $\overrightarrow{OP}$ alrededor de su eje el punto P recorre cierta distancia d a lo largo de la circunferencia de centro O y radio $r = OP$ (figura 3). La medida en radianes del ángulo determinado por la rotación es igual al cociente

$$\frac{d}{r}$$

si el ángulo es positivo. Si el ángulo es negativo su medida en radianes será igual a

$$-\frac{d}{r}.$$



La medida β es de $\frac{d}{r}$ radianes.

Figura 3

Por ejemplo, si un rayo $\overrightarrow{OP}$ realiza una revolución completa alrededor de su vértice en sentido antihorario, el punto P habrá recorrido la circunferencia completa. La circunferencia de centro O y radio $r = OP$ tiene una longitud de $2\pi r$ por lo que la medida del ángulo determinado por la rotación será de

$$\frac{2\pi r}{r}\, rad = 2\pi\, rad.$$

Si la rotación es completa pero en sentido horario la medida del ángulo correspondiente será de $-2\pi\, rad$.

De acuerdo a lo anterior, tenemos

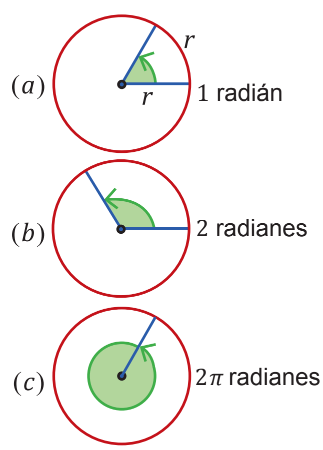


Figura 4

Un **radián** es la medida de un ángulo central de un círculo que intercepta un arco de longitud igual al radio r del círculo. Se escribe abreviadamente rad.

La figura $4(a)$ muestra un ángulo de un radián porque éste intercepta un arco de longitud r, en cambio el ángulo de la figura $4(b)$ mide dos radianes. ¿Por qué? ¿por qué el ángulo de la figura $4(c)$ mide $2\pi\, rad$?

Ejemplo 3

Encuentre la medida en radianes de un ángulo formado por

a) $\frac{1}{2}$ de revolución en sentido antihorario.

b) $\frac{1}{8}$ de revolución en sentido horario.

Utilice el hecho de que la longitud de la circunferencia de radio 1 es 2π radianes, luego

a) $\frac{1}{2}\,(2\pi\, rad) = \pi\, rad$ y

b) $-\frac{1}{8}\,(2\pi\, rad) = -\frac{\pi}{4}\, rad.$

Para resolver el ejercicio del inciso **b)** se multiplicó 2π radianes por $-\frac{1}{8}$ porque el sentido de la rotación es horario.

Es muy frecuente en trigonometría que un ángulo expresado en grados se cambie a radianes y viceversa.

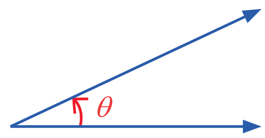
Observe que un ángulo formado por una rotación completa en sentido anti horario mide $360°$ o 2π radianes, esto es

$$360° = 2\pi \text{ radianes.} \qquad (1)$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) por $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$ respectivamente se obtienen las siguientes conversiones:

$$180° = \pi \text{ radianes}$$
$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$
$$45° = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$
$$30° = \frac{\pi}{6} \text{ radianes.}$$

¿Por qué número se debe multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) para obtener que $60° = \frac{\pi}{3}\, rad$?

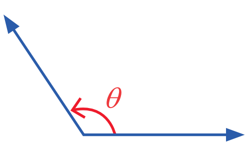


θ es un ángulo agudo. Se obtiene por menos de $\frac{1}{4}$ rotación completa

$0° < \theta < 90°$

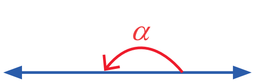
α es un ángulo recto. Es resultado de exactamente $\frac{1}{4}$ de rotación

$\alpha = 90°$.



θ es un ángulo obtuso. Es resultado de una rotación mayor que $\frac{1}{4}$ y menor $\frac{1}{2}$

$90° < \theta < 180°$



La cantidad de rotación es exactamente $\frac{1}{2}$

$\alpha = 180°$

Figura 5

¡Importante!

Cuando la medida de un ángulo está dada en radianes se omitirá la palabra radián. Además, se identificará la medida de un ángulo con el ángulo mismo.

Utilizando el hecho de que $180° = \pi$ radianes se obtienen las siguientes fórmulas que son útiles para convertir grados en radianes y radianes en grados:

i) $1° = \dfrac{\pi}{180}$

ii) $1 \text{ radián} = \dfrac{180°}{\pi}.$

En general, si queremos convertir grados en radianes se multiplica por $\dfrac{\pi}{180°}$ y la conversión de radianes a grados se realiza multiplicando por $\dfrac{180°}{\pi}$.

Ejemplo 4

Convierta $0{,}75$ radianes a grados, minutos y segundos.

Solución

Como se va a cambiar radianes a grados se multiplica por $\dfrac{180°}{\pi}$, así

$$0{,}75 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 42{,}972°$$

$$= 42° + (0{,}972)(60') = 42° + 58{,}32'$$

$$= 42°\,58' + 0{,}32(60') = 42° + 58' + 19{,}2''$$

luego,

$$0{,}75 \text{ radianes } \approx 42°\,58'\,19''.$$

¡¡Importante!

$$1° = 60'$$

Luego

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

y

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{3\,600}\right)^{\circ}.$$

1. ¿Qué aproximación decimal de π se utilizó para resolver el ejercicio anterior?

2. Utilice una aproximación de π con 6 decimales para resolver el ejercicio anterior.

3. ¿Cuál es la diferencia en grados, minutos y segundos de su resultado con el obtenido en el ejemplo 4?

4. ¿Es exacta o aproximada la diferencia que encontró?

5. Convierta 5π a grados, minutos y segundos. ¿Su respuesta es exacta o aproximada? ¿qué aproximación de π utilizó?

Ejemplo 5 Convierta $135°\,40'$ en radianes.

Solución Primero escriba $135°\,40'$ en forma decimal

$$135°40' = 135° + 40'$$
$$= 135° + \left(\frac{40}{60}\right)^{\circ} \approx 135° + (0{,}67°) = 135{,}67°.$$

Ahora convierta los grados en radianes multiplicando por $\dfrac{\pi}{180°}$

$$135°40' = (135{,}67°)\left(\frac{\pi}{180°}\right) \text{ radianes.}$$

$135°\,40' \approx 0{,}75\pi$ radianes.

Compruebe lo aprendido

I. Convierta cada una de las siguientes expresiones en radianes. Conserve π en su respuesta.

1) $-440°$
2) $20°\,36'\,18''$
3) $-47{,}2°$
4) $\left(\dfrac{110}{\pi}\right)^{\circ}$
5) $280°$
6) $850°$.

II. Dé una medida exacta o aproximada en grados, minutos y segundos de los siguientes ángulos.

1) 8π
2) $-\dfrac{5\pi}{2}$
3) -5
4) $2{,}1\ rad$
5) $0{,}84\ rad$
6) $12\ rad$.

III. Exprese en forma decimal los resultados del ejercicio II, utilizando siempre grados.

IV. Encuentre el ángulo *i*) complementario y *ii*) suplementario de cada uno de los ángulos dados.

1) $1°19'37''$
2) $67{,}08°$
3) $\dfrac{\pi}{4}$
4) $7{,}28°$
5) $\dfrac{\pi}{9}$
6) $89°19'37''$.

Recuerde

Dos ángulos agudos son complementarios si su suma es $90°$, y ángulos suplementarios si son positivos y su suma es $180°$.

Recuerde

Un ángulo es agudo si su medida es menor que $90°$, y obtuso si su medida es mayor que $90°$, pero menor que $180°$.

V. Clasifique los ángulos obtenidos en el ejercicio anterior en agudos u obtusos.

VI. ¿Cuál es el ángulo suplementario de un ángulo recto? ¿Existe ángulo complementario para este ángulo?

VII. ¿Qué ángulo es igual a su complementario?

VIII. ¿Es obtuso todo ángulo suplementario a un ángulo dado?

IX. Dé ejemplo de un ángulo cuya medida esté dada en grados con parte decimal distinta de cero y que su complementario sea un ángulo agudo. Exprese la medida de este ángulo y de su complementario en radianes.

Aplique los conocimientos adquiridos

Reloj de Corinto

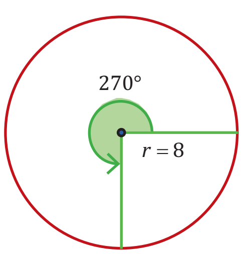


Figura 6

1. Si el reloj del parque central de Corinto señala las $3\ p.m.$ Suponga que tiene minutero. ¿Cuál sería entonces la medida del ángulo formado por el minutero y el horario partiendo del primero al segundo y viceversa considerando en los dos casos el sentido antihorario?

2. Tomando en cuenta que en un momento inicial el horario señala las $5\ p.m$ ¿qué hora marca el reloj cuando esta aguja ha recorrido π radianes?¿Qué hora es si el minutero es el que ha recorrido $\frac{3\pi}{2}$ radianes?

3. Determine la longitud de arco utilizando los datos de la figura 6. Calcule el área del sector circular correspondiente al ángulo de $270°$.

4. Calcule el área del otro sector circular de la figura 6.

5. Si en el ejercicio anterior cambiamos el ángulo de $270°$ por $360°$, ¿con qué coincide el sector circular? ¿cuál es el área de este sector?

6. ¿Cuál es la cantidad de rotación para el ángulo $\theta = -390°$?

7. ¿Cuánto mide θ si se obtuvo por una rotación anti horaria de $\frac{7}{12}$ de una rotación completa?

Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

Recuerde, reflexione y concluya

1. Si suma los ángulos interiores de un triángulo ¿cuál es el resultado?

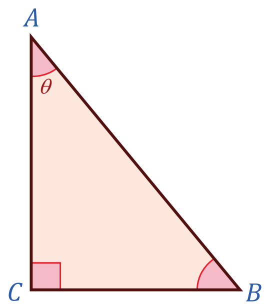


Figura 7

2. ¿Cuándo un triángulo es rectángulo?

3. ¿Qué características tienen los ángulos no rectos en un triángulo rectángulo?

4. En el triángulo rectángulo de la figura 7, AC se llama lado adyacente a θ ¿Cómo se llama al lado AB y al lado BC?

5. ¿Qué nos afirma el teorema de Pitágoras?

6. Escriba sus respuestas.

Actividad en grupo

Realicen las siguientes actividades. Recuerden que deben dedicar su mayor esfuerzo, mostrar disciplina y permitir la participación de todos los miembros de su grupo.

Recuerde

Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, ellos son semejantes.

1. Para comenzar compartan con sus compañeros de grupo las respuestas que dieron a las preguntas anteriores.

2. Investiguen cuándo dos polígonos son semejantes y en particular la semejanza de triángulos.

3. Recuerden y discutan sobre la importancia del teorema de Tales en el estudio de los triángulos semejantes.

4. ¿Porqué los dos triángulos de la figura 8 son semejantes?

5. Decidan, razonando su respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no.

   a. Dos cuadrados cualesquiera son semejantes.

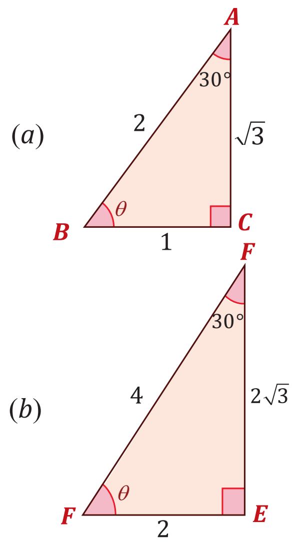


Figura 8

b. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

c. Dos rectángulos cualesquiera son semejantes.

d. Parejas cualesquiera de triángulos rectángulos son semejantes.

6. Observen que los triángulos rectángulos de la figura 8 tienen un ángulo agudo de $30°$ ¿Cuál es el valor de θ? ¿por qué?

7. Dibujen en sus cuadernos un triángulo rectángulo semejante al de la figura $8(a)$.

8. Escriban las seis razones entre los lados del triángulo que dibujaron, luego comparen sus resultados con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Determine las seis razones de los lados de cada uno de los triángulos de la figura 8.

Solución

Las seis razones que puede establecer para el triángulo cuyos lados miden $\sqrt{3}$, 1 y 2 son:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \frac{2}{1}=2,\quad \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad \frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}.$$

Para el otro triángulo de la figura 8 cuyos lados miden $2\sqrt{3}$, 2 y 4 se obtienen las siguientes razones:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \frac{4}{2}=2,$$

$$\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \text{y}\ \ \frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,.$$

¡Importante!

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno de ellos son congruentes con dos ángulos del otro.

Clasifique los resultados del ejemplo 1 en números enteros, racionales, irracionales o reales, además forme con ellos un conjunto con más de cuatro elementos y que esté incluido en el conjunto de los números reales.

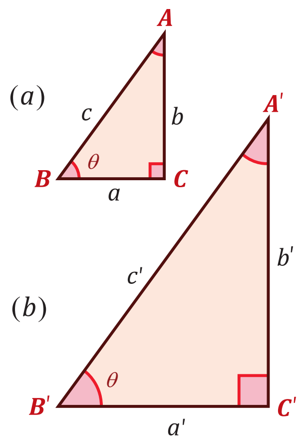


Figura 9

Observe que para los dos triángulos las razones de los lados correspondientes son iguales.

Comparen los resultados de las razones que calcularon, con los obtenidos anteriormente ¿Son iguales?

En general, si tenemos dos triángulos rectángulos semejantes como los de la figura 9 se cumple:

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}.$$

Las razones anteriores no dependen del tamaño del triángulo, sino solamente del ángulo; podemos entonces afirmar que ellas son funciones de un ángulo, llamadas funciones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente**, donde todas tienen como dominio el conjunto de los ángulos agudos, $0° < \theta < 90°$.

En el caso de la función seno, ésta asigna a cada ángulo agudo θ la razón $\frac{b}{c}$, donde b es el cateto opuesto a θ y c es la hipotenusa del triángulo ACB (figura $9(a)$).

En términos de cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa las tres funciones trigonométricas se definen así,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}.$$

Las otras tres razones de los lados de un triángulo rectángulo son utilizadas para definir las funciones trigonométricas **cotangente**, **cosecante** y **secante**, lo que se hace de la siguiente manera:

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}, \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}},$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}.$$

Recuerde

Una función

$$f : D \to V$$

de un conjunto D en un conjunto V es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D, un único elemento en el conjunto V, denotado por $f(x)$, y denominado imagen de x bajo (la acción de) f.

A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas se derivan las siguientes

Identidades recíprocas

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

A manera de ejemplo verifiquemos la identidad $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

Por definición de $\cot\theta$ y $\tan\theta$ tenemos:

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}, \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}.$$

Luego $\cot\theta$ y $\tan\theta$ son recíprocas entre sí porque

$$\cot\theta \cdot \tan\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \cdot \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = 1$$

y así, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

De manera análoga obtenga las otras dos identidades.

¡Importante!

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre funciones trigonométricas válida para todo valor del ángulo para el cual estas funciones están definidas.

Observación

1) Como las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, los valores de las funciones trigonométricas son siempre números reales positivos.

2) En un triángulo rectángulo cada cateto es menor que la hipotenusa, de aquí $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son valores menores que 1. ¿Cuál es el recorrido del seno y coseno? ¿por qué no puede ser el valor de estas funciones igual a 1?

3) Los valores de $\sec\theta$ y $\csc\theta$ son mayores que 1. ¿Por qué?

4) Las funciones $\tan\theta$ y $\cot\theta$ pueden tomar cualquier valor real positivo. ¿Por qué? ¿por qué no puede ser cero el valor de $\tan\theta$? ¿puede $\cot\theta$ ser cero?

Recuerde

El conjunto de valores que toma una función

$$f: D \to V,$$

se denomina imagen o recorrido de f, y se denota por $\operatorname{Im} f$. Es decir,

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in D\}.$$

5) Si el valor de una de las seis funciones trigonométricas es dado, podemos calcular el valor de las funciones restantes, utilizando la definición de éstas y el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 2

Si $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$ y θ es un ángulo agudo, determine el valor de las otras funciones trigonométricas.

Solución

Puesto que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, el cateto opuesto es igual a 5 y la hipotenusa es $\sqrt{26}$.

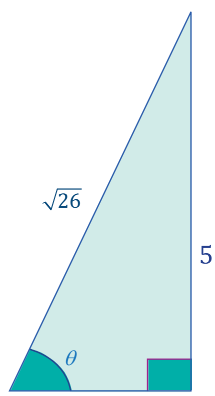


Figura 10

Dibuje un triángulo que ilustre esta situación (figura 10) y calcule el cateto adyacente a θ. Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$(\text{cateto adyacente})^2 + 5^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2.$$

Obtengamos el valor del cateto adyacente

$$(\text{cateto adyacente})^2 = 26 - 25 = 1.$$

Se extrae raíz cuadrada, así se tiene cateto adyacente $= 1$.

¿Por qué se descarta cateto adyacente $= -1$?

A continuación aplicamos las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}, \qquad \tan\theta = \frac{5}{1} = 5, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{2}}{26}$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{26}}{1} = \sqrt{26}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{5}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Observe que en la primera fila aparecen los valores de las funciones trigonométricas coseno, tangente y seno para un ángulo particular y debajo de cada una de ellas los valores que corresponden a sus recíprocas y para obtenerlos solamente se han invertido las fracciones que aparecen en la primera fila.

Recuerde

Cuando el denominador de una fracción es un radical ésta debe racionalizarse.
Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas guardan entre sí muchas relaciones, pero hay algunas que son básicas y de gran utilidad, debido a esto se les llama identidades fundamentales. A éstas pertenecen las ya conocidas como identidades recíprocas. Otras son las siguientes:

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Ejemplo 3

Demuestre que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

Solución

Transforme el lado derecho de la igualdad dada en el izquierdo, así

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \tan\theta.$$

Notación

En lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$ escribiremos $\operatorname{sen}^2\theta$. Aplicaremos lo mismo para las otras funciones trigonométricas.

De manera análoga compruebe que $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \quad 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

Ejemplo 4

Utilice el triángulo de la figura 11 para demostrar que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Solución

Por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$, donde b es el cateto opuesto a θ, a el cateto adyacente y c la hipotenusa.

Divida la expresión anterior por c^2, luego

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}.$$

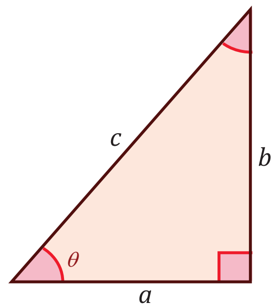


Figura 11

Aplicando la definición de $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{b}{c}$ y $\cos\theta=\dfrac{a}{c}$ resulta la identidad

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=(\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\theta)^2=1,$$

que escribiremos como

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

Demuestre la identidad $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$ (Sugerencia: divida la identidad $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ entre $\operatorname{sen}^2\theta$).

Dado el valor de una función trigonométrica y usando las identidades fundamentales podemos encontrar el valor de las otras funciones trigonométricas, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Encuentre el valor de las otras funciones trigonométricas si $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ y θ está en el primer cuadrante.

Solución

Encuentre el valor de $\operatorname{sen}\theta$ sustituyendo el valor dado de $\cos\theta$ en la identidad $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$

$$\left(\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2+\operatorname{sen}^2\theta=1,$$

esto implica que $\operatorname{sen}^2\theta=1-\dfrac{45}{49}=\dfrac{49-45}{49}=\dfrac{4}{49}$, luego extraiga raíz cuadrada positiva, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\theta>0$ porque θ está en el cuadrante I. Luego tenemos,

$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\frac{4}{49}}=\frac{2}{7}.$$

Los valores de las otras funciones trigonométricas son:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Recuerde

1. Propiedad de cerradura de la adición en $\mathbb{R}$:

   Para cualesquiera

   $a, b \in \mathbb{R}$,
   $a + b \in \mathbb{R}$.

2. Propiedad de cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}$:

   Para cualesquiera

   $a, b \in \mathbb{R}$,
   $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

En el caso de $\tan\theta$ y $\sec\theta$ se han racionalizado las respuestas. Tomando en cuenta los valores encontrados para las funciones trigonométricas del ejemplo anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. Dibuje un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto a θ sea 2, cateto adyacente $3\sqrt{5}$ e hipotenusa igual a 7, encuentre el valor de todas las funciones trigonómetricas de θ, además compare los resultados con los obtenidos en el ejemplo 5. ¿Son iguales? ¿por qué?

2. ¿Cuáles de los valores encontrados son números irracionales? ¿Cuáles son números racionales? ¿Hay algún valor entero?

3. Si multiplica $\tan\theta$ por $\cot\theta$ para un ángulo agudo θ, ¿qué número resulta? ¿Por qué? Y si multiplica $\operatorname{sen}\theta$ por $\csc\theta$ ¿cuál es el resultado? ¿el número obtenido se justifica por alguna propiedad del producto de números reales? ¿cuál es?

4. $\tan\theta \cdot \sec\theta = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{7}{3\sqrt{5}}$ es un número racional. A partir de este resultado ¿qué propiedad no cumple el producto de números irracionales?

5. ¿Es un número irracional

$\tan\theta + \sec\theta = \frac{2}{3\sqrt{5}} + \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$? ¿Se puede afirmar a partir de este resultado que la adición de números irracionales es cerrada?

Otra utilidad que tienen las identidades fundamentales es que nos permiten expresar una función trigonométrica en términos solamente de otra función trigonométrica.

Ejemplo 6

Utilice las identidades fundamentales para expresar $\operatorname{sen}\theta$ en términos de $\sec\theta$.

Solución

Obtenga $\operatorname{sen}\theta$ por despeje en la identidad $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

Sustituya $\cos\theta$ por $\frac{1}{\sec\theta}$

$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2\theta}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sec^2\theta-1}{\sec^2\theta}}$$
$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}.$$

Recuerde

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$\forall a\geq 0,\quad \forall b>0.$$

$\forall$: es el símbolo que se utiliza en matemática como cuantificador universal y se lee "para todo".

¡Cuidado!

$$\sqrt{a^2-b^2}\neq\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}.$$

Algunos ángulos especiales

En geometría usted estudió algunos teoremas sobre los triángulos equiláteros e isósceles, que ahora nos serán de gran utilidad para encontrar los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a los ángulos de $45°$, $30°$ y $60°$.

Consideremos el triángulo equilátero de la figura $12(a)$. Puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$ y un triángulo equilátero tiene todos sus ángulos iguales, resulta que cada ángulo de este triángulo mide $60°$.

Si hacemos la bisección del ángulo en A (figura $12\,(b)$), entonces AD es la bisectriz perpendicular a BC. ¿Por qué? Así, la longitud del segmento BD es $\frac{1}{2}$. En el triángulo rectángulo ADB, la medida del lado AD, por el teorema de Pitágoras, es:

$$AD=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

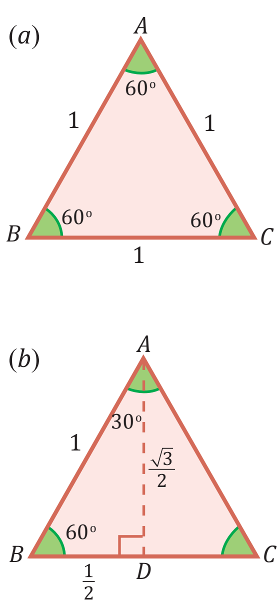


Figura 12

Algunos valores de las funciones trigonométricas para 30° y 60° son:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$
$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Usando el mismo triángulo o las identidades fundamentales podemos obtener los valores de las otras funciones trigonométricas.

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de 45° utilizamos un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud 1 como muestra la figura 13. La longitud de la hipotenusa de este triángulo es:

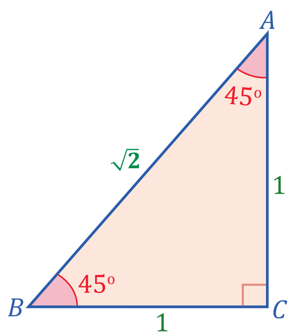


Figura 13

$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Luego,

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$
$$\sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Usted puede recordar fácilmente los valores de seno y coseno para algunos ángulos especiales si completa la tabla de abajo de la siguiente manera: coloque bajo el signo del radical en la primera fila consecutivamente los números 0, 1, 2 y 3 de izquierda a derecha y luego continúe colocando en la segunda fila siempre de izquierda a derecha los números 4, 3, 2 y 1.

	0°	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}\beta$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
$\cos\beta$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$

	0°	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}\beta$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\beta$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$

A veces no es posible obtener un valor exacto de las funciones trigonométricas para algunos ángulos, por ejemplo, para $\tan 42°$, $\operatorname{sen} 26°$, $\cos 15°$ solamente damos valores aproximados que podemos encontrar utilizando una calculadora científica.

Ejemplo 7

Encontrar el valor aproximado a 5 dígitos de las funciones dadas del ángulo indicado:

a) $\operatorname{sen} 74°30'$ **b)** $\csc 15{,}3°$.

Solución

a) Primero asegúrese de que la calculadora esté en el modo de grados, luego convierta $74°30'$ a la forma decimal, así,

$$74°30' = 74° + \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} = 74° + 0{,}5° = 74{,}5°.$$

Oprima la tecla $\boxed{\operatorname{sen}}$ y a continuación escriba $74{,}5$ y la calculadora le mostrará el siguiente resultado

$$\operatorname{sen} 74°\,30' = \operatorname{sen} 74{,}5° = 0{,}96363.$$

De manera análoga se hacen los cálculos aproximados que involucran a las funciones coseno y tangente.

b) Hay muchas calculadoras científicas que no poseen las teclas $\boxed{\sec}$, $\boxed{\csc}$ y $\boxed{\cot}$ si este es su caso, para obtener $\csc 15{,}3°$, primero oprima la tecla $\boxed{\operatorname{sen}}$, luego, escriba $15{,}3$ oprima la tecla $\boxed{=}$, luego la tecla $\boxed{x^{-1}}$ o $\boxed{1/x}$, por último $\boxed{=}$ y obtendrá

$$\csc 15{,}3° = 3{,}78970.$$

¡Importante!
Hay otras calculadoras que para encontrar el valor de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ o $\tan\alpha$ se procede de la siguiente manera: si α está dado en grados se convierte a la forma decimal, luego se ingresa este resultado a la calculadora y se oprime la tecla $\boxed{\operatorname{sen}}$, $\boxed{\cos}$ o $\boxed{\tan}$ según sea el caso.

Ejemplo 8

Use calculadora para encontrar un valor aproximado de:

a) $\sec \dfrac{\pi}{8}$ b) $\cot 0{,}45$.

Solución

a) Como el ángulo está dado en radianes, asegúrese que la calculadora esté en ese modo. Debido a que la secante es la recíproca del coseno, se oprime primero la tecla $\boxed{\cos}$, a continuación se escribe $\dfrac{\pi}{8}$ en paréntesis o $3{,}1416$ dividido por 8, después oprima $\boxed{=}$, luego $\boxed{x^{-1}}$, por último, para obtener

$$\sec\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}=1{,}0823.$$

b) La cotangente es la recíproca de la función tangente, entonces para calcular $\cot 0{,}45$, al igual que en el caso anterior, oprima la tecla $\boxed{\tan}$ y luego escriba $0{,}45$, luego oprima $\boxed{=}$, después $\boxed{x^{-1}}$ y por último oprima $\boxed{=}$

$$\cot 0{,}45=\frac{1}{\tan 0{,}45}=2{,}0701.$$

¡Importante!

Para calcular $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$, podemos primero determinar el valor de $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\tan\alpha$ respectivamente y luego aplicar las identidades recíprocas

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Determine los valores indicados sin utilizar calculadora:
$\sec\frac{\pi}{8}\cdot\cot 0{,}45$, $\cos\frac{\pi}{8}(\tan 0{,}45+\operatorname{sen}15{,}30)$, $\frac{\operatorname{sen}15{,}3°}{\cot 0{,}45}$,

$\operatorname{sen}74°30'+\csc 15{,}3°$, $2\operatorname{sen}74°30'-5\csc 15{,}3°$ y $(5\csc 15{,}3°)^{-1}$

Sugerencia: Utilice los resultados de los ejemplos 7 y 8 y las identidades recíprocas.

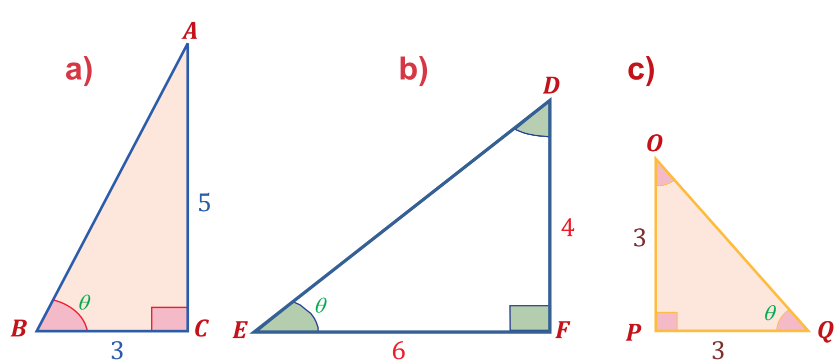
Compruebe lo aprendido

1. Utilice una calculadora para encontrar los valores aproximados de:

a) $\operatorname{sen}21°$ **b)** $\cos\frac{\pi}{9}$ **c)** $\tan 47°25'16''$

d) $\cot 0{,}7324$ **e)** $\sec 29°50'$ **f)** $\csc 74{,}13°$.

2. Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas de θ en los triángulos rectángulos que aparecen a continuación:



3. Complete las columnas de la tabla de abajo para β un ángulo agudo:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
$\operatorname{sen}\beta$	$\frac{2}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{4}$	
$\cos\beta$		$\frac{1}{2}$				
$\tan\beta$				$\frac{2}{5}$		$\frac{7}{2}$

4. Tomando en cuenta los valores obtenidos en la tabla anterior, encuentre para cada inciso los valores de $\sec\beta$, $\cot\beta$ y $\csc\beta$.

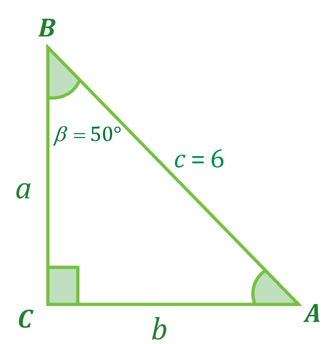
5. Utilice los resultados del ejercicio **3.** columna **(b)** y el ejercicio **4.** para encontrar:

a) $1-\cos^2\beta$ b) $\cot^2\beta - \csc^2\beta$ c) $\dfrac{\tan^2\beta}{1+\cos\beta}$ d) $\dfrac{\sec^2\beta - 1}{\cos\beta}$.

6. A qué valores de β corresponden los valores de las columnas **(b)** y **(c)**.

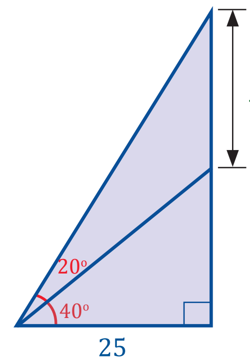
7. Utilizando una calculadora encuentre un valor aproximado de β que corresponda a los valores de la columna **(a)**.

8. Utilizando la figura de abajo encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas para β.

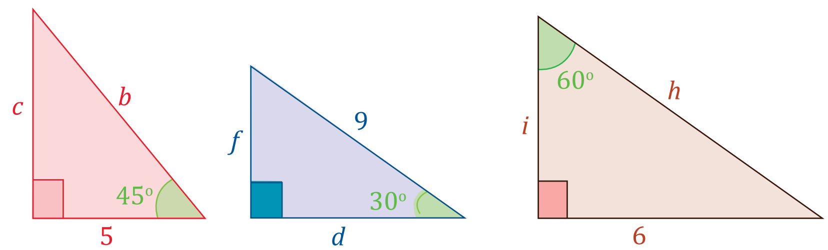


9. Si $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ para α un ángulo agudo, encuentre $\csc\alpha$, $\sec\alpha$ y $\cot\alpha$ de dos maneras distintas.

10. Para el triángulo de la figura de abajo, encuentre el valor de y.



11. La longitud de uno de los lados de cada triángulo rectángulo es dada. Encuentre la longitud de los otros dos lados.



12. Utilice las identidades fundamentales para encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes para α.

a) $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, $\quad \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}$

b) $\sec\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\quad \cot\alpha = 3$

c) $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$.

Aplique lo aprendido

1. Si $\cos\beta = z$ y β es un ángulo agudo, exprese $\tan\beta, \operatorname{sen}\beta$ y $\csc\beta$ en términos de z.

2. Si $\operatorname{sen}\theta = m$ y θ es un ángulo agudo, encuentre $\cot\theta$, $\cos\theta$ y $\sec\theta$ en términos de m.

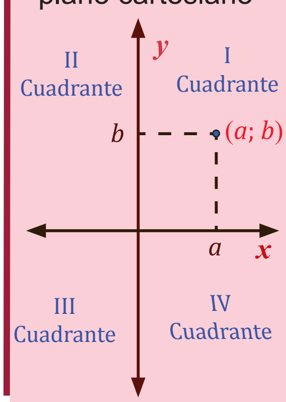
3. Dibuje un triángulo rectángulo con un ángulo θ con lado opuesto a éste igual a x y cateto adyacente de medida 3 ¿Qué valor debe tomar x para que $\tan\theta$ sea igual a $35{,}7$? ¿cuál es el valor de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$?

!Importante!

En esta serie educativa usaremos la notación $(a; b)$ para pares ordenados, observe que en lugar de comas se utiliza punto y coma.

Recuerde

A cada par ordenado de números reales $(a; b)$ se le asocia un punto P del plano cartesiano



Funciones trigonométricas para ángulos cualesquieras

Hasta ahora hemos definido las funciones trigonométricas solamente para ángulos agudos, pero hay muchas aplicaciones de la trigonometría que exigen la utilización de ángulos no agudos; se hace entonces necesario ampliar estas definiciones a ángulos cualesquiera. Con este fin se utilizará un ángulo en posición normal. Naturalmente se quiere que la extensión esté acorde con las definiciones dadas para un ángulo agudo.

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué es un sistema de coordenadas rectangulares?
2. ¿A qué se le llama origen de un sistema de coordenadas?
3. ¿Qué entiende por par ordenado de números reales?
4. Dado el par de números reales $(a; b)$, ¿cuál es la abscisa y la ordenada?
5. ¿Qué es un plano cartesiano?
6. ¿Qué característica tiene un punto que está ubicado en el primer cuadrante y otro que se encuentra en el tercer cuadrante?
7. ¿A qué es igual la abscisa de un punto que está ubicado en el eje y? ¿cuál es el valor de la ordenada de un punto que se ubica en el eje x?
8. La distancia entre dos puntos del plano $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$ está dada por la fórmula $d(P;Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, con ella encuentre la distancia entre $P(-3; 0)$ y $Q(5; 4)$.

Actividad en grupo

1. Si a es positivo y b es negativo, determinen el cuadrante en que se ubican los siguientes puntos:

a. $(a; b)$ **b.** $(-a; b)$ **c.** $(-a; -b)$ **d.** $(a; -b)$

e. $(a; a)$ **f.** $(b; b)$ **g.** $(-a; -a)$ **h.** $(-b; -b)$.

Notación

Cuando se escriba $P(a;b)$ o simplemente $(a;b)$ nos estaremos refiriendo a un punto P del plano cartesiano.

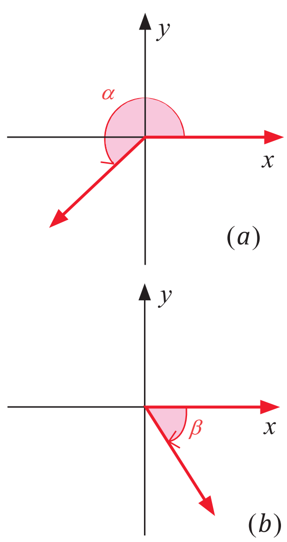


Figura 14

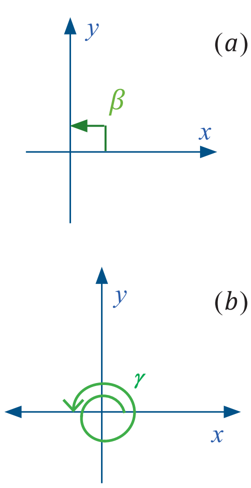


Figura 15

2. Para el ejercicio anterior, asignen un valor a a y otro diferente a b, y ubiquen en el plano cartesiano los 8 puntos obtenidos.

3. Encuentren la distancia entre los pares de puntos dados.

a) $P(-1;-3)$, $Q(4;5)$

b) $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$, $N\left(\sqrt{2};\frac{3}{2}\right)$

c) $A(2;0)$, $B\left(-\frac{2}{3};0\right)$

d) $H(0;\sqrt{3})$, $G(0;-5)$.

4. Dado los puntos $P_1(1;1)$, $P_2\left(\frac{7}{2};1\right)$ y $P_3\left(\frac{7}{2};4\right)$, ubíquenlos en el plano cartesiano, luego únanlos con segmentos rectilíneos y encuentren la hipotenusa del triángulo rectángulo así formado. Hallen el valor de las 6 funciones trigonométricas para cada uno de los ángulos agudos del triángulo.

Introduciremos un sistema de coordenadas rectangulares para definir un ángulo en posición estándar.

Dado un sistema de coordenadas rectangulares, un **ángulo en posición estándar** o **normal** es aquél que tiene su vértice en el origen del sistema y su lado inicial coincide con el eje x positivo.

En las figuras $14(a)$ y $14(b)$ se muestra los ángulos α y β en posición normal. Observe que el lado inicial de cada uno de ellos coincide con el eje x positivo y cada uno de sus vértices está en el origen. Además α y β están en el tercer y cuarto cuadrante, respectivamente, siendo α positivo y β negativo.

Para algunos ángulos en posición estándar, su lado terminal está en uno de los ejes coordenados. Por ejemplo, $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ tiene su lado terminal en el eje y negativo y $\beta=\pi$ en el eje x negativo.

Un **ángulo** en posición estándar se llama **cuadrantal** si su lado terminal está en uno de los ejes coordenados.

Los ángulos β y γ de la figura 15 son cuadrantales. ¿Cuál es la medida de estos ángulos?

Dos **ángulos** que tienen los mismos lados iniciales y terminales se llaman **coterminales**.

Ejemplo 1

Encuentre tres ángulos coterminales con $\alpha = 30°$.

Solución

Dibuje el ángulo dado en posición estándar (figura 16). Para encontrar un ángulo positivo en posición estándar coterminal con α, se suma a éste $360°$ o cualquier múltiplo positivo de $360°$. Así,

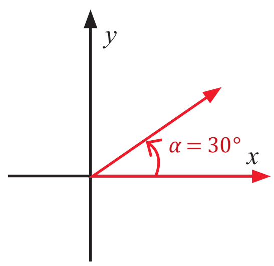


Figura 16

$$\beta = 30° + 360° = 390°$$

es coterminal con α.

Otro ángulo coterminal con α es:

$$\delta = 30° + 720° = 750°.$$

En el caso que quiera encontrar ángulos coterminales negativos con α, sume a este ángulo $-360°$ o cualquier múltiplo negativo de éste. Por lo tanto,

$$\theta = 30° + (-360°) = -330°$$

es coterminal con α.

¿Son $\delta = 690°$ y $\beta = -690°$ coterminales con α?

Utilicemos un ángulo θ en posición estándar para extender a cualquier ángulo las definiciones de las funciones trigonométricas.

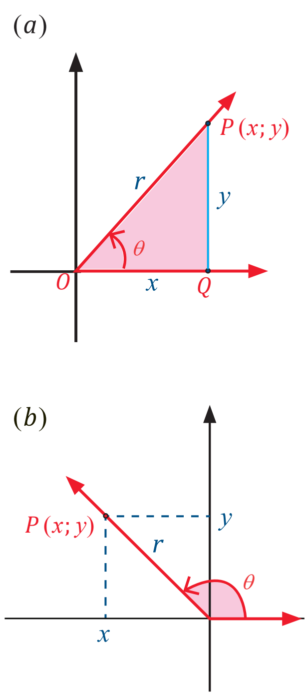


Figura 17

Sea θ un ángulo agudo como el de la figura $17(a)$. Escojamos un punto $P(x; y)$ en el lado terminal de θ y bajemos desde él un segmento $\overline{PQ}$, perpendicular al eje x.

Tomemos $r = d(O; P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces y es el lado opuesto al ángulo θ, x es el lado adyacente a este ángulo y r la hipotenusa del triángulo rectángulo OQP. En consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (1)$$

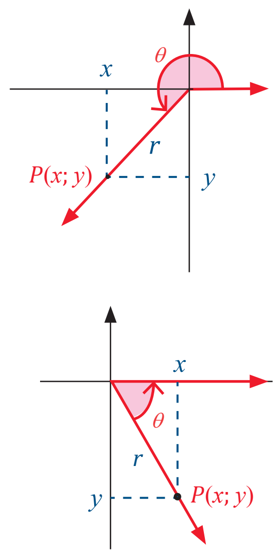


Figura 18

De manera análoga al caso anterior, se definen las funciones trigonométricas para un ángulo cuyo lado terminal está en cualquiera de los otros cuadrantes (figura $17\ (b)$ y 18). Observe que x o y pueden ser negativos, esto dependerá del cuadrante en que se encuentre el lado terminal del ángulo dado.

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x; y)$ cualquier punto en el lado terminal de θ y distinto de $(0; 0)$.

Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre $(0; 0)$ y $(x; y)$, entonces, se definen las siguientes funciones del ángulo θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad y \neq 0.$$

Observaciones

1) Se puede demostrar utilizando triángulos semejantes que las razones que se utilizaron en la definición anterior son independientes del punto que se escoja en el lado terminal de θ. Ellas dependen únicamente del ángulo θ.

2) Las identidades que se establecieron para funciones trigonométricas de ángulos agudos también son válidas para estas mismas funciones definidas sobre cualquier ángulo.

3) Como $P(x; y) \neq (0; 0)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ¿por qué? entonces el dominio de seno y coseno es el conjunto de todos los ángulos θ.

4) Las funciones tangente y secante se indefinen cuando $x = 0$, y ocurre si el lado terminal del ángulo θ está sobre el eje y. Entonces el dominio de la tangente y la secante es el conjunto de todos los ángulos θ, excepto los que miden

$$n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{o igualmente} \quad (2n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esto es, el dominio de estas dos funciones es el conjunto

$$\left\{\theta \,\middle|\, \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\} = \{\theta \mid \theta \neq (2n+1)90°,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

¡Importante!

Diremos que un ángulo, no cuadrantal, está en un cuadrante si su lado terminal está ubicado en ese cuadrante.

Ejemplo de algunos ángulos que no pertenecen al dominio de la tangente y la secante.

$$n=-2, \quad (2(-2)+1)\frac{\pi}{2}=(-4+1)\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2}$$

$$n=-1, \quad (2(-1)+1)\frac{\pi}{2}=(-2+1)\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$n=0, \quad (2(0)+1)\frac{\pi}{2}=(0+1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$n=1, \quad (2(1)+1)\frac{\pi}{2}=(2+1)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

$$n=2, \quad (2(2)+1)\frac{\pi}{2}=(4+1)\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}.$$

- Encuentre cuatro valores del ángulo θ, diferentes de los anteriores, para los cuales la función tangente no esté definida.

- ¿Están definidas las funciones secante y seno para los valores que encontró?

Recuerde

$$|x| \leq a$$
$$\Updownarrow$$
$$-a \leq x \leq a.$$

Por ejemplo,

$$\left|\frac{x}{r}\right| \leq 1$$
$$\Updownarrow$$
$$-1 \leq \frac{x}{r} \leq 1.$$

$$|x| \geq a$$
$$\Updownarrow$$
$$x \leq -a$$
o
$$x \geq a.$$

Ejemplo

$$|\sec\theta| \geq 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sec\theta \leq -1$$
o
$$\sec\theta \geq 1.$$

5) La función cosecante y cotangente no están definidas para ángulos cuyo lado terminal está sobre el eje x, porque en este caso $y=0$. Por tal razón, el dominio de estas funciones es el conjunto de todos los ángulos θ que no son múltiplos de π, esto es, de todos los ángulos diferentes de $n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Utilizando la notación conjuntista tenemos:

$$\{\theta|\theta \neq n\pi, \ n\in\mathbb{Z}\}=\{\theta|\theta \neq n\cdot 180°, \ n\in\mathbb{Z}\}.$$

- Encuentre cuatro valores del ángulo θ que no pertenezcan al dominio de las funciones cosecante y cotangente.

6) Como $r=\sqrt{x^2+y^2}$ se sigue que $|x|\leq r$ y $|y|\leq r$. ¿Por qué?

En forma equivalente $\left|\frac{x}{r}\right|\leq 1$ y $\left|\frac{y}{r}\right|\leq 1$. Entonces

$|\cos\theta|=\left|\frac{x}{r}\right|\leq 1$ y $|\operatorname{sen}\theta|=\left|\frac{y}{r}\right|\leq 1$, $|\csc\theta|\geq 1$ y $|\sec\theta|\geq 1$.

Ejemplo 2

Si el lado terminal de un ángulo θ que está en posición estándar pasa a través del punto $P(-3;1)$, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas de θ.

Solución

Haga un dibujo que muestre el ángulo θ en posición estándar y a $P(-3;1)$ en su lado terminal (figura 19).

Encuentre el valor de r.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}.$$

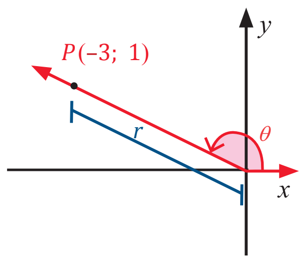


Figura 19

Luego,

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},\quad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{10}}{-3},\quad \cot\theta=\frac{x}{y}=-3.$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{-3},\quad \csc\theta=\frac{r}{y}=\sqrt{10},\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{\sqrt{10}}=\frac{-3\sqrt{10}}{10}.$$

En los resultados obtenidos, ¿hay algún número entero? ¿cuál es? ¿es $\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta$ un número primo?

Ejemplo 3

Si β está en el primer cuadrante (figura 20) y $\sec\beta=\frac{6}{5}$ encuentre el valor de las funciones trigonométricas restantes.

Solución

Como $\sec\beta=\frac{r}{x}=\frac{6}{5}$, entonces $r=6$ y $x=5$.

Encuentre y, utilizando la ecuación $x^2+y^2=r^2$.

$$5^2+y^2=6^2$$
$$y^2=36-25$$
$$y=\pm\sqrt{11}.$$

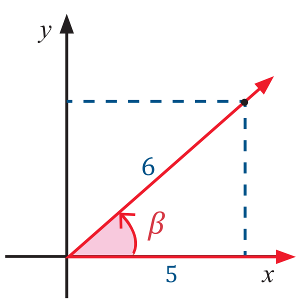


Figura 20

Tome la raíz positiva porque β está en el primer cuadrante.

Sabiendo que $x=5$, $y=\sqrt{11}$ y $r=6$ calculemos el valor de las restantes funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{11}}{6},\quad \cos\beta=\frac{x}{r}=\frac{5}{6}\quad \tan\beta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\csc\beta=\frac{r}{y}=\frac{6}{\sqrt{11}}=\frac{6\sqrt{11}}{11}\quad \sec\beta=\frac{r}{x}=\frac{6}{5}\quad \cot\beta=\frac{x}{y}=\frac{5}{\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

I. Clasifique los valores encontrados anteriormente en números racionales e irracionales.

II. Calcule $\operatorname{sen}\beta\cdot\csc\beta+\cot\beta\cdot\tan\beta$. ¿El resultado es un número natural? ¿varía el resultado si en lugar de β tomamos el ángulo $\beta+2n\pi,$ n un número natural?

III. ¿El resultado $\operatorname{sen}\beta\cdot\csc\beta+\cot\beta\cdot\tan\beta$ es distinto de $\operatorname{sen}\delta\cdot\csc\delta+\cot\delta\cdot\tan\delta$ para $\delta\neq\beta$?

Ejemplo 4

Si $\theta=\pi$, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas que están definidas para este ángulo.

Solución

En la figura 21 se muestra θ en posición estándar; observe que el lado terminal de θ coincide con el eje x negativo. Tome el punto $(-1;0)$ que está en el lado terminal de θ.

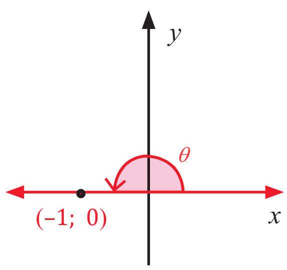


Figura 21

Tenemos entonces que $x=-1$, $y=0$. Por tanto $r=1$. Así

$$\operatorname{sen}\pi=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0 \qquad \cos\pi=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\tan\pi=\frac{y}{x}=\frac{0}{-1}=0 \qquad \sec\pi=-1.$$

La cotangente y la cosecante no están definidas en π. ¿Por qué?

Signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes

Si θ es un ángulo en posición estándar, su lado terminal tiene dos ubicaciones posibles:

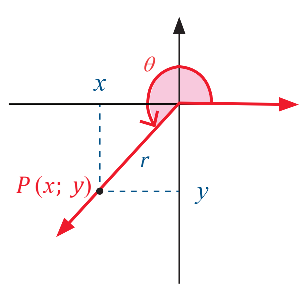


Figura 22

1. Estar sobre uno de los ejes coordenados, que ocurre cuando el ángulo es cuadrantal.

2. Estar en uno de los cuatro cuadrantes.

En el caso 1, los valores de x e y pueden ser positivos, negativos o cero. En el caso 2, los valores de x e y pueden ser positivos, negativos, pero nunca cero (figura 22).

Puesto que $r>0$ para cualquier θ, entonces el valor de cada una de las funciones trigonométricas depende solamente del signo de x, del signo de y y de la razón que define a la función. Como ilustración, supongamos que θ está en el cuadrante III. Las coordenadas de cualquier punto $P(x;y)$ en este cuadrante tienen a $x<0$ y $y<0$ (figura 22), luego el signo de las funciones trigonométricas lo determinamos de la siguiente manera:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} < 0, \quad \text{porque} \quad x < 0 \quad \text{y} \quad r > 0,$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} < 0, \quad \text{como} \quad y < 0 \quad \text{y} \quad r > 0,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} > 0, \quad \text{ya que} \quad y < 0 \quad \text{y} \quad x < 0.$$

Determine el signo de los valores de las otras funciones trigonométricas.

Observación

Los valores de dos funciones trigonométricas recíprocas siempre tienen el mismo signo. Por ejemplo, $\csc\theta$ será positiva, siempre que $\operatorname{sen}\theta$ sea positivo.

Complete la siguiente tabla que resume los signos de los valores de las seis funciones trigonométricas:

Cuadrante en que se encuentra el lado terminal de θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
I	+		+			+
II		−	−		−	
III	−			−	−	
IV		+		−		−

1. ¿En qué cuadrantes puede encontrarse el lado terminal de θ si $\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta > 0$?

2. Si $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ ¿Puede ser θ un ángulo cuadrantal? ¿puede ser θ un ángulo del cuadrante II?

3. Si θ está en el cuadrante III, ¿existe $\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$?

4. Si θ está en el cuadrante I, ¿es posible que $\tan\theta + \sec\theta = 0$?

5. ¿En qué cuadrante se encuentra θ, si $\csc\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$?

Ejemplo 5

Determine el valor de las cinco funciones trigonométricas restantes si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{5}$ y $\cos\theta > 0$.

Solución

Sustituyamos $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{5}$ en la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}.$$

Como $\cos\theta > 0$ tomamos la raíz cuadrada positiva

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Se sigue que:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{\sqrt{6}}{12} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5 \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{12}} = -2\sqrt{6}.$$

Ángulos de referencia

A continuación presentamos la forma de encontrar los valores de cualquier función trigonométrica para un ángulo arbitrario a partir de un ángulo cuyo valor está en el intervalo $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, o si el ángulo está dado en grados, en el intervalo $(0°;\ 90°)$. Para ello introduzcamos el siguiente concepto.

Sea θ un ángulo en posición normal, de manera que su lado terminal no esté sobre uno de los ejes coordenados. El ángulo de referencia θ' para θ, es el ángulo agudo positivo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

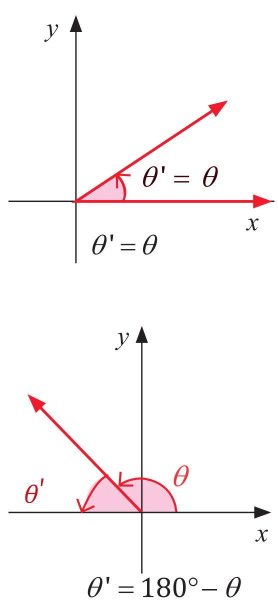


Figura 23

En la figura 23 de la columna de la izquierda se presenta un ángulo agudo y uno cuyo lado terminal esta en el segundo cuadrante y sus respectivos ángulos de referencia.

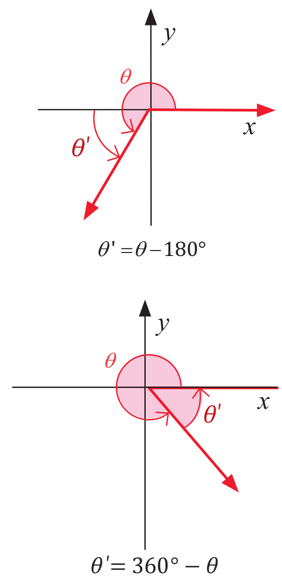


Figura 24

La figura 24 muestra ángulos de referencias θ' para $0 < \theta < 2\pi$ ó $0° < \theta < 360°$.

Observe que el ángulo de referencia es siempre un ángulo agudo por definición. Además, si $\theta < 90°$, éste coincide con su ángulo de referencia.

1. De ejemplo de 4 ángulos no cuadrantales uno en cada cuadrante; tome en cuenta la información que se da en las figuras 23 y 24 y calcule el ángulo de referencia de cada uno.

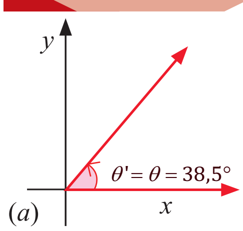
2. Haga una figura para los 4 ángulos que dio como ejemplo en el ejercicio anterior.

Ejemplo 6

3. Encuentre el ángulo de referencia para cada uno de los siguientes ángulos.

a) $\theta = 38{,}5°$ b) $\theta = 4{,}3$ rad c) $\theta = 300°$

d) $\theta = 2{,}75$ rad e) $\theta = -660°$ f) $\theta = 6{,}15$ rad.



Solución

Como muestra la figura $25\,(a)$ el ángulo $\theta = 38{,}5°$ está en en el primer cuadrante, siendo por tanto un ángulo agudo, luego $\theta' = \theta = 38{,}5$.

Observe que $\pi < 4{,}3 < \dfrac{3\pi}{2}$ lo que significa que θ está en el cuadrante III (fig. $25\,(b)$), luego:

$$\theta' = \theta - \pi = 4{,}3 - \pi \approx 1{,}1584\,.$$

$270° < 300° < 360°$, $\theta = 300°$ está en el cuadrante IV (figura 25 (c)), entonces:

$$\theta' = 360° - \theta = 360° - 300° = 60°.$$

La figura $26\,(a)$ muestra el ángulo $\theta = 2{,}75$, el cual está en el cuadrante II, porque $\dfrac{\pi}{2} < 2{,}75 < \pi$.

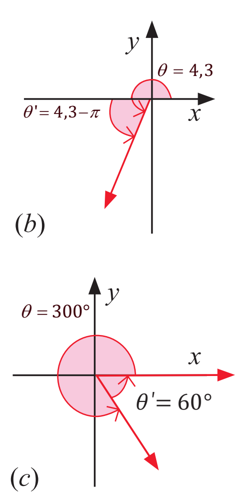


Figura 25

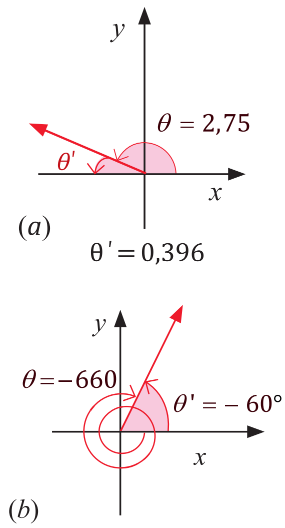


Figura 26

Por lo tanto el ángulo de referencia para θ es:

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - 2{,}75 \approx 0{,}3916.$$

En el caso del ángulo negativo $\theta = -660°$, primero trace el ángulo en posición normal (fig. 26 (b)). Seguidamente, encuentre el ángulo coterminal con θ, que esté entre $0°$ y $360°$.

El ángulo $-660° + 720° = 60°$, es coterminal con $\theta = -660°$, y se encuentra en el primer cuadrante. Por último encuentre el ángulo de referencia para $60°$; que como es agudo, coincide consigo mismo, esto es, $\theta' = 60°$.

Complete la solución del ejemplo anterior calculando el ángulo de referencia para $\theta = 6{,}15$ rad.

Los ángulos de referencia son de gran utilidad al evaluar funciones trigonométricas en un ángulo cualquiera porque:

El valor absoluto de cualquier función trigonométrica de un ángulo θ es igual al valor de esa función para el ángulo de referencia θ'.

¡Importante!

Si necesita calcular el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo θ mayor de $360°$ o menor que cero y quiere utilizar el ángulo de referencia de θ, primero determine un ángulo coterminal con θ.

A continuación describimos un procedimiento para determinar el valor de una función trigonométrica de cualquier ángulo θ utilizando su ángulo de referencia.

Paso 1. Encuentre el ángulo de referencia θ' para θ.

Paso 2. Determine el valor de la función trigonométrica para θ'.

Paso 3. Seleccione el signo algebraico correcto considerando el cuadrante en que está θ.

Ejemplo 7

Encuentre el valor de $\operatorname{sen} 145{,}7°$.

Solución

Paso 1. Como $\theta = 145{,}7°$ está en el segundo cuadrante el ángulo de referencia es:

$$\theta' = 180° - 145{,}7° = 34{,}3°.$$

Paso 2. Calculemos el valor $\operatorname{sen} \theta'$

$$\operatorname{sen} \theta' = \operatorname{sen} 34{,}3° = 0{,}5635.$$

Paso 3. Recuerde que en el segundo cuadrante, el valor $\operatorname{sen}\theta$ es positivo, por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 145{,}7° = \operatorname{sen} 34{,}3° = 0{,}5635.$$

- Utilice los pasos anteriores para encontrar $\cos 145{,}7°$, luego calcule $\tan 145{,}7° = \dfrac{\operatorname{sen} 145{,}7°}{\cos 145{,}7°}$.
- Encuentre los valores de las funciones recíprocas de seno, coseno y tangente utilizando el mismo ángulo del ejemplo anterior.
- Calcule $(\tan 145{,}7°)(\operatorname{sen} 145{,}7°)$, $(\cot 145{,}7°)(\cos 145{,}7°)$ $\operatorname{sen}^2 145{,}7° + \cos^2 145{,}7°$, $\csc^2 145{,}7° - \sec 145{,}7°$.
- Responda sin calcular a qué es igual: $(\tan^2 145{,}7°)(\csc 145{,}7°)$, $(\cot^2 145{,}7°)(\sec 145{,}7°)$, $\sec^2 145{,}7° - 1$, $1 + \cot 145{,}7°$.

Compruebe lo aprendido

1. Encuentre el ángulo de referencia para los siguientes ángulos. Haga un dibujo por cada inciso.

   a) $\alpha = 3{,}4°$ **b)** $\beta = 275°$ **c)** $\mu = -320°$ **d)** $\omega = 7{,}05°$

   e) $\tau = 7{,}05$ **f)** $\varphi = 2{,}73$ **g)** $\rho = \dfrac{3\pi}{2} + 1$ **h)** $\vartheta = \pi - 1$.

2. En los ejercicios de **a)** a **d)**, ubique el cuadrante en el que se encuentra el ángulo θ.

   a) $\cot\theta > 0$ y $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$

   b) $\cos\theta < 0$ y $0° < \theta < 180°$

   c) $\tan\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$

   d) $\csc\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$.

3. En los ejercicios de **a)** a **f)** halle el valor de las 6 fnciones trigonométricas de γ que está en posición normal y su lado terminal pasa a través del punto dado. Si algún valor no existe, explique la razón.

   a) $P(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ **b)** $P\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$ **c)** $P(0; 3)$

   d) $P\left(4{,}5; \dfrac{1}{2}\right)$ **e)** $P(-1{,}5; 1)$ **f)** $P(\sqrt{7}; 0)$.

4. Encuentre el valor de las otras funciones trigonométricas de θ si:

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$, $\quad \cos\theta < 0$

b) $\cot\theta = \frac{3}{4}$, $\quad \operatorname{sen}\theta < 0$

c) $\sec\theta = \frac{7}{5}$, $\quad 270° < \theta < 360°$

d) $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\quad \operatorname{sen}\theta > 0$.

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Encuentre dos valores de n tal que para el primero $\frac{\pi}{2} + n\pi$ sea cuadrantal y para el segundo los dos ángulos encontrados sean coterminales. Dibuje estos ángulos.

2. Sustituya 4 valores de n en la expresión $-47° + n36°$ de manera que los ángulos obtenidos estén en cuadrantes diferentes.

3. Exprese por comprensión el conjunto de todos los ángulos coterminales con:

a) $2\,015°$ b) $\frac{2\pi}{7}$ c) $-5\,063°$ d) $\frac{6\pi}{11}$ e) $1\,992°$.

4. El lado terminal de un ángulo en posición estándar pasa a través de uno de los puntos indicados abajo. Dibuje los ángulos correspondientes usando un transportador para aproximar su medida:

a) $(-3; 3)$ b) $(3; 3)$ c) $(3; -3)$

d) $(-1; \sqrt{2})$ e) $(1; \sqrt{2})$ f) $(1; -\sqrt{2})$.

5. Encuentre un ángulo α, $0° < \alpha < 90°$, para el cual 4α esté en el cuadrante indicado.

a) Cuadrante III
b) Cuadrante II
c) Cuadrante I
b) Cuadrante IV.

6. Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas para cada uno de los ángulos del ejercicio 4.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Recuerde, reflexione y concluya

- Dibuje en el plano cartesiano una circunferencia con centro en $(0;0)$ y radio $2,$ ubique un punto sobre ésta por ejemplo $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calcule el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo θ cuyo lado inicial es el eje x positivo y lado terminal el rayo que contiene el punto $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- Repita el ejercicio anterior pero en esta ocasión para una circunferencia de radio 1 y el punto $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- ¿En qué caso $(r=2,\ r=1)$ los cálculos anteriores resultaron más sencillos?¿son iguales los resultados para ambos casos?
- De ejemplo de 4 parejas que sean solución de la ecuación $x^2+y^2=1$. ¿A qué cuadrante pertenecen cada uno de ellas?

Recuerde

La ecuación de la circunferencia unitaria es

$$x^2+y^2=1.$$

Hasta el momento hemos considerado las funciones trigonométricas de ángulos medidos en grados y radianes pero en muchas aplicaciones de la trigonometría es necesario utilizar funciones trigonométricas cuyos dominios sean los números reales. La transición de ángulos a números reales se hace considerando la correspondencia que a cada número real t le asigna un ángulo de t radianes. Más exactamente, utilicemos una circunferencia unitaria y consideremos un ángulo de t radianes; como $r=1$, el ángulo de t radianes subtiende un arco de longitud t unidades en la circunferencia unitaria, en conclusión, tenemos que a cada número real t le podemos asignar el ángulo de t radianes (en posición normal) obtenido haciendo recorrer su lado terminal $|t|$ unidades a lo largo de la circunferencia unitaria en sentido anti horario si $t>0$ y en sentido horario si $t<0$ (figura 27).

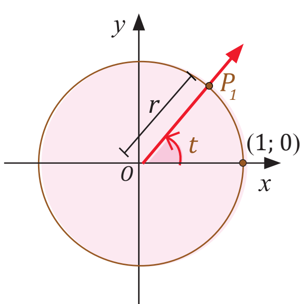


Figura 27

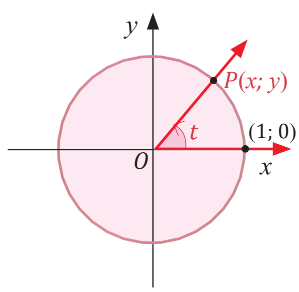
Esta asociación nos permite obtener la siguiente definición

> El valor de cada función trigonométrica para un número real t es su valor en un ángulo de t radianes, si ese valor existe.

Un ángulo central de 2 radianes en la circunferencia unitaria con centro en el origen del sistema coordenado subtiende un arco de longitud 2. Tomando en cuenta la definición anterior, $\cos 2 \text{ rad}$ es el coseno del número real 2, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ es seno del número real $\frac{\pi}{4}$, $\cos 4$ será entonces coseno del número real 4.

¿Cómo se interpreta $\tan 4{,}5$ y $\csc(-7{,}04)$?

La circunferencia unitaria será de gran utilidad para interpretar geométricamente las funciones trigonométricas.



$P(x;\ y) = P(\cos t;\ \operatorname{sen} t)$

Figura 28

Para cualquier número real t consideremos el ángulo de t radianes en posición estándar. Tomemos el punto $P(x; y)$ que está en la intersección del lado terminal del ángulo de t radianes y la circunferencia unitaria. Observe en la figura 28 que la distancia de P al origen es 1 porque coincide con el radio de la circunferencia.

Aplicando las definiciones, dadas anteriormente, de funciones trigonométricas de un ángulo, tenemos que:

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos t = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x.$$

Recuerde

Para denotar un punto con coordenadas x, y, escribiremos $P(x; y)$ o simplemente $(x; y)$.

Luego, las coordenadas de P son $(\cos t;\ \operatorname{sen} t)$, así

$$P(t) = P(x; y) = P(\cos t;\ \operatorname{sen} t).$$

A continuación presentamos la definición de todas las funciones trigonométricas para cualquier número real t:

Si t es un número real y $P(x; y)$ es el punto de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes (en posición normal) con la circunferencia unitaria, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad y \neq 0 \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad y \neq 0.$$

Consecuencias de las igualdades anteriores son las siguientes:

1. El dominio de la función seno y coseno es el conjunto de los números reales, puesto que $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ están definidas para cualquier número real.

2. El recorrido de la función seno y coseno es el intervalo de números reales $[-1;\ 1]$ ya que $-1 \leq \cos t \leq 1$ y $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ porque $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ son las coordenadas de puntos en el círculo unitario.

3. Utilizando **1.** y **2.** podemos escribir las funciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}:\ \mathbb{R} &\to [-1;1] \\ t &\to \operatorname{sen} t \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos:\ \mathbb{R} &\to [-1;1] \\ t &\to \cos t \end{aligned}$$

- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las otras funciones trigonométricas? Sugerencia: en el dominio y recorrido para funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ, cambie el ángulo θ por t, número real.

- Desde el punto de vista geométrico ¿cómo se interpreta $(\cos 5;\ \operatorname{sen} 5)$? ¿qué diferencia hay entre $(\cos 5;\ \operatorname{sen} 5)$ y $P(\cos 5;\ \operatorname{sen} 5\ )$?

Ejemplo 1

Si t es un número real y $P(t)=\left(\frac{1}{3};\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas de t.

Solución

Como $P(t)=\left(\frac{1}{3};-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $\quad x=\frac{1}{3}$, $\quad y=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Utilizando las definiciones de funciones trigonométricas tenemos:

$$\operatorname{sen} t=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \cos t=\frac{1}{3} \qquad \tan t=\frac{\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$$

$$\csc t=-\frac{3}{2\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad \sec t=3 \qquad \cot t=\frac{1}{-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ejemplo 2

Encuentre $\csc t$ si $\cos t = \frac{2}{3}$.

Solución

Sabemos que $y = \operatorname{sen} t$ y $x = \cos t = \frac{2}{3}$, por lo tanto $\left(\frac{2}{3}; y\right)$ es un punto en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Luego

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{4}{9} + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Por consiguiente, $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Hay dos posibles valores para y, para cada uno de ellos encontremos $\csc t$.

Para $y = \frac{\sqrt{5}}{3}$,	$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.
En el caso de $y = -\frac{\sqrt{5}}{3}$,	$\csc t = \frac{1}{y} = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Encuentre los valores de las otras funciones trigonométricas.

Ejemplo 3

Sea P un punto sobre la circunferencia unitaria que corresponde al número real t. Halle los valores de las funciones trigonométricas para $t = -\frac{5\pi}{4}$ si existen.

Solución

Como t es negativo, para determinar en qué cuadrante está el punto, efectuamos un giro de $|t| = \left|-\frac{5\pi}{4}\right| = \frac{5\pi}{4}$ en sentido horario (figura 29).

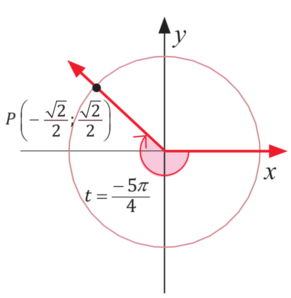


Figura 29

El punto que corresponde a t está en el cuadrante II y es común a la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y a la recta $y = -x$ ¿Por qué? Las coordenadas de este punto pueden encontrarse de la siguiente manera.

Sustituyamos $y = -x$ en $x^2 + y^2 = 1$, así obtenemos

$$x^2 + (-x)^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tomemos $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, porque el punto está en el cuadrante II. El valor de y lo encontramos sustituyendo el valor encontrado para x en $x^2 + y^2 = 1$.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{2} + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

y debe ser positiva porque $P(x;\ y)$ está en el cuadrante II, así P es $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Los valores de las funciones trigonométricas para $t = \frac{-5\pi}{4}$ son:

$$sen\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1,$$

$$csc\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\qquad sec\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -1.$$

- En el ejemplo anterior, ¿hay otra forma más fácil de encontrar y? Si es así, utilícela para encontrar y. Compare los dos resultados.

- Resuelva cada uno de los ejercicios sin utilizar calculadora.

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **b)** $\sec\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

c) $\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **c)** $-\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \csc\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Utilice los valores encontrados anteriormente para verificar que:

1. $\operatorname{sen}^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)+\cos^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=1$

2. $\csc\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=1$

3. $1+\tan^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\sec^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$

4. $1+\cot^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\csc^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$

5. $\operatorname{sen}^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)-\cos^2\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\neq 1$

6. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\neq 1$

7. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

8. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Funciones periódicas pares e impares

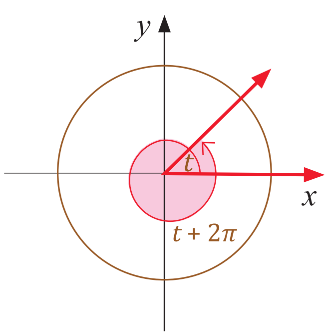


Figura 30

En la figura 30 se muestra que para el número real t, los ángulos de t radianes y $t+2\pi$ radianes son coterminales, lo que implica que t y $t+2\pi$ determinan el mismo punto $P(x;y)$ en la circunferencia unitaria. Por lo tanto:

$\cos t=\cos(t+2\pi)$ y $\operatorname{sen} t=\operatorname{sen}(t+2\pi)$.

En general, se cumple que t y $t+2n\pi$ (n un entero positivo) son ángulos coterminales, luego

$\cos t=\cos(t+2n\pi)$ y $\operatorname{sen} t=\operatorname{sen}(t+2n\pi)$.

En otras palabras, cada 2π unidades los valores de las funciones seno y coseno se repiten. Decimos entonces que estas funciones son periódicas.

En general, el concepto es el siguiente

Una **función** f es **periódica** si existe un número real $p > 0$, tal que para todo elemento t del dominio de f,

$$f(t+p) = f(t).$$

El menor número real positivo p, que hace verdadera la ecuación anterior se llama **período** de f.

Apliquemos la definición anterior y el hecho que $\cos t = \cos(t + 2\pi)$ para afirmar que el coseno es una función periódica de período 2π.

Observe que solo hay un punto P en la circunferencia unitaria con $x = 1$, este punto es $P(1;\, 0)$, luego $\cos t = 1$ solamente para $t = 0$, 2π, 4π, etc. Así el menor número real positivo p para el cual $\cos t = \cos(t + p)$ es 2π. En conclusión coseno es una función periódica de período 2π. Un razonamiento similar muestra que seno es una función periódica de período igual a 2π.

- Verifique, por analogía con el caso de coseno, que la función seno es periódica de período 2π.

- Si $t \in \mathbb{R}$ y $P(t) = \left(-\frac{4}{5};\, -\frac{3}{5}\right)$,

  1. ¿Cuál es el valor de $\operatorname{sen} t$, $\cos t$ y $\operatorname{sen}(t + 2\pi)$?
  2. ¿Es $\cos(t + 2\pi) = \cos(t + 2\,016\pi)$? ¿Por qué?
  3. ¿Para qué valores de t, $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \cos(t + 6\pi)$?

- Determine las coordenadas del punto $P\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ ubicado en la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Encuentre $t' \in \mathbb{R}$, $0 < t' < 2\pi$, tal que $P(t') = P\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$.

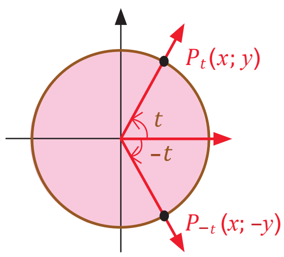
Ejemplo 4

Dado $P(t)$ un punto en la circunferencia unitaria con coordenadas $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. ¿Cuáles son las coordenadas de $P(-t)$? ¿Cuáles son los valores de *sen*$(-t)$ y *cos* $(-t)$?

Solución

Es fácil ver que y $\cos(-t) = \cos t = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

En la figura 31 se ubicaron dos puntos en la circunferencia unitaria, $P_t(x; y)$ y $P_{-t}(x; -y)$, que corresponden a t y $-t$, respectivamente. Estos puntos son simétricos con respecto al eje x, ya que tienen coordenadas x iguales y coordenadas y opuestas.



$P_t(x; y) = (\cos t; \operatorname{sen} t)$
$P_{-t}(x; -y) = (\cos(-t); \operatorname{sen}(-t))$

Figura 31

Luego tenemos

$$\cos(-t) = \cos t = x \quad \text{y} \quad \sec(-t) = \frac{1}{\cos(-t)} = \frac{1}{\cos(t)} = \sec t.$$

En general,

Una función f es par si cumple que:

$$f(t) = f(-t)$$

para todo t en el dominio de f,

y f es impar si:

$$f(-t) = -f(t)$$

para todo t en el dominio de f.

¡Importante!

- Una función es simétrica respecto al eje y si es par.
- Una función es simétrica respecto al origen si es impar.

Para las funciones trigonométricas se cumple

- El coseno y la secante son funciones pares, esto es:

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{y} \quad \sec(-t) = \sec t.$$

- El seno, la tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, lo cual significa que:

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t,$$
$$\tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t,$$
$$\cot(-t) = -\cot t.$$

Utilice la figura 31 para verificar que la tangente, cotangente y cosecante son funciones impares.

Ejemplo 5

Si f y g son funciones definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$, pruebe que la función h definida por $h(x) = x^2 \cos x$ es también par.

Solución

Por ser f y g pares se cumple:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$
$$g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x).$$

Recuerde

$$(-x)^2 = (-x)(-x)$$
$$= x^2.$$

Por ejemplo,

$$(-2)^2 = (-2)(-2)$$
$$= 4$$
$$= 2^2.$$

Si h es par, debe suceder que $h(-x)$ y $h(x)$ sean iguales, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Efectivamente

$$h(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = h(x),$$

de donde h es una función par.

- $h(\pi) = \pi^2 \cos \pi = \pi^2(-1) = -\pi^2$. ¿A qué es igual $h(-\pi)$? ¿por qué?

¡Cuidado!

$$(-x)^2 \neq -x^2$$

Por ejemplo,

$$(-2)^2 = 4$$

y

$$-(2)^2 = -4.$$

En general, si f y g son funciones pares, la función h definida por $h(x) = f(x)\,g(x)$ es par. Este resultado es de fácil verificación, así,

$$\boxed{h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = h(x).}$$

- Sea h la función anterior y suponga que $h(-x) = b$, $b \in \mathbb{R}$.
  1. ¿Cuál es el valor de $h(x)$ y $h(-(-x))$?
  2. Calcule $2h(x) + h(-(-x))$. ¿El resultado obtenido es solución de la ecuación $bx - 3b^2 = 0$? ¿Es 5 solución de $bx - 3b^2 = 0$ si $b = 0$?

Compruebe lo aprendido

1. Dé, si es posible, el cuadrante en el que se encuentra cada ángulo.

   a) $-63°$ b) $530°$ c) 7π

   d) -11π e) $-630°$ f) $315°$.

2. ¿Cuáles de los ángulos anteriores son cuadrantales?

3. Encuentre dos ángulos, uno positivo y otro negativo que sean coterminales con el ángulo dado.

a) $48°$ **b)** $485°$ **c)** $322°$

d) $536°$ **e)** $-\frac{\pi}{2}$ **f)** 6π.

4. Dibuje en posición estándar cada ángulo descrito y encuentre su medida:

a) $\frac{1}{5}$ en sentido de la rotación de las manecillas del reloj.

b) $2\frac{1}{4}$ en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj.

c) $\frac{5}{8}$ en sentido horario.

d) $3\frac{1}{7}$ en sentido anti horario.

5. Escriba cada expresión como una función de un ángulo agudo:

a) $\cos(-214{,}3°)$ **b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{9}\right)$

c) $\operatorname{sen}(318°\,30')$ **d)** $\csc(115{,}17°)$.

6. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado, utilizando un ángulo de referencia.

a) $\frac{8\pi}{3}$ **b)** $-60°$ **c)** $\frac{5\pi}{3}$.

7. Verifique en el ángulo θ dado, la paridad (ser par o impar) de cada una de las seis funciones trigonométricas estudiadas.

a) $\theta = 343°$ **b)** $\theta = -402°$

a) $\theta = \frac{\pi}{11}$ **a)** $\theta = -\frac{5\pi}{6}$.

¡Importante!

Una **función** f es **creciente** en un intervalo $[a, b]$ si al tomar dos puntos cualesquiera del mismo, x_1 y x_2, con la condición $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es decreciente es un intervalo si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo, con la condición $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Recuerde

Una **función** $f\colon A \to B$ es **inyectiva**

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq (x_2)$$

y

f es **sobreyectiva** si $\forall\, y \in B,\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Gráfica de las Funciones Trigonométricas

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué técnicas conoce para trazar la gráfica de una función f con ley de asignación $y=f(x)$?

2. Utilice una de estas técnicas para graficar $f(x) = y = 2x$. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función? ¿qué características tiene?

3. ¿Es f una función inyectiva? ¿es sobreyectiva? ¿es inyectiva toda función lineal?

4. Dé ejemplo de una función no inyectiva.

5. ¿Son no sobreyectivas algunas funciones constantes? Dé ejemplo de una función constante sobreyectiva.

6. ¿Hay alguna función constante inyectiva?¿Cuál?

7. Dé ejemplo de una función constante biyectiva. ¿Cuál es la inversa de esa función constante?

8. ¿La función f definida por $f(x) = -2x$ es creciente o decreciente? ¿Por qué?

9. ¿Qué condición debe cumplir a para que la función f, cuya ley de asignación es $f(x)=ax$, sea creciente?

10. Grafique $f(x) = -x^2$. Determine dominio y recorrido de f ¿Cuál es el valor máximo de esta función?

11. ¿La función f con ley de asignación $f(x)=x^2$ tiene un valor mínimo? ¿Cuál es? ¿en qué intervalo f es creciente? ¿en qué intervalo es decreciente?

A continuación obtengamos las gráficas de las funciones trigonométricas, las cuales nos serán de gran utilidad para la mejor comprensión de éstas. Utilicemos para ello la información que tenemos, por ejemplo, sus períodos y recorridos.

Recuerde

Una **función** que es inyectiva y sobreyectiva se llama **biyectiva**.

Recuerde

Una **función** $f\colon A \rightarrow B$ es llamada **constante** si cumple

$$f(x)=C,\ \forall x \in A.$$

¡Importante!

Sea $f\colon A \rightarrow B$ una función biyectiva. La inversa de f es la función que se denota por f^{-1}, y que cumple

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$$
$$\forall x \in B$$
y
$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$
$$\forall x \in A.$$

Como vamos a dibujarlas en el plano xy, haremos un cambio de variable, en lugar de $f(t) = \operatorname{sen} t$ escribamos $f(x) = y = \operatorname{sen} x$; donde x es la variable independiente e y la variable dependiente.

Recuerde que para trazar la gráfica de una función cuya ley de asignación es $y = f(x)$ son útiles los siguientes pasos:

1. Construir una tabla de valores para x e y.

2. Marcar los pares ordenados $(x; y)$, obtenidos en **1.**, en el plano cartesiano xy.

3. Unir con una curva los puntos marcados.

Además de utilizar los tres pasos anteriores es importante considerar los parámetros que aparecen en la ecuación que representa a la función, porque nos dan una información valiosa acerca de las propiedades de ésta y por ende de su gráfica.

Recuerde

Las funciones

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

definidas por

$f(x) = ax + b$

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

y

$g(x) = ax^3 + c$

$a, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$

son biyectivas y por lo tanto tienen inversa.

Gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$

Empecemos con las gráficas de las funciones seno y coseno con las leyes de asignación $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ respectivamente. Es necesario que usted se familiarice con estas dos gráficas de modo que pueda dibujarlas rápidamente, lo cual ayudará, primero, a recordar las propiedades de la función seno y coseno, y segundo, a trazar las gráficas de otras funciones trigonométricas.

Recuerde

Si $f: D \to V$ es una función en la expresión $f(x) = y$

x se denomina argumento de la función o variable independiente y y es la variable dependiente.

Como la función seno tiene período 2π, comencemos haciendo un bosquejo de su gráfica en el intervalo $[0; 2\pi]$. Consideremos varias posiciones del punto P, en la circunferencia unitaria.

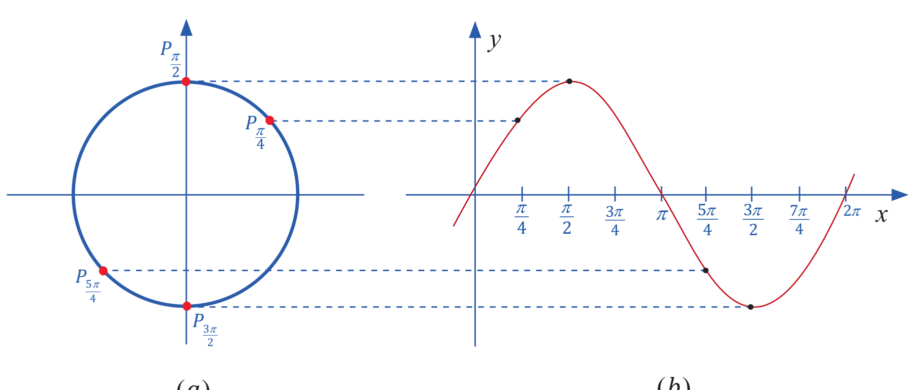


Figura 32

x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}7$
2π	0

Observe que a medida que x varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor de $y = \operatorname{sen} x$ pasa de 0 a su valor máximo 1. Denotemos esta variación por $0 \to 1$. Pero si x varía de $\frac{\pi}{2}$, a $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} \to \frac{3\pi}{2}\right)$, $\operatorname{sen} x$ disminuye de 1 a su valor mínimo -1. En la notación acordada $1 \to -1$. Cuando x toma valores entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, podemos observar en la figura 32 que los valores de $\operatorname{sen} x$ aumentan de -1 a 0.

De manera análoga se analiza el comportamiento de la función coseno.

Haga un bosquejo de la gráfica de la función coseno en el intervalo $[0;\, 2\pi]$, considerando para ello varias posiciones del punto P en la circunferencia unitaria y luego analice su comportamiento en este intervalo.

Así, del análisis anterior obtenemos la tabla de abajo que muestra el comportamiento de la función seno y coseno para valores que van de 0 a 2π.

En resumen tenemos:

x	$(\cos x;\ \operatorname{sen} x)$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$(1;0) \to (0;1)$	$1 \to 0$	$0 \to 1$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$(0;1) \to (-1;0)$	$0 \to -1$	$1 \to 0$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$(-1;0) \to (0;-1)$	$-1 \to 0$	$0 \to -1$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$(0;-1) \to (1;0)$	$0 \to 1$	$-1 \to 0$

Características de la función f definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-1;\, 1]$

Período: 2π

Simetría: respecto al origen, porque es una función impar.

Intersecciones en x: $x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Intersección en y: $y = 0$.

También podemos obtener la gráfica del seno utilizando para ello los valores que aparecen en la tabla de la izquierda, ubiquemos estos puntos en el plano xy y unámoslos con una curva uniforme (figura 32). Como la función seno tiene período 2π, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, lo que significa que la gráfica de $y = \operatorname{sen}\, x$ para $-2\pi \le x \le 0$ es la misma que para $0 \le x \le 2\pi$. Utilizando la periodicidad del seno, extendemos la gráfica a la izquierda 2π unidades (figura 33).

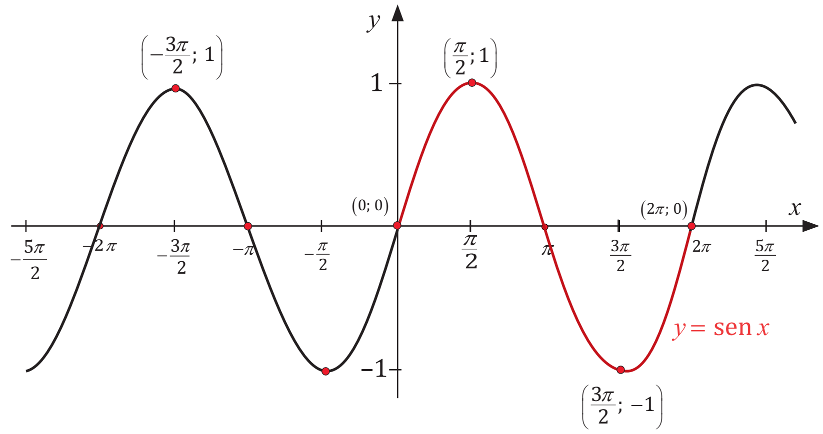


Figura 33

Recuerde que la función seno es impar, ya que

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x).$$

Dé ejemplo de 4 parejas $(x; y) \in f$ tal que $(-x; -y) \in f$ por ejemplo, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right) \in f$ y $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \in f$.

Observación

Una gráfica es simétrica respecto al origen si cada vez que $(x; y)$ es un punto de la gráfica, $(-x; -y)$ es también un punto de la gráfica. En consecuencia, una función impar es simétrica respecto al origen. En particular, la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es simétrica respecto al origen.

Un resumen de las características de la función seno aparece en el margen izquierdo de la página anterior.

I. Utilice la observación anterior para responder.

1. Considerando la simetría de f ¿qué otros puntos pertenecen a la gráfica de seno si $(-2\pi; 0)$ y $(-\pi; 0)$ pertenecen a ésta?

2. Considere $0 \le x \le 2\pi$ y determine en qué intervalos la función seno es creciente y en qué intervalos es decreciente.

3. ¿Es el seno una función inyectiva? ¿es biyectiva? ¿tiene inversa?

¡Importante!

Entenderemos como una onda cosenoidal o senoidal a la gráfica de la función coseno o seno que corresponde a $0 \le x \le 2\pi$.

x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

A continuación presentamos la gráfica de la función dada por $y = \cos x$ para $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right) \in f$ y $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \in f$. Para obtenerla utilizamos la tabla de valores que aparece a la izquierda y el hecho que coseno tiene período 2π (figura 34).

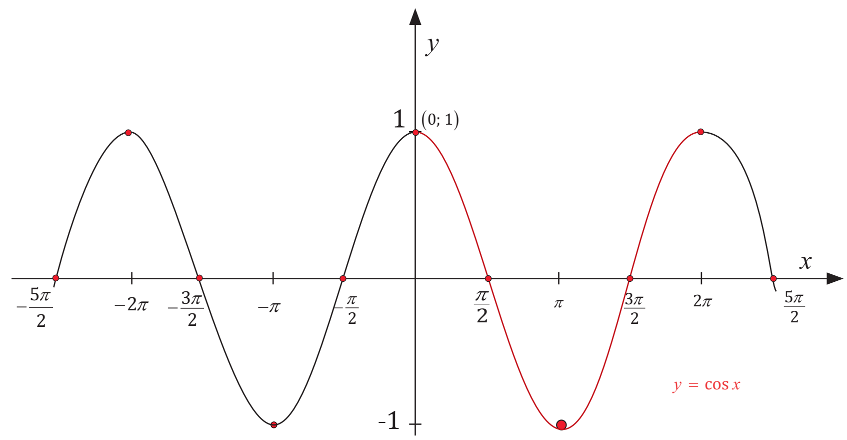


Figura 34

Características de

$f(x) = \cos x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-1; 1]$

Período: 2π

Simetría: respecto al eje y

Intersecciones en

x: $x = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Intersección en

y: $y = 1$.

II. A partir de la gráfica del coseno encuentre:

a) Los valores de x en $[-2\pi; 2\pi]$ para los cuales $\cos x = 0$.

b) Intervalos donde coseno es creciente o decreciente.

c) $\cos(-\pi)$, $\cos(-2\pi)$.

d) Utilice los resultados del inciso **c)** y encuentre $\cos(\pi)$, $\cos(2\pi)$. Recuerde que el coseno es par.

III. Si $\cos 4\pi = 1$ y $\cos(-3\pi) = -1$ ¿cuál es el valor de $\cos(-4\pi)$, $\cos(3\pi)$, $(\cos 4\pi - \cos(-4\pi))\cos(-3\pi)$, $\cos(3\pi) + 3\cos(-3\pi) -2$, $[-\cos(-3\pi) + \cos 4\pi]\cos(-4\pi)$.

IV. ¿Para qué otros valores de x en el intervalo $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ la función coseno tiene el mismo valor que para $x = \pi$?

V. Examine la gráfica de la función coseno en $[0; 2\pi]$. ¿Para qué valor de x en este intervalo la función coseno alcanza su valor máximo y mínimo? ¿Dónde ocurren los ceros del coseno?

VI. Investigue si el coseno es una función inyectiva o biyectiva.

VII. ¿Tiene inversa la función coseno?

Gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x + c$, $f(x) = \cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1

Grafiquemos en un mismo sistema de coordenadas xy, $f(x) = y = \operatorname{sen} x$, $g(x) = y = \operatorname{sen} x + 2$ y $h(x) = y = \operatorname{sen} x - 2$.

Solución

Paso 1. Construyamos una tabla de valores para las tres ecuaciones.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \operatorname{sen} x$	0	1	0	−1	0
$y = \operatorname{sen} x + 2$	2	3	2	1	2
$y = \operatorname{sen} x - 2$	−2	−1	−2	−3	−2

Paso 2. Ubiquemos en el plano cartesiano los pares ordenados obtenidos.

Paso 3. Unamos los puntos por medio de una curva suave y obtengamos las siguientes curvas.

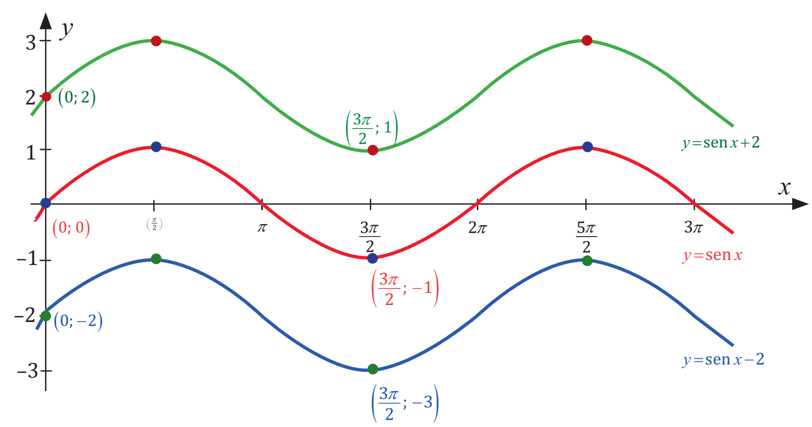


Figura 35

Compare las gráficas que aparecen en la figura 35 y observe que tienen la misma forma. La gráfica de $y = \operatorname{sen} x + 2$ solo difiere de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ por un desplazamiento vertical de dos unidades hacia arriba. Algo similar ocurre con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x - 2$, solamente que en este caso el desplazamiento vertical es de dos unidades hacia abajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

Calcule: $(f(-2\pi) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - h(0)$, $g(0) - h(\pi)$,

$$\frac{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{h(2\pi)},\ [g(2\pi)]^2 - \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2.$$

Características de

$f(x) = \operatorname{sen} x + 2$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[1; 3]$

Período: 2π

Intersecciones en x **: no tiene**

Intersección en y: 2.

¡Importante!

En la mayoría de las gráficas de las funciones seno y coseno limitamos nuestra atención al intervalo $0 \le x \le 2\pi$ considerando que ellas son de período 2π.

Características de

$f(x) = \operatorname{sen} x + c$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido:

$[-1 + c; 1 + c]$

Período: 2π

Intersección con y: $y = c$

Características de la función definida por

$y = \cos x + c$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido:

$[-1 + c; 1 + c]$

Período: 2π

Intersección con y: $y = c + 1$

En general:

Si f es una función y c es un número real positivo, entonces la gráfica de la función $f(x) + c$ y $f(x) - c$ puede obtenerse de la gráfica de f por medio de una traslación vertical de c unidades hacia arriba y c unidades hacia abajo, respectivamente.

Como la gráfica de $y = f(x) + c$ (si $c > 0$) es una traslación de la gráfica de $y = f(x)$, c unidades en forma vertical hacia arriba, la ordenada de cada punto aumenta en c unidades, luego el recorrido de $y = \operatorname{sen} x + c$ es el intervalo $[-1 + c; 1 + c]$. De aquí que su valor máximo es $1 + c$ y su valor mínimo $-1 + c$. ¿Qué ocurre en el caso cuando $c < 0$?

Para el caso particular $y = \operatorname{sen} x + 2$, el recorrido es

$$[-1 + 2;\ 1 + 2] = [1; 3].$$

1. Determine para la función definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - 2$, dominio, recorrido, intersección de su gráfica con el eje y, período, valor máximo y valor mínimo en el intervalo $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Grafique, por analogía con el ejemplo 1, en un mismo plano xy, $f(x) = \cos x$, $h(x) = \cos x + 2$ y $g(x) = \cos x - 2$. Haga una tabla de valores para las tres ecuaciones, luego ubique los pares ordenados de la tabla en el plano xy y únalos con una curva suave.

3. Utilice las características que aparecen a la izquierda y encuentre dominio y recorrido de h y g, intersecto de la gráfica de f y g con el eje y.

4. Calcule: $(f(-2\pi) + g(\frac{\pi}{2})^2 - h(0)$, $g(0) - h(\pi)$,

$$\frac{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{h(2\pi)},\ [g(2\pi)]^2 - \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2.$$

Gráfica de $y = a\,\text{sen}\,x$, $y = a\cos x$, $a \in \mathbb{R}^*$

Ejemplo 2

Grafique $f(x) = \text{sen}\,x$, $g(x) = 2\,\text{sen}\,x$ y $h(x) = -2\,\text{sen}\,x$.

Solución

Obtenga una tabla de valores para $g(x) = 2\,\text{sen}\,x$, duplicando cada coordenada y de los puntos de la gráfica de $f(x) = \text{sen}\,x$, tal como se muestra en la siguiente tabla:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}\,x$	0	1	0	-1	0
$y = 2\,\text{sen}\,x$	0	2	0	-2	0

Ubique los puntos encontrados en el plano xy y únalos con una curva suave como la que aparece en la figura 36.

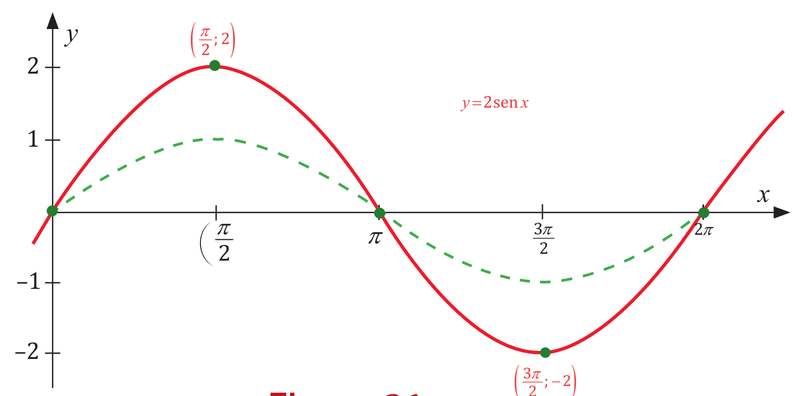


Figura 36

Note que el valor máximo (2) y mínimo (-2) de esta función en $[0; 2\pi]$ ocurre en $\frac{\pi}{2}$, y $\frac{3\pi}{2}$ respectivamente, los mismos valores en donde ocurren el máximo (1) y el mínimo (-1) de $f(x) = \text{sen}\,x$.

- Utilice las características de $f(x) = y = a\,\text{sen}\,x$ para determinar dominio, recorrido y período de $h(x) = 3\,\text{sen}\,x$. ¿Qué características en común tienen la función seno y h? ¿cuál es una característica no común?

Obtengamos la gráfica de $h(x) = -2\,\text{sen}\,x$ como una reflexión en el eje x, de la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,x$, esto es volteando la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,x$, alrededor del eje x.

Características de la función $f(x) = a\,\text{sen}\,x$, $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-|a|; |a|]$

Período: 2π

Simetría: respecto al origen

Intersecciones en x: $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Intersección en y: 0.

¡Importante!

En general, la gráfica de $y = af(x)$, $a > 1$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ realizando un alargamiento vertical de a unidades.

En particular la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,x$ se obtiene de la gráfica de $y = \text{sen}\,x$ realizándole un alargamiento vertical de 2 unidades.

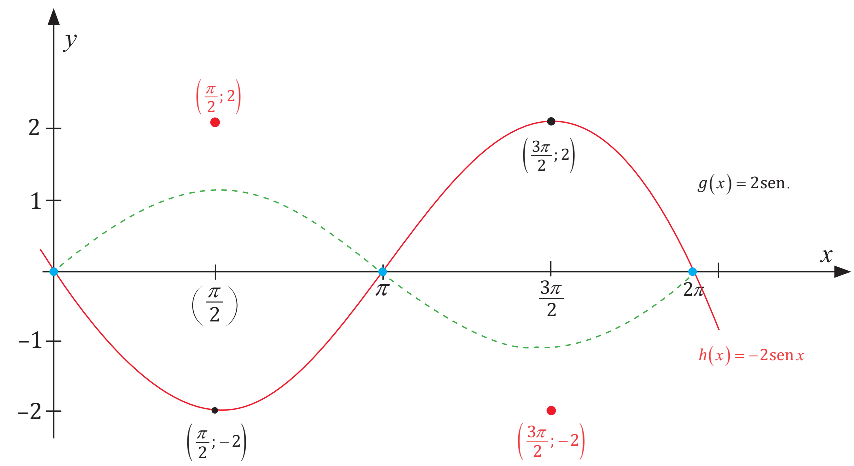


Figura 37

¡Importante!

La gráfica de $y=-a\,f(x)$, es una reflexión de la gráfica de $y=a\,f(x)$ a través del eje x. En palabras sencillas, para graficar $y=-a\,f(x)$ se voltea la gráfica de $y=a\,f(x)$.

Observe en la gráfica anterior, que el valor mínimo (-2) de h ocurre en $\frac{\pi}{2}$, que es precisamente donde ocurre el máximo (2) de g. Una situación análoga ocurre con el valor máximo (2) de esta función que ocurre en $\frac{3\pi}{2}$, allí g tiene su valor mínimo (-2). En otras palabras, si los puntos $\left(\frac{\pi}{2};2\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2};-2\right)$ pertenecen a la gráfica de $g(x)=2\operatorname{sen}x$, luego, $\left(\frac{\pi}{2};-2\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2};2\right)$ están en la gráfica de $h(x)=-2\operatorname{sen}x$.

En general, si $(x;\,y)$ es un punto de la gráfica de $y=a\,f(x)$ $(x;\,-y)$ es un punto de la gráfica de $y=-a\,f(x)$.

El valor máximo y mínimo de $y=a\cos x$ para $a>0$ en el intervalo $[0;\,2\pi]$ se alcanza en $x=0$ y $x=\pi$, respectivamente. En cambio, si $a<0$, el valor máximo y mínimo ocurren en $x=\pi$ y $x=0$, respectivamente.

1. Utilice un procedimiento similar al del ejemplo 2 para obtener la gráfica de $h(x)=2\cos t$ y $g(x)=-2\cos t$.

2. Haga una tabla que resuma las características de h y g.

3. ¿Qué características tienen en común h y g con las funciones del ejemplo 2? ¿Cuáles son distintas?

En general, las gráficas de $y = a\,\text{sen}\,x$ y $y = a\cos x$ pueden obtenerse multiplicando la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = \text{sen}\,x$ y de $y = \cos x$, respectivamente, por el número a y luego uniendos por una curva suave los puntos obtenidos.

Al número real $|a|$ se le llama **amplitud** de la gráfica de $y = a\,\text{sen}\,x$ y $y = a\cos x$.

Ejemplo 3

Determine valores máximos, mínimos, amplitudes, dominios y recorridos de las funciones f y g cuya ley de asignación es respectivamente, $f(x) = y = \frac{1}{2}\cos x$ y $g(x) = y = -\frac{1}{2}\cos x$, luego, grafíquelas en un mismo sistema de coordenadas xy.

Solución

El dominio de las funciones f y g es $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. Las funciones dadas tienen la misma amplitud, esto es, $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Tomando en cuenta que en el intervalo $[0; 2\pi]$ la función coseno alcanza su máximo en $x = 0$ y su mínimo en $x = \pi$, tenemos que

$$f(0) = \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad f(\pi) = \frac{1}{2}\cos\pi = -\frac{1}{2}.$$

Observe que el valor máximo y mínimo de f es $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, respectivamente.

Para g el valor mínimo en $[0; 2\pi)$ es $-\frac{1}{2}$ y lo alcanza en $x = 0$ y el valor máximo $\frac{1}{2}$ que lo alcanza en $x = \pi$ y se obtienen de la siguiente manera:

$$g(0) = -\frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2} \text{ y } g(\pi) = -\frac{1}{2}\cos\pi = -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}.$$

Utilicemos la siguiente tabla de la siguiente página para trazar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ y $g(x) = -\frac{1}{2}\cos x$.

Características de la función definida por $y = a\cos x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $\left[-|a|; |a|\right]$

Período: 2π

Símetria: respecto al eje y

Intersecciones en x: $x = n\frac{\pi}{2}$

Intersección en y: $y = a$.

Amplitud: $|a|$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=\frac{1}{2}\cos x$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(x)=-\frac{1}{2}\cos x$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Así, la gráfica de f y g es la siguiente:

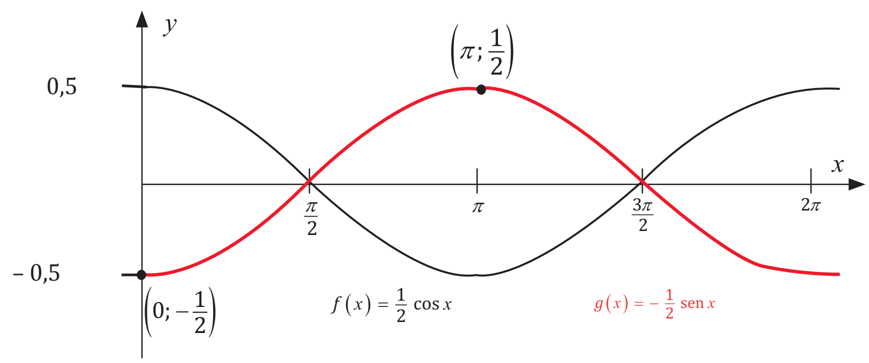


Figura 38

En la gráfica anterior, podemos observar que el recorrido de ambas funciones es el intervalo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

¡Importante!

La gráfica de $y=f(b\,x)$ con $|b|>1,\ b\neq 0$ es una compresión de la gráfica de $y=f(x)$ en sentido horizontal en b unidades. Y si $0<|b|<1$ la gráfica de

$$y=f(bx)$$

se obtiene por elongación (alargamiento) en sentido horizontal b unidades de la gráfica de $y=f(x)$.

Gráfica de $f(x)=\operatorname{sen} bx$, y $g(x)=\cos bx$, $b\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$

La gráfica de estas funciones tiene una amplitud de 1, porque $a=1$.

Si $|b|>1$, la gráfica de $y=\operatorname{sen} bx$ es una compresión horizontal por un factor b de la gráfica de f. Si $0<|b|<1$ la gráfica de $y=\operatorname{sen} bx$ es una elongación horizontal por un factor b de la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen} x$. En los dos casos, el período no es 2π sino $\frac{2\pi}{|b|}$.

Todo lo discutido anteriormente es válido para la gráfica de $y=\cos bx$.

Utilizando el hecho de que seno y coseno tienen período 2π, podemos obtener el período de $f(x)=\operatorname{sen} bx$ y de $g(x)=\cos bx$ para $b>0$ resolviendo la desigualdad $0<bx<2\pi$ que multiplicando por $\frac{1}{b}$ resulta $0\leq x\leq\frac{2\pi}{b}$.

Por lo tanto, el período de f y g es $\frac{2\pi}{b}$.

Características de la función definida por $y=\operatorname{sen} bx$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-1; 1]$

Período: $\frac{2\pi}{|b|}$

Amplitud: 1

En general, tenemos

Si $f(x) = \operatorname{sen} bx$ y $g(x) = \cos bx$ para $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, entonces f y g tienen período $\frac{2\pi}{|b|}$.

Ejemplo 4

Grafique $h(x) = \operatorname{sen} 2x$, y $g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$.

Solución

Construyamos dos tablas de valores, una para cada ecuación. Para ello, tomemos 5 valores para x que pertenezcan al intervalo $[0; \pi]$ y 5 a $[0; 4\pi]$

Tabla de valores para $h(x) = \operatorname{sen} 2x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
$h(x) = \operatorname{sen} 2x$	0	1	0	-1	0

Tabla de valores para $g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$.

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$	0	1	0	-1	0

Como $b = 2$, para $h(x) = \operatorname{sen} 2x$, el período es $\frac{2\pi}{2} = \pi$. En el caso de $g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, $b = \frac{1}{2}$ y por consiguiente, el período es $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Por lo tanto, para la primera función hay una onda senoidal en el intervalo $[0; \pi]$, esto es resultado de una compresión de 2 unidades en sentido horizontal de la gráfica de la función dada por la ecuación $y = \operatorname{sen} x$; y para la segunda una onda se logra en el intervalo $[0; 4\pi]$, lo que significa un alargamiento horizontal de 2 unidades de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Esto se observará en las correspondientes gráficas (figura 39).

¡Importante!

Para determinar los 5 valores que se mencionan en la columna de la derecha dividimos el intervalo $\left[0; \frac{2\pi}{b}\right]$; en 4 partes calculando primero el punto medio del intervalo, esto es,

$$\frac{0 + \frac{2\pi}{b}}{2};$$

a continuación se determinan los puntos medios de los dos intervalos en los que queda dividido $\left[0; \frac{2\pi}{b}\right]$.

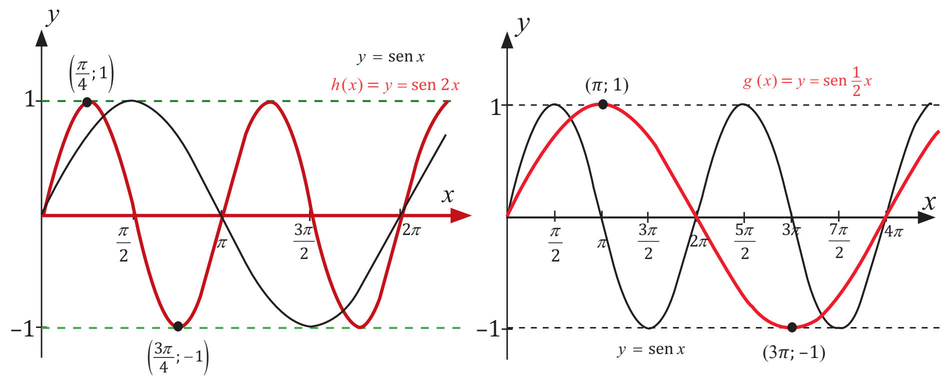


Figura 39

Características de $y = a\,\mathbf{sen}\,bx$**,** $y = \boldsymbol{a}\,\mathbf{cos}\,bx$

Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-a; a]$

Período: $\dfrac{2\pi}{|b|}$

Amplitud: $|a|$

1. ¿Qué debe tomar en cuenta para, a partir de la gráfica de $t(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x$, obtener un bosquejo de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ características tienen en común estas dos funciones?
2. Encuentre el valor máximo y mínimo de la función g en el intervalo $[0; 4\pi]$ y de la función h en el intervalo $[0; \pi]$ del ejemplo 4. ¿Coinciden estos valores para ambas funciones?
3. Tomando en cuenta las características de la función definida por $f(x) = \cos bx$, $b \neq 0$, determine el período, dominio, recorrido y amplitud de f y g dadas por $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \cos\frac{1}{2}x$, respectivamente. Trace sus gráficas.
4. ¿Tienen la misma gráfica $f(x) = \cos 2x$ y $h(x) = \cos(-2x)$? ¿por qué?

Después de graficar la función f dada por $f(x) = a\operatorname{sen} x$ o $f(x) = \operatorname{sen} bx$ resulta fácil obtener un bosquejo de la gráfica de $f(x) = a\operatorname{sen} bx$.

5. Conteste utilizando las características de $y = a\operatorname{sen} bx$ para la función f definida por $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$.
   a) ¿Cuál es el dominio de f?
   b) ¿Cuál es el recorrido de f?
   c) ¿Cuál es el período de f y la amplitud de la gráfica de esta función?

¡Importante!

Traslación horizontal de la gráfica de una función.

La gráfica de $g(x) = f(x-c)$, $c > 0$ se puede obtener por un desplazamiento de la de $y = f(x)$, c unidades hacia la derecha. En cambio, la de $g(x) = f(x+c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia la izquierda.

Características de la función definida por

$y = a\cos(bx+c)$

o

$y = a\,\text{sen}(bx+c)$

Dominio: $\mathbb{R}$

Amplitud: $|a|$

Período: $\dfrac{2\pi}{|b|}$

Desplazamiento de fase: $-\dfrac{c}{b}$.

d) Encuentre el intersecto con el eje y de $y = a\,\text{sen}\,bx$ y utilícelo para encontrar el intersecto con el eje y de $y = -\frac{1}{2}\text{sen}\,x$.

e) Localice algunos puntos y luego trace la gráfica de f tomando en cuenta sus características.

Gráficas de $y = a\cos(bx+c)$ y $y = a\,\text{sen}(bx+c)$, $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$

Para $b = 1$, $y = a\cos(bx+c)$ se convierte en $y = a\cos(x+c)$ cuya gráfica se obtiene primeramente por un desplazamiento horizontal de c unidades hacia la izquierda si $c > 0$, o $|c|$ unidades hacia la derecha si $c < 0$ de la gráfica de $y = \cos x$, seguidamente se realiza un alargamiento vertical de a unidades si $a > 1$ o una compresión en sentido vertical de a unidades si $0 < a < 1$.

- Si $a < 1$, ¿cómo se obtiene la gráfica de $y = a\cos(x+c)$ a partir de $y = \cos x$?

- ¿Cuál es el dominio y el período de la función f dada por $f(x) = 4\cos 2x$? ¿cuál es la amplitud de su gráfica?

Ya estamos preparados para obtener la gráfica de la función f dada por $y = a\cos(bx+c)$ o $y = a\,\text{sen}(bx+c)$.

Analicemos primero sus propiedades: la amplitud es $|a|$ y el período es $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

Para graficar una función trigonométrica que involucre a seno o coseno es necesario conocer un intervalo que contenga una onda senoidal o cosenoidal completa, en nuestro caso éste intervalo se obtiene resolviendo la desigualdad

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi$$
$$0 - c \leq bx \leq 2\pi - c$$
$$-c \leq bx \leq 2\pi - c$$
$$-\frac{c}{b} \leq x \leq \frac{2\pi - c}{b}.$$

Al número $-\frac{c}{b}$ se le llama desplazamiento de fase y es de gran ayuda para graficar $y = a\cos(bx+c)$ o $y = a\,\mathrm{sen}(bx+c)$: si $-\frac{c}{b}$ es negativo, solamente se corre a la izquierda la gráfica de cualquiera de las dos ecuaciones o a la derecha si $-\frac{c}{b}$ es positivo.

Ejemplo 5

Trace la gráfica de la función f dada por:
$f(x) = y = 4\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$.
Determine amplitud, período y desplazamiento de fase.

Solución

Los datos que nos da la ecuación son:

$$a = 4, \qquad b = 2, \qquad c = -\frac{3\pi}{2}.$$

Luego, el desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Entonces la gráfica de $y = 4\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$ se obtiene desplazando $\frac{3\pi}{4}$ unidades a la derecha la gráfica de $y = 4\cos 2x$ que tiene amplitud $|4| = 4$ y período igual a $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. A continuación se presenta la gráfica de estas dos funciones en el intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$. Observe que ayudados por la tabla de la izquierda se trazó una onda en el intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ y luego se repitió a la izquierda (figura 40).

x	$y = 4\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	4
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	-4
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	4

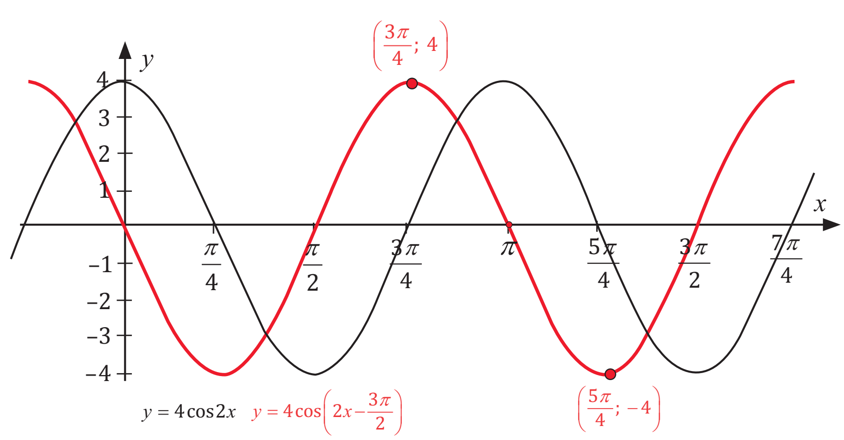


Figura 40

1. ¿Cuál es el recorrido de f?

2. Dé ejemplo de un intervalo a la derecha de $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$ que contenga una onda de la gráfica de f.

De manera similar, podemos graficar ecuaciones de la forma $y = a\operatorname{sen}(bx+c)$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, a y b distintos de cero.

Complete la tabla de abajo y utilice los puntos encontrados para trazar la gráfica que se le solicita en la columna de la derecha.

x	$y = 5\cos\left(-\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$
$-\frac{\pi}{8}$	
$\frac{5\pi}{8}$	
$\frac{11\pi}{8}$	
$\frac{17\pi}{8}$	
$\frac{23\pi}{8}$	

a) Dé ejemplo de una función f dada por $f(x) = a\operatorname{sen}(b\,x+c)$ con amplitud igual a 4, período 4π y desplazamiento de fase 2π. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función? Trace su gráfica.

b) Trace la gráfica de $f(x) = 5\cos\left(-\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$ a partir de la de $y = 5\cos\frac{2x}{3}$ y del hecho de que coseno es una función par.

Gráfica de otras Funciones Trigonométricas

Los métodos que utilizamos para obtener las gráficas de seno y coseno serán de mucha utilidad al graficar las otras funciones trigonométricas, pero, debemos observar y cuidar las diferencias que existen. Por ejemplo, seno y coseno están definidas para todo número real, en cambio la función tangente y la secante no están definidas para los valores de x, en los cuales $\cos x = 0$. Algo similar ocurre para la cotangente y la cosecante, pues no están definidas cuando $\operatorname{sen} x = 0$.

Gráfica de la función $y = \tan x$

La gráfica de $y = \tan x$ la podemos obtener considerando algunas de sus características y una tabla de valores. La función tangente es impar, entonces es simétrica respecto al origen. Además se indefine (el valor de la tangente no existe) en $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, y en todo valor para los que $\cos x = 0$.

Como su período es π, sólo necesitamos graficarla en un intervalo de longitud π. Escojamos por conveniencia el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Consideremos la siguiente tabla de valores:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

¡Importante!

La recta $x=a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f si $f(x)\to\infty$ o $f(x)\to-\infty$ a medida que x se aproxima a a ya sea por la izquierda o por la derecha.

En la tabla de abajo, mostramos el comportamiento de la gráfica de la tangente para valores cercanos a $\frac{\pi}{2}$.

x	1	1,5	1,57	1,5705	1,5706	1,5707	1,57079
$y=\tan x$	1,6	14,1	1 255,8	3 374,7	5 093,5	10 381,3	158 057,9

Observe que a medida que $x\to\frac{\pi}{2}$, por la izquierda los valores de $\tan x$ aumentan, esto se escribe $\tan x\to\infty$. Tomando en cuenta la definición de asíntota vertical que aparece a la izquierda, podemos afirmar que $x=\frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical para la gráfica de la función tangente.

Utilizando la información anterior, grafiquemos la parte superior de la gráfica para $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ (figura 41, parte superior). La parte inferior se obtiene por simetría de la tangente respecto al origen.

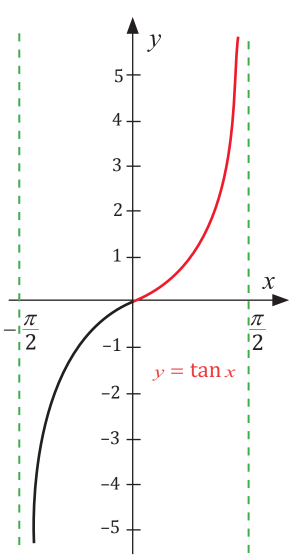


Figura 41

Haga una tabla de valores para x cercanos a $-\frac{\pi}{2}$. Observe que cuando $x\to-\frac{\pi}{2}$ por la derecha, los valores de $\tan x$ disminuyen, esto se escribe $\tan x\to-\infty$.

Aprovechemos el hecho de que el período de la tangente es π y tracemos el mismo patrón tres veces más en los intervalos de longitud π, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$. Así obtenemos la siguiente gráfica:

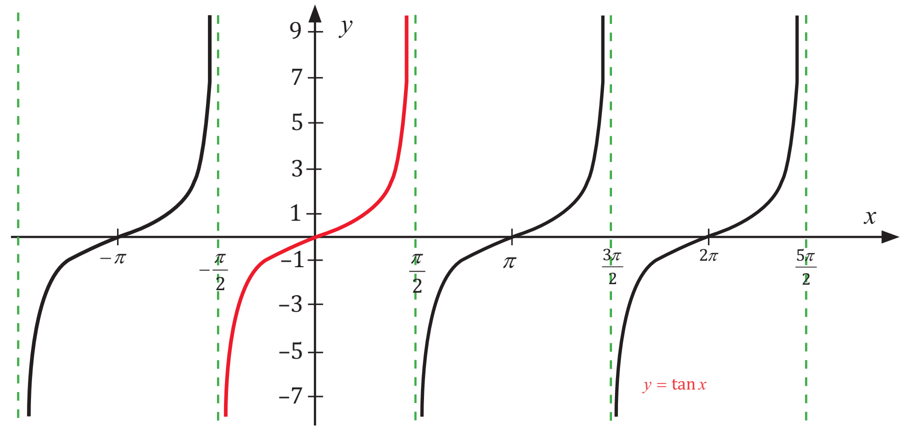


Figura 42

Observe que el recorrido de esta función es el conjunto de los números reales y el dominio son todos los números reales distintos de $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, para n un número entero.

> **¡Importante!**
>
> Una asíntota horizontal es una recta horizontal a la cual los valores de una función f se va acercando indefinidamente.
>
> Las asíntotas horizontales tienen como ecuación: $y = k$, k un número real.

Para concluir podemos afirmar que la función definida por la ecuación $y = \tan x$ cumple lo siguiente:

- **Dominio:** Los números reales distintos de $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
- **Recorrido:** Los números reales
- **Período:** π
- **Asíntotas:** las rectas $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, n número entero.
- **Intersecto con y:** $y = 0$.
- **Simetría:** Respecto al origen, porque es una función impar.

1. ¿Es la tangente una función creciente en todo su dominio? ¿tiene un valor máximo? ¿tiene un valor mínimo? ¿cuál es su intersecto con el eje y? ¿cuántos intersectos tiene con el eje x?

2. Utilice la gráfica anterior para aproximar $\tan(2\pi) - \tan(\pi)\cdot\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ y $\tan(2\pi) - \tan(-\pi)\cdot\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

   ¿Los dos resultados anteriores son iguales? ¿es un número entero par? ¿es un número natural par o impar?

3. Determine cuatro asíntotas verticales de la gráfica de la tangente que no aparezcan en la figura 42. ¿Tiene asíntotas horizontales esta función?

4. ¿Crecen o decrecen los valores de la función tangente en el intervalo $\left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$?

5. ¿Son iguales los valores $\tan x$ y $-\tan(-x)$? ¿Por qué?

Gráfica de la ecuación $f(x) = y = a\tan x, \quad a \neq 0$

En general, si $a > 1$, la gráfica de $y = a\tan x$ se puede obtener por elongación de la gráfica de $y = \tan x$, y por compresión de ésta si $0 < a < 1$.

Si $a < -1$ la gráfica de la ecuación $y = a\tan x$ se obtiene por elongación y reflexión en el eje x de la gráfica de $y = \tan x$, por compresión y reflexión si $-1 < a < 0$ y solamente por reflexión en el eje x cuando $a = -1$.

Cabe destacar que las funciones definidas por las ecuaciones $y = \tan x$ y $y = a\tan x$, con $a > 0$ tienen en común lo siguiente: dominio, recorrido, período, asíntotas y simetría. Además, ambas funciones son crecientes.

1. Mencione las características que tienen en común las funciones definidas por $y = \tan x$ y $y = a\tan x$, siendo a el año en que nació nuestro poeta Rubén Darío.

Ejemplo 6

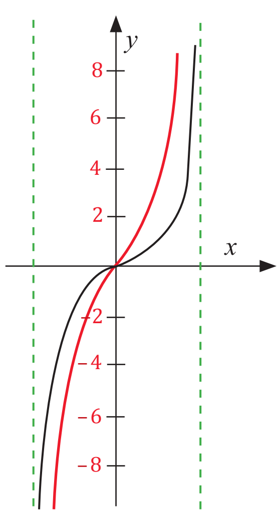
Grafique la función f dada por $f(x) = y = 4\tan x$.

Solución

La gráfica de $y = 4\tan x$ se obtiene de

$$y = \tan x,$$

multiplicando por 4 la coordenada y de los puntos de la gráfica de $y = \tan x$ (figura 43).



$y = 4\tan x$ $\quad y = \tan x$

Figura 43

2. Mencione las características de la función dada por $y = 4\tan x$.

3. ¿Qué tienen en común las funciones definidas por $f(x) = 2\,015\tan x$ y $g(x) = y(x) = 2\,017\tan x$? Determine período, dominio, recorrido, asíntotas y simetría de las dos funciones.

4. Complete la siguiente tabla

x	π	3,20	3,8	4	4,5	4,6
$f(x) = 2\,015\tan x$						

¿A que valor se acerca $f(x)$ cuando x tiende a $4,71$?

Ejemplo 7

Trace la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\tan x$.

Solución

Observe que $a = -\frac{1}{2}$ y $-1 < -\frac{1}{2} < 0$, por lo tanto la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\tan x$ se obtiene por compresión y reflexión de la gráfica de $y = \tan x$ (figura 44).

Ejemplo 8

Grafique $y = -\tan x$.

Solución

La gráfica de $y = -\tan x$ se obtiene por reflexión en el eje x de la gráfica de $y = \tan x$ (figura 45).

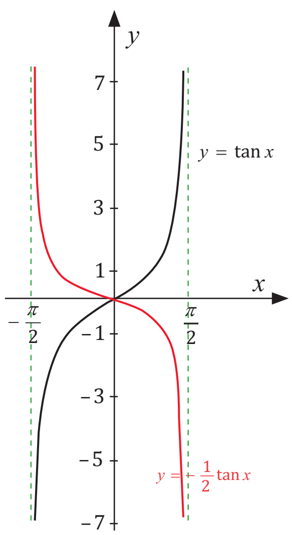


Figura 44

Observe en la tabla de la derecha que para iguales valores de x, los valores de $\tan x$ y de $-\tan x$ son opuestos.

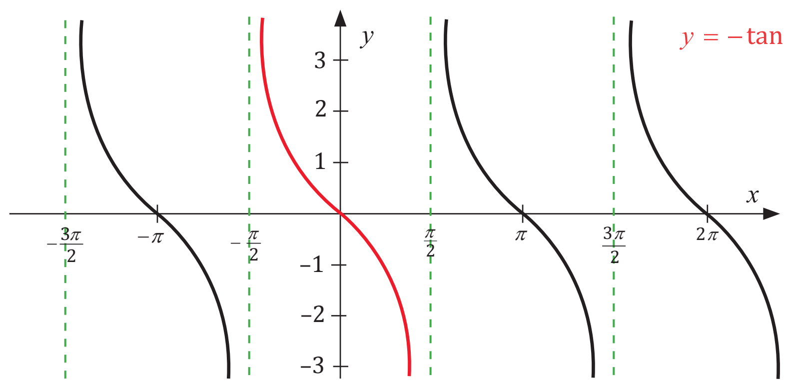


Figura 45

x	$y = -\tan x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$

Elabore una tabla que muestre que cuando esto es, la $x \to \frac{\pi}{2}$, $-\tan x \to -\infty$, recta $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota de la gráfica de $y = -\tan x$.

Gráfica de la función f definida por $f(x) = y = a\tan bx$

Consideremos la función f definida por $f(x) = y = a\tan bx$, donde a y b son números reales distintos de cero. Para trazar su gráfica es necesario tener en cuenta:

Características de $f(x) = y = a\tan bx$

1. La gráfica pasa por el origen porque si $x = 0$, $y = a\tan(b \cdot 0) = a\tan 0 = a \cdot 0 = 0.$

2. El período de esta función es $\frac{\pi}{|b|}$.

3. La distancia de las asíntotas verticales de la izquierda y de la derecha más próximas al origen es la mitad del período. Luego las rectas verticales $x_1 = -\frac{\pi}{2b}$ y $x_2 = \frac{\pi}{2b}$ son las asíntotas verticales de la gráfica que pasa por el origen.

4. Finalmente si $x = -\frac{\pi}{4b}$, entonces

$$y = a\tan b\left(-\frac{\pi}{4b}\right) = a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = a(-1) = -a.$$

En el caso $x = \frac{\pi}{4b}$, se obtiene

$$y = a\tan b\left(\frac{\pi}{4b}\right) = a\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cdot 1 = a.$$

Los cálculos anteriores nos indican que la gráfica de $y = a\tan bx$ pasa por los puntos $\left(-\frac{\pi}{4b}; -a\right)$ y $\left(\frac{\pi}{4b}; a\right)$.

Resumiendo tenemos que, para graficar la función f dada por la ecuación $f(x) = y = a\tan bx$, puede seguir los siguientes pasos:

Paso 1. Determine el período.

Paso 2. Trace las asíntotas verticales, $x_1 = -\frac{\pi}{2b}$ y $x_2 = \frac{\pi}{2b}$.

Paso 3. Ubique en el plano xy los puntos $(0; 0)$, $\left(-\frac{\pi}{4b}; -a\right)$ y $\left(\frac{\pi}{4b}; a\right)$.

Paso 4. Una los puntos que ubicó en el **Paso 3.** Tomando en cuenta que si $a > 0$ la gráfica crece de izquierda a derecha y si $a < 0$, la gráfica decrece de izquierda a derecha.

Paso 5. Repita a izquierda y a derecha la gráfica obtenida con los pasos $1, 2, 3$ y 4, esto es posible porque la función f es périódica de período $\dfrac{\pi}{|b|}$.

Ejemplo 9

Trace la gráfica de $h(x) = 4\tan 2x$.

Solución

Tenemos que $a = 4$, $b = 2$.

1. El período de la función es: $\dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Las asíntotas de la gráfica son:

$$x_1 = -\frac{\pi}{2b} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Son puntos de la gráfica: $P_o\,(0; 0)$,

$$P_1\left(-\frac{\pi}{4b}; -a\right) = P_1\left(-\frac{\pi}{8}; -4\right) \text{ y } P_2\left(\frac{\pi}{4b}; a\right) = P_2\left(\frac{\pi}{8}; 4\right).$$

4. Como $a = 4 > 0$ la gráfica crece de izquierda a derecha en cada intervalo $\left(-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right), \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$, ...

Utilicemos la información anterior y tracemos la gráfica de h.

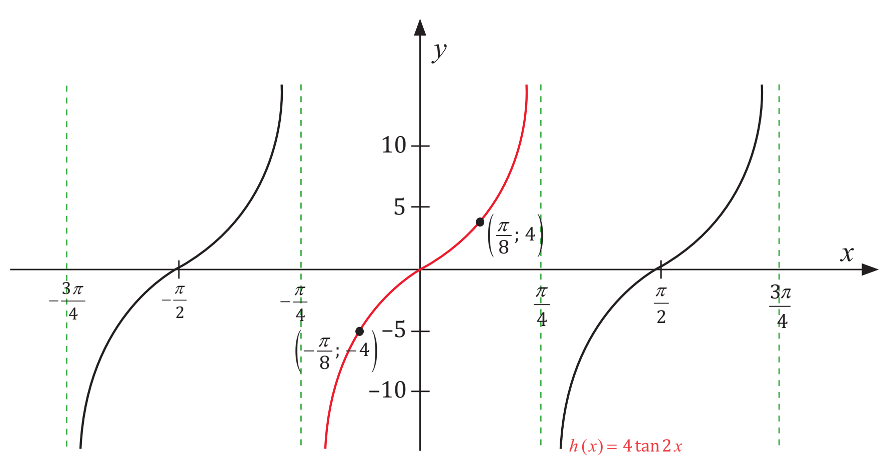


Figura 46

Observe que la gráfica de $h(x) = 4\tan 2x$ es simétrica respecto al origen.

1. Mencione 5 características de la gráfica de la ecuación $y = -\frac{1}{3}\tan(-3x)$.
2. ¿Tienen la misma gráfica $y = -\frac{1}{3}\tan(-3x)$ y $y = \frac{1}{3}\tan(3x)$? ¿por qué?
3. Mencione las características de la función dada por $y = -4\tan 2x$.
4. ¿Qué tienen en común las funciones definidas por $y = 2\,015\tan 3x$ y $y = 2\,018\tan 3x$?

Gráfica de $y = a\tan(bx+c)$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b \neq 0$.

La gráfica de $y = a\tan(bx+c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = a\tan bx$; $\left|-\frac{c}{b}\right|$ unidades a la izquierda si $-\frac{c}{b} < 0$ o a la derecha si $-\frac{c}{b} > 0$, o siguiendo los siguientes pasos:

1. Encuentre el período que es igual a $\frac{\pi}{|b|}$.
2. Encuentre el desplazamiento, $-\frac{c}{b}$.
3. Determine algunas asíntotas verticales sucesivas resolviendo la desigualdad.

$$-\frac{\pi}{2} < bx + c < \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 10

Grafique, determine el período, desplazamiento y asíntotas de $y = 2\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

De la ecuación tenemos que $a = 2$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{2}$. Luego

1. El período es $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$.
2. El desplazamiento es $-\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$.
3. Para hallar dos asíntotas verticales sucesivas resolvamos la desigualdad.

$$-\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi < 2x < 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Las asíntotas buscadas son $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, y $x_2 = 0$.

Ahora, tracemos la gráfica comprendida entre las asíntotas encontradas en **3.**, luego extendamos la gráfica resultante a derecha e izquierda:

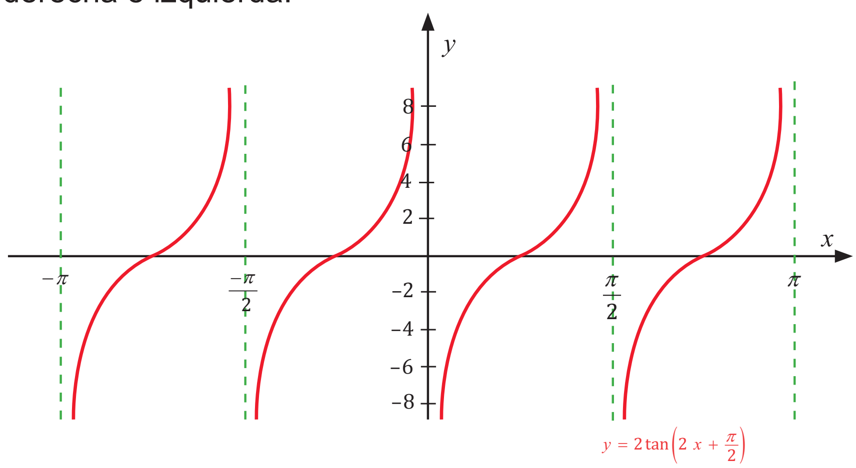


Figura 47

1. ¿La gráfica de $y = 2\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ intercepta al eje y?

2. Mencione 4 valores del dominio para los cuales $y = 0$.

3. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función f dada por $f(x) = y = 2\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$? ¿es f una función creciente?

Ejemplo 11

Trace la gráfica de $y = -\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución

Como $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{\pi}{3}$, el período es $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

y el desplazamiento es $-\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2\pi}{3}$.

Encontremos dos asíntotas verticales consecutivas resolviendo

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{5\pi}{6} < \frac{1}{2}x < \frac{\pi}{6}$$

$$2\left(-\frac{5\pi}{6}\right) < x < 2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{5\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}.$$

Luego, dos asíntotas consecutivas son: $x_1 = -\frac{5\pi}{3}$ y $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

Al igual que en el ejemplo anterior, se traza la gráfica de $y = -\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ubicada entre las asíntotas encontradas, tomando en cuenta que ésta es la gráfica de $y = -\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2}x$ trasladada $\frac{2\pi}{3}$ unidades a la izquierda. Por último se repite la gráfica obtenida a la derecha en el intervalo $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$ (figura 48).

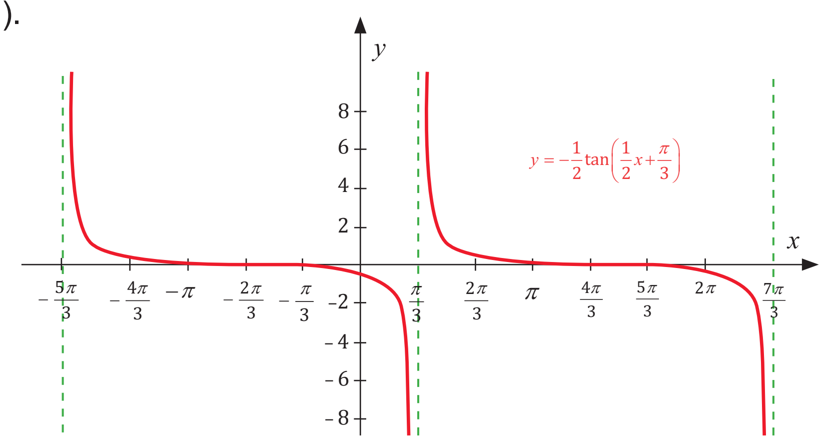


Figura 48

1. Extienda a la izquierda la gráfica anterior, para ello encuentre una asíntota ubicada a la izquierda de $x = -\frac{5\pi}{3}$.
2. Verifique que $-\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ son intersectos de la gráfica de $y = -\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ con el eje x, recuerde que para lograr su objetivo debe sustituir estos valores en la ecuación anterior y obtener $y = 0$.

3. Encuentre el intersecto de la gráfica de $y=-\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ con el eje y, haciendo $x=0$.

Gráficas de $y=a\cot(bx+c)$, $y=a\csc(bx+c)$ y $y=a\sec(bx+c)$ $a,\ b\neq 0$ $a,b,c\in\mathbb{R}$

Para la gráfica de $y=a\cot(bx+c)$ utilizaremos los pasos anteriores, solamente debemos cuidar que para encontrar dos asíntotas consecutivas se resuelve la desigualdad

$$0<bx+c<\pi.$$

Luego $x_1=-\frac{c}{b}$ y $x_2=\frac{\pi-c}{b}$ son dos asíntotas consecutivas.

Ejemplo 12

Trace la gráfica de $f(x)=2\cot\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

Sigamos los pasos establecidos:

1. Encontremos el período.

   Como $b=2$, el período es $\frac{\pi}{2}$, esto nos indica que la gráfica se repite en intervalos de longitud $\frac{\pi}{2}$.

2. Determinemos el desplazamiento.

   Tenemos que $c=\frac{\pi}{2}$ y $b=2$, así, $-\frac{c}{b}=-\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$. El valor encontrado nos permite obtener la gráfica de $y=2\cot\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ trasladando la de $y=2\cot 2x$, $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda.

3. Dos asíntotas verticales consecutivas las encontramos resolviendo la desigualdad

$$0<2x+\frac{\pi}{2}<\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}<2x<\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)<x<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}.$$

Las asíntotas buscadas son: $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

4. Un punto de la gráfica es $(0; 0)$ ya que si $x = 0$,

$$y = 2\cot\left(2\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 0 = 0.$$

Además, para $x = -\frac{\pi}{4b} = -\frac{\pi}{4\cdot 2} = -\frac{\pi}{8}$

$$y = 2\cot\left(2\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot 1 = 2.$$

Así, otro punto de la gráfica es $\left(-\frac{\pi}{8}; 2\right)$.

Si $x = \frac{\pi}{4b} = \frac{\pi}{8}$,

$$y = 2\cot\left(2\cdot\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\cdot(-1) = -2.$$

Por tanto, un tercer punto de la gráfica es $\left(\frac{\pi}{8}; -2\right)$.

Como $a > 0$, la función f es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

Ubiquemos los puntos, tracemos las asíntotas encontradas y obtengamos una parte de la gráfica de $y = 2\cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, luego repitamos este patrón a la izquierda y a la derecha.

¡Importante!

La gráfica de la función f definida por

$f(x) = a\cot(bx + c)$

$a, b \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

es decreciente si $a > 0$

y es creciente si $a < 0$.

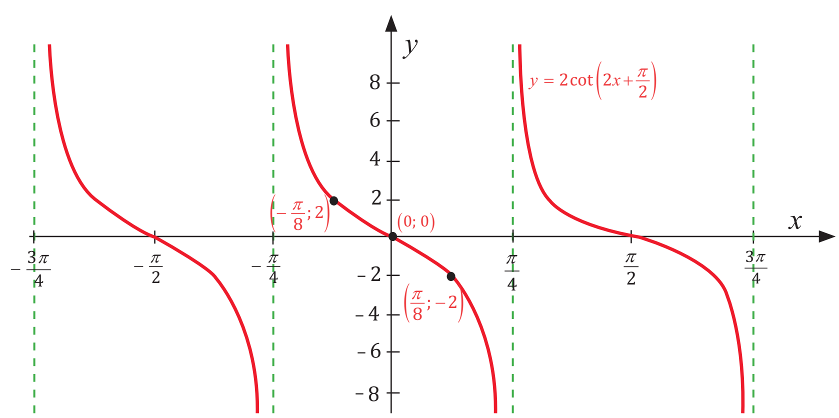


Figura 49

Verifique que $0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ y π son ceros de la función dada por la ecuación $y = 2\cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Grafique $y = 2\cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ desplazando la gráfica de $y = 2\cot 2x$, $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda.

Ejemplo 13

Trace la gráfica de $y = \csc x$.

Solución

Para trazar la gráfica de $y = \csc x$ se utiliza la identidad $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, luego su gráfica tendrá asíntotas en los valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x = 0$, esto es, para $x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,$ y en general, en $x = n\pi$, n un número entero. Además podemos obtener puntos de la gráfica de la cosecante tomando el recíproco de las coordenadas de los puntos en la gráfica de la función seno.

x	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1
$-\frac{\pi}{2}$	-1	-1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$

Utilice la información anterior y bosqueje la gráfica de la cosecante tomando en cuenta los siguientes pasos:

1. Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

2. Trace asíntotas consecutivas, por ejemplo $x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$.

3. Tome algunos puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y sustituya en éstos y por $\frac{1}{y}\ (y \neq 0)$ para obtener puntos de la gráfica de la cosecante (tabla de la izquierda).

   Así, se obtiene el siguiente bosquejo:

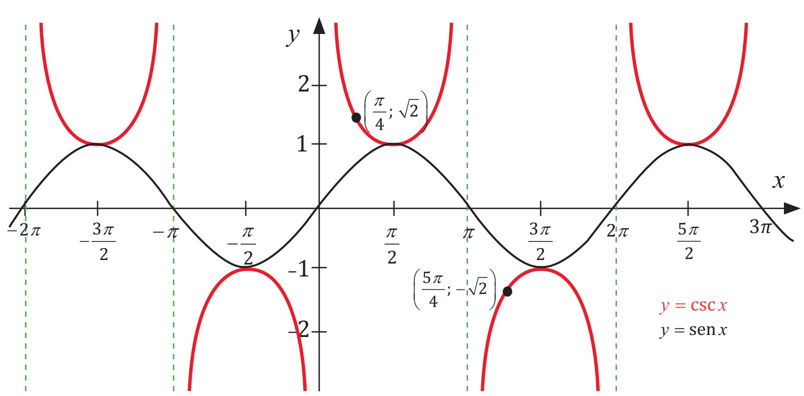


Figura 50

Observe que:

1. El recorrido de la función cosecante es $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

2. El dominio es el conjunto $\{x | x \neq n\pi, \quad n \text{ entero}\}$.

3. La gráfica de esta función es simétrica respecto al origen, esto significa que si $(x; y)$ es un punto de la gráfica, también lo es $(-x; -y)$. Por ejemplo, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ está en la gráfica, luego $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ también pertenece a ésta.

4. Utilice el inciso **3.** para completar la tabla anterior con cuatros puntos que tengan abscisa negativa.

5. La gráfica de la cosecante es creciente en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$ ¿En qué otros intervalos esta función es creciente? ¿en qué intervalos es decreciente?

6. En la gráfica de la cosecante (figura 50) se observa que en el intervalo $(0; \pi)$ esta función tiene un valor mínimo, 1 ¿En qué otros intervalos y para qué valores de x la función cosecante tiene un mínimo? ¿cuáles son éstos?

7. Determine dos intervalos y el valor de x en cada intervalo para el cual la función alcanza un máximo ¿Cuál es ese máximo?

Ejemplo 14

Halle el período, dos asíntotas consecutivas y trace la gráfica de $f(x) = y = 2\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

En forma general podemos decir que, para obtener la gráfica de la ecuación dada solamente necesitamos trazar una onda senoidal completa de la gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, luego la gráfica de $y = \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ y por último la gráfica de $y = 2\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Veamos lo anterior con más detenimiento. En virtud de que $h(x) = y = \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}$, para graficar $y = \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ nos será de gran ayuda graficar primero $h(x) = y = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, cuyo período es $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y amplitud igual a 1. Encontremos un intervalo que contenga una onda senoidal resolviendo la desigualdad.

$$0 < 2x + \frac{\pi}{2} < 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2x < 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) < x < \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

Complete la siguiente tabla y verifique que su resultado es correcto auxiliándose de la gráfica de la figura 51, trazo en color negro.

x	$y = \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
	-1
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	-1
$\frac{3\pi}{4}$	No existe
$-\frac{\pi}{2}$	
$-\frac{3\pi}{4}$	

Ahora grafiquemos $h(x) = y = \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ tomando los recíprocos de las ordenadas de los puntos $(x; y)$ de la gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ y trazando las asíntotas $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$ que corresponden a 3 ceros de la función dada por la ecuación $y = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Para finalizar obtengamos la gráfica de $f(x) = y = 2\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, multiplicando por 2 la coordenada y de los puntos de la gráfica de $h(x) = y = \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

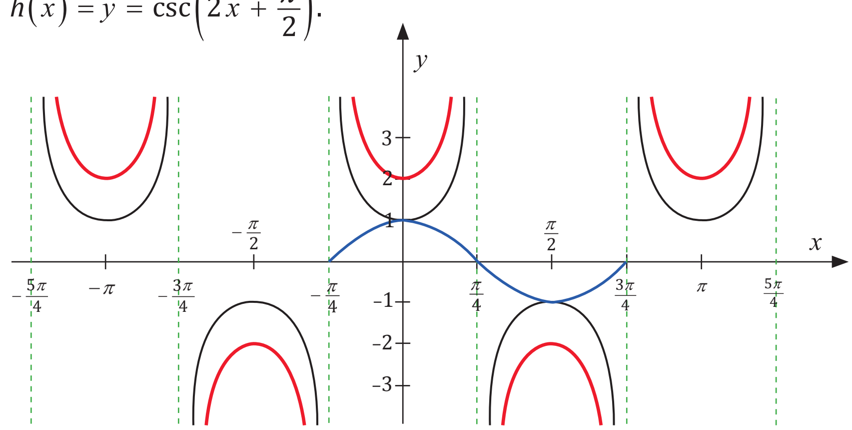


Figura 51 $y = 2\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

1. Si $f(a)=b,\ a\in D_f$, ¿cuál es el valor de $f(-a),\ 2f(a)$, $2f(a)-f(-a),\ [2f(a)-f(-a)]^2,\ f(a+\pi),\ f(a+3\pi)$?

   Sugerencia: Utilice la periodicidad de f y la simetría de su gráfica.

2. ¿En cuáles de los siguientes valores está definida la función f?

$$\frac{5\pi}{4},\quad -\pi,\quad -3{,}5,\quad -2{,}9,\quad 1{,}2,\quad -\frac{3\pi}{4}$$

3. Complete.

   Son características de la función h y de su gráfica:

   Dominio: ___________________

   Recorrido: ___________________

   Amplitud: ___________________

   Desplazamiento de fase: ___________________

   Intersecto con y: ___________________

4. Mencione 4 características adicionales de la funcion f.

Ejemplo 15

Trace la gráfica de $y=\sec x$.

Solución

Esta gráfica se obtiene de manera similar a la de la función cosecante.

x	$y=\cos x$	$y=\sec x$
0	1	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
π	-1	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
2π	1	1

1. Como $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, primero tracemos la gráfica de $x=-\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{\pi}{2}$
2. Tracemos asíntotas para la gráfica de $y=\sec x$ en aquellos valores donde $\cos x=0$, por ejemplo, en $x=-\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{\pi}{2}$ y $x=\dfrac{3\pi}{2}$.
3. Encontremos puntos de la gráfica de la secante tomando los recíprocos de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y=\cos x$.
4. Repitamos a izquierda la gráfica obtenida.

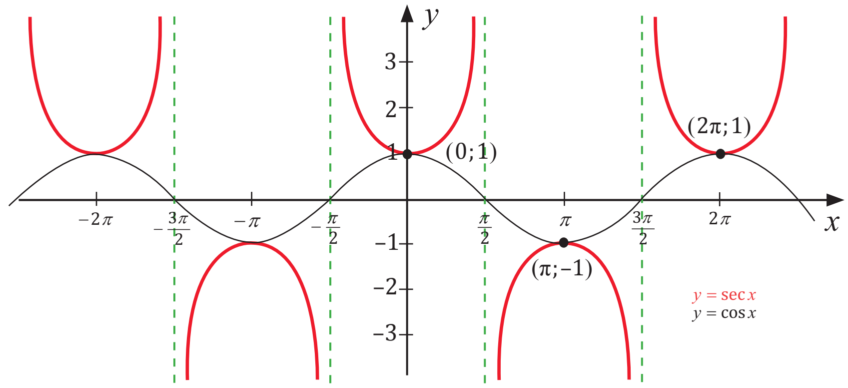


Figura 52

La gráfica anterior nos permite afirmar que:

1. El dominio de la función secante es el conjunto

$$\left\{x \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \text{ un número entero}\right\}.$$

2. El recorrido es el conjunto $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

3. La secante es simétrica respecto al eje y.

- ¿Cuál es el intersecto de la gráfica de la secante con el eje y?

- ¿Intercepta al eje x la gráfica de la secante?

- Mencione dos intervalos en los cuales la función f definida por $f(x) = \sec x$ es creciente y dos en los cuales es decreciente.

- Utilice la tabla de la página anterior y **3.** para calcular $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sec\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sec(-\pi)$, y $\sec\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Ejemplo 16

Trace la gráfica de $g(x) = y = 2\sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

Siga un método semejante al del ejemplo 14. Primero grafique $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, luego $y = \sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ y por último $y = 2\sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Obtendrá la gráfica siguiente:

Complete.

1. Tres asíntotas de la gráfica de g son: ____ , ____ y ____ .
2. Dominio de g es: _________ .
3. Recorrido de g es igual a _______ .
4. g no es simétrica respecto ______ .

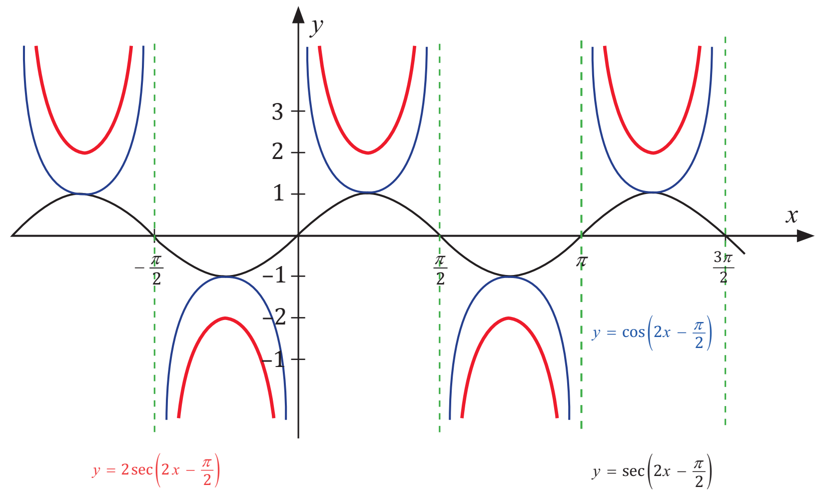


Figura 53

Compruebe lo aprendido

1. Junte la propiedad con la ecuación que corresponde.

1) El período es $\frac{\pi}{2}$	**a)** $y = -4\cos 4x$
2) El valor máximo es 5	**b)** $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
3) La amplitud es 4	**c)** $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$
4) El valor mínimo es $-\frac{1}{3}$	**d)** $y = 5\cos x$
	e) $y = 1 + \operatorname{sen} \pi x$.

2. Dé ejemplo de dos funciones trigonométricas dadas por una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen} bx$ que tengan igual período pero diferente amplitud, luego trace sus gráficas.

3. Encuentre amplitud, valor máximo y mínimo, período y trace la gráfica de cada ecuación:

a) $y = -3\operatorname{sen} \pi x - 1$ **b)** $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5x$

c) $y = 2\cos \pi x + 2$ **d)** $y = -\cos x$

e) $y = \cos x$ **f)** $y = -3\cos 2x$

g) $y = -3\cos x$ **h)** $y = 4\operatorname{sen} 6x$.

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Determine si las funciones definidas por las ecuaciones dadas son pares, impares o ni lo uno, ni lo otro.

a) $f_1(x) = \sec x - \csc x$ **d)** $f_2(x) = \tan x \cdot \sec x$

b) $f_3(x) = x \csc x$ **e)** $f_5(x) = \tan x + \sec x$

c) $f_4(x) = x \cot x$ **f)** $f_6(x) = \csc x + \cot x$.

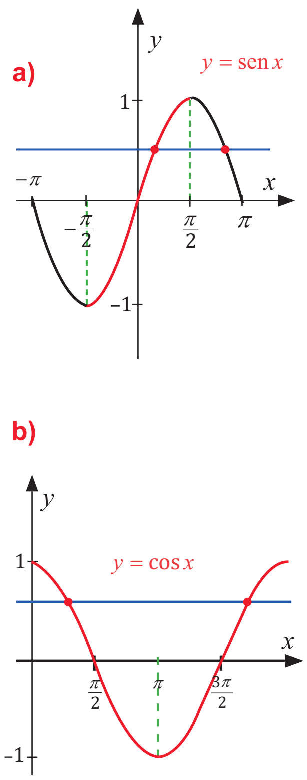


Figura 54

2. Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Muestre 3 períodos.

a) $y = -\cos(2x + \pi) - \frac{1}{2}$ **d)** $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = -3\cos(2\pi x + \pi) + 4$ **e)** $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

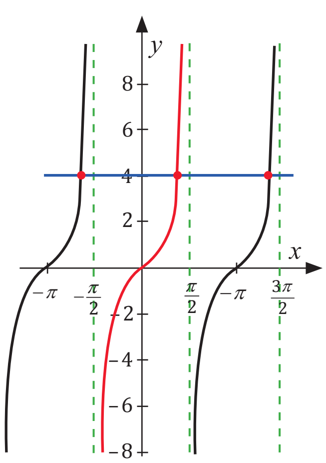
c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **f)** $y = -\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Dé ejemplo de una función f cuya ley de asignación sea de la forma $f(x) = a \operatorname{sen} bx + c$ y que cumpla con las condiciones dadas (M es el máximo valor de f y m su mínimo valor).

a) $M = 2,\ m = -2,$ período π

b) $M = 4,\ m = -4,$ período 6π

c) $M = 0,\ m = -6,$ período 4.



$y = \tan x$

Figura 55

Funciones Trigonométricas Inversas

Una función f tiene inversa f^{-1} si cada elemento de su recorrido está asociado con un único elemento de su dominio, esto es, f es biyectiva. Por ejemplo, la función dada por es biyectiva, $f(x) = ax + b,\ \ a \neq 0,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ luego tiene inversa.

Para determinar si una función es uno a uno podemos utilizar la prueba de la recta horizontal que consiste en graficar la función y luego verificar que cualquier recta horizontal interseca a esta gráfica a lo máximo en un punto.

En la columna de la izquierda de la página anterior aparecen las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente; y se puede observar que éstas no son uno a uno, por lo tanto no tienen inversa. De hecho cualquier valor en el recorrido de éstas está asociado con infinitos valores en sus dominios.

Sin embargo restringiendo sus dominios se obtienen funciones que sí tienen inversas.

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Cuál es el dominio de la función g con ley de asignación $g(x)=x^3$? ¿cuál es el recorrido?

2. ¿Es g inyectiva y sobreyectiva?

3. Si g es biyectiva, encuentre la inversa.

x	$f(x)$
-2	-5
-1	a
0	3
1	b
2	d

4. La tabla al lado izquierdo muestra algunos valores de la función f. Si f es una función dada por $f(x)=x^3+c$:

- **a)** Encuentre c.
- **b)** ¿Cuál es el valor de $a, b, a+b, a\cdot b$ y $(a+b)(a\cdot b)$?
- **c)** ¿Cuál es el valor de $a+b+d$ y $a+d$?
- **d)** Encuentre $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, ¿son iguales?
- **e)** ¿Cuál es el dominio y el recorrido de f?

5. f del ejercicio anterior es una función inyectiva y sobreyectiva, y por ende biyectiva, ¿cuál es su inversa?

6. A partir de la tabla de la izquierda construya una para f^{-1}.

7. Trace la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas rectangulares.

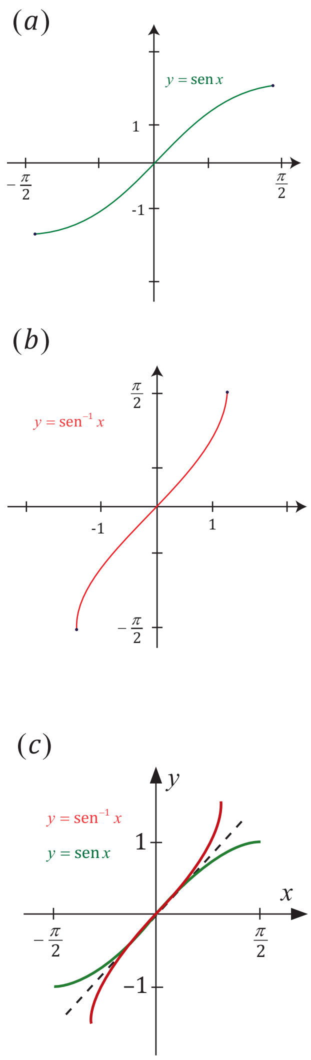


Figura 56

Seno inverso

Si restringimos el dominio de la función seno al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ obtenemos una función uno a uno. Observe en la figura 56 (a) que cualquier recta horizontal $y = c$, $-1 \leq c \leq 1$ intercepta a la gráfica de esta función exactamente en un punto.

La función arcoseno o seno inverso se define como:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{si y solo si} \quad x = \operatorname{sen} y$$

con

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Denotemos la función seno inverso o arcoseno por sen^{-1} o arcosen. De la definición anterior podemos concluir que:

a) El arcoseno de un número x está entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, inclusive, esto es, su seno es x.

b) El dominio de arcoseno es $[-1; 1]$ y su recorrido es $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Por ser arcoseno la inversa de seno, su gráfica se puede obtener como una reflexión a través de la recta $y = x$, de la gráfica de la función seno (figura 56 (c)).

Ejemplo 1

Encuentre **a)** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

Solución

a) Por definición,

$$y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y.$$

En nuestro caso, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego

$$y = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} y,$$

además,

$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{4}$. Así, $\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

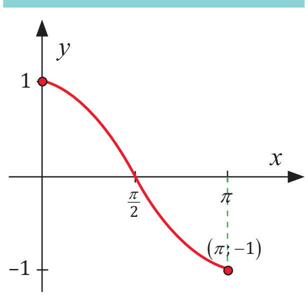
¡Cuidado!

$$\operatorname{sen}^{-1}(x) \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) \neq \frac{5\pi}{6}$$

Recuerde

sen^{-1} tiene como recorrido el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, esto significa que $\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ si existe debe pertenecer a este intervalo y $\frac{5\pi}{6}$ no pertenece. Esto significa que debemos ser cuidadosos al calcular los valores del seno inverso.



$f(x) = \cos x, \quad 0 \le x < \pi$

Figura 57

x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1

b) Por definición de composición de funciones, primero calculamos $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ y luego, a este resultado le aplicamos sen^{-1}.

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ahora,

$$\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Para encontrar, $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, apliquemos la definición,

$$y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{sen}\,y.$$

El valor de y para el cual $\text{sen}\,y = \frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{6}$ porque cumple la condición $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$.

En conclusión,

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Coseno inverso

La función coseno cuyo dominio es el conjunto de los números reales y su recorrido es $[-1;\,1]$ no es biyectiva, y por lo tanto, no tiene inversa, pero si restringimos su dominio al intervalo $[0;\,\pi]$ (gráfica 57), la función resultante es biyectiva; luego tiene inversa, ésta se denota por $\cos^{-1}$ o $\text{arc}\cos$, y se define así,

$y = \text{arc}\cos x$ si y solo si $x = \cos y$

y

$0 \le y \le \pi, \quad -1 \le x \le 1.$

La gráfica de arco coseno aparece en la página siguiente y para trazarla se utilizó la tabla para $\cos^{-1}$ que también aparece a la izquierda, que a su vez se obtuvo de la tabla construida para coseno, recordando el hecho que si $(x;\,y) \in f$, entonces $(y;\,x) \in f^{-1}$, siempre y cuando f tenga inversa, esto es, f sea biyectiva.

x	$y=\cos^{-1}x$
1	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
0	$\frac{\pi}{2}$
−1	π

Recuerde que si $f: A \to B$ tiene inversa, se cumple que

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in A.$$

Esto significa que $\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \forall\, x \in [0; \pi]$.

Por ejemplo, $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2

Encuentre el valor de

a) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)$ **b)** $\cos^{-1}(\cos 0)$ **c)** $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Solución

a) Calculemos primero $\cos\frac{5\pi}{3}$,

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ se obtiene aplicando la definición de coseno inverso

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos y,$$

esto significa que $y = \frac{\pi}{3}$.

b) $\cos^{-1}(\cos 0) = 0$ por ser $\cos^{-1}$ y $\cos$ funciones inversas y $0 \in [0; \pi]$.

c) Primero, necesitamos evaluar la suma que está en paréntesis, esto es,

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2},$$

En el ejemplo 1 inciso b) y el ejemplo 2 obtuvimos el valor de cada uno uno de los sumandos de la expresión anterior, por lo tanto solo necesitamos hacer las sustituciones respectivas

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

luego, $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

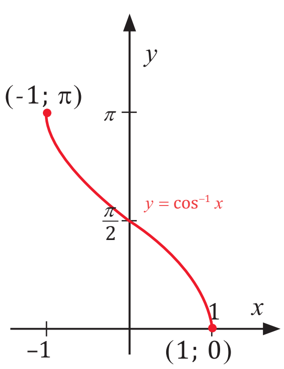


Figura 58

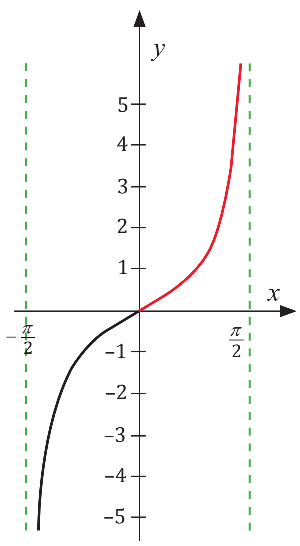
Obtenga el valor de cada expresión

$$2\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + 40{,}33, \quad 2\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - 7{,}35,$$

$$[\cos(\cos^{-1} 0{,}5)][\cos(\cos^{-1} 1)] \text{ y } \left[-4\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2.$$

Tangente inversa

Al igual que para el caso de seno y coseno, restringiremos el dominio de tangente a $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ y el de la cotangente a $(0;\pi)$ para obtener como resultados funciones que tienen inversa llamadas tangente inversa y cotangente inversa, respectivamente. Así,



$y = \tan x$

La función arcotangente $\arctan$ o tangente inversa denotada por $\tan^{-1}$ se define por

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y,$$

con $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$

La función arcocotangente arccot o cotangente inversa denotada por $\cot^{-1}$ está definida por

$$y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y,$$

con $0 < y < \pi, \quad -\infty < x < \infty.$

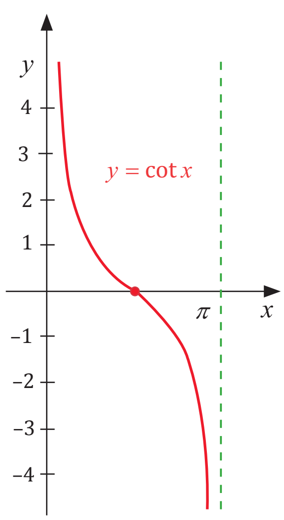


Figura 59

La gráfica de estas funciones se muestran abajo y las puede obtener como una reflexión de las curvas de las figuras de la izquierda.

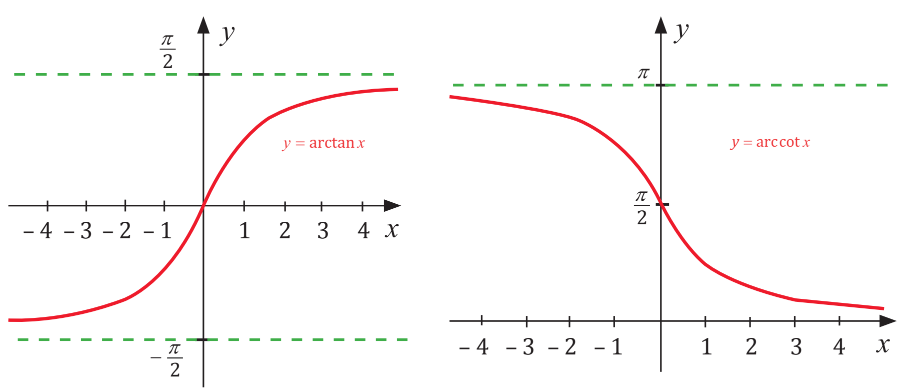


Figura 60

¿Son la cotangente inversa y la tangente inversa funciones crecientes?

Ejemplo 3

Calcule

a) $\cot^{-1}(-1)$ **b)** $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Solución

a) Sea $y = \cot^{-1}(-1)$, entonces $\cot y = -1$.

Así, $y = -\frac{\pi}{4}$ y por lo tanto,

$$\cot^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

b) Sea $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, entonces $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, luego $y = \frac{\pi}{6}$.

Por lo tanto, $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

¿Qué otras respuestas son posibles para los incisos **a)** y **b)** del ejemplo anterior?

Actividad en grupo

1. Investiguen la restricción que es necesaria hacer al dominio de la función secante y cosecante para que las dos funciones resultantes tengan inversa. ¿Cómo se definen esas inversas? Grafiquen estas funciones y determinen su dominio y recorrido.

2. Hagan una tabla que resuma las propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

Compruebe lo aprendido

1. Encuentre el valor indicado. No utilice calculadora.

a) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ **b)** $\sec\left(\sec^{-1}1{,}4\right)$

c) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **d)** $\cot\left(\cot^{-1}(-3)\right)$

e) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **f)** $\tan^{-1}0.$

g) $\left(\cos\left(\cos^{-1}0{,}7\right)\right)^{3}$ **h)** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}0{,}4\right)$

A veces no es posible resolver problemas que involucran a las funciones trigonométricas sin la ayuda de la calculadora, por ejemplo, para determinar $\tan^{-1}(2\,016)$ utilicemos la calculadora en el modo de radianes, presionemos la tecla SHIFT (o segunda función), a continuación la tecla tan, se escribe $2\,016$ y se presiona la tecla = y aparecerá $1{,}5703$. De manera análoga se hacen los cálculos para el caso de seno inverso y coseno inverso. Si su calculadora no funciona de esta manera, consulte su manual.

2. Encuentre el valor indicado utilizando calculadora:

a) $\tan^{-1} 2\,020$

b) $\cos^{-1}(\text{sen } 25{,}4)$

c) $\text{sen}^{-1}(\tan 0{,}85)$

d) $\text{sen}^{-1}(\cos 187{,}53)$

e) $\tan^{-1}(\cos 88{,}7)$

f) $\cos^{-1}(\tan 207)$

g) $\text{sen}(\tan^{-1} 2\,015)$

h) $\cos^{-1}(\cos 99{,}9)$

i) $\cos(\cos^{-1}(-0{,}777))$

j) $\cos(\tan^{-1} 5\,320{,}123)$

k) $\cos(\text{sen}^{-1}(-0{,}7654))$

l) $\text{sen}(\text{sen}^{-1}(-0{,}76543))$.

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Encuentre el valor exacto o aproximado de la expresión dada.

a) $\cos^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{2}{3}\text{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{17}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{4}{15}\right) + 1\right]$

b) $\text{sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{2}{3}\text{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{17}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{4}{15}\right) + 1\right]$

c) $\text{sen}^{-1}\left[\cos\left(\tan\frac{5}{2} + \cos^{-1}\frac{3}{17}\right) + \csc\left(\cos^{-1}\frac{4}{7}\right) - 2\right]$

d) $\cos^{-1}\left[\tan\left(\frac{1}{5}\tan^{-1} 8{,}369\right) + \sec\left(\tan^{-1}\frac{8}{5}\right) - 2\right]$.

2. Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = 2\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}x$

b) $y = 2\,\text{sen}^{-1}(x+4)$

c) $y = \cos^{-1}2x$

d) $y = 3\tan^{-1}2x$

e) $y = \tan^{-1}\frac{1}{2}x + 1$

f) $y = \cos(\text{sen}^{-1}x)$.

3. Escriba la expresión dada sin utilizar funciones trigonométricas y trigonométricas inversas.

a) $\text{sen}(\text{sen}^{-1}\mu + \text{sen}^{-1}\nu)$

b) $\cos(\text{sen}^{-1}1 - \text{sen}^{-1}x)$

c) $\cos(\text{sen}^{-1}\nu)$

d) $\text{sen}(2\,\text{sen}^{-1}\mu)$.

4. Halle las soluciones de la ecuación en $[0; 2\pi]$, trace para ello la gráfica de las funciones con ley de asignación las expresiones del lado derecho e izquierdo de cada igualdad.

a) $\tan x = \text{sen}\,x$

b) $\cos 2t = -3\cos t - 2$

c) $4\text{sen}\ x - 2 = 2\sec x\ \text{sen}\,x - \sec x$

d) $2\cos y + 1 = 2\cos^2 y + \cos y$.

Ejercicios Finales de la Unidad

1. Procúrese una calculadora científica de las que se encuentran en su localidad, lea atentamente las instrucciones del manual y realice los siguientes cálculos:

a) $17°35'47'' + 14°22'34''$

b) $29°5'37'' + 44°12'57''$

c) $203°12'22'' - 117°48'52''$

d) $240°5'37'' + 38°44'37''$.

2. Dibuje cada ángulo, luego use una calculadora para obtener $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ de cada uno de ellos. Redondee a dos decimales.

a) $\theta = 55°$

b) $\theta = 28{,}5°$

c) $\theta = 78{,}6°$

d) $\theta = \left(\frac{1}{4}\right)^{\circ}$

e) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

f) $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

g) $\theta = 103°2'29''$

h) $\theta =$ suplemento de 120°

i) $\theta =$ complemento de 17,5°.

3. Convierta cada ángulo de radianes a grados; utilice primero la igualdad $\pi = 180°$ y luego compruebe con la calculadora.

a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $-\frac{2\pi}{3}$

c) $-\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{7\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$ f) $\frac{\pi}{3}$

g) $\frac{4\pi}{3}$ h) $\pi+\frac{3\pi}{4}$.

4. Convierta cada ángulo de grados a radianes, haga uso de la igualdad $\pi = 180°$ y luego compruebe con la calculadora.

a) $120°$ b) $-90°$

c) $170°35'$ d) $117°$

e) $-112°$ f) $-270°$

g) $-300°$ h) $-720°$.

5. Use una calculadora para escribir los signos >, < o = en el espacio vacío situado entre las expresiones numéricas dadas.

a) $\cos^2 30°$ ___ $\left(1-\tan^2 30°\right)$

b) $\sqrt{\operatorname{sen} 45°}$ ___ $\sqrt{\tan 45°}$

c) $\operatorname{sen} 30°$ ___ $\sqrt{1-\cos^2 30°}$

d) $1+\tan 45°$ ___ $\sec^2 45°$

e) $\frac{1+\cos 30°}{2}$ ___ $\frac{1+\operatorname{sen} 30°}{2}$.

6. Determine en los siguientes ejercicios dos ángulos coterminales al ángulo dado, uno positivo y otro negativo. Dé la respuesta en radianes.

a) $120°$ b) $-270°$

c) $-\frac{2\pi}{5}$ d) $\frac{\pi}{10}$

e) $117°$ f) $-112°$

g) $320°$ h) $70°33'$.

7. Convierta cada medida de los ángulos dados a la forma decimal, primero sin calculadora y luego, con calculadora.

a) $-207°5'$ b) $70°13'20''$

c) $67°28'$ d) $-112°16'34''$

e) $325°\,68''$ f) $215°23'47''$

g) $270°2'$ h) $-720°25'$.

Transforme los resultados anteriores a radianes.

8. En este ejercicio s denota la longitud de arco de una circunferencia de radio r subtendido por el ángulo central θ y A el área del sector circular. Transforme los grados a radianes y luego encuentre la cantidad faltante.

a) $\theta = \frac{1}{5}\,rad,\quad s = 3\,pies,\ r = ?$

b) $r = 15\,cm,\quad \theta = \frac{\pi}{3},\qquad s = ?$

c) $\theta = 67°28',\ r = 2\,m,\quad A = ?$

d) $r = 5\,km,\quad s = 10\,km,\ \theta = ?$

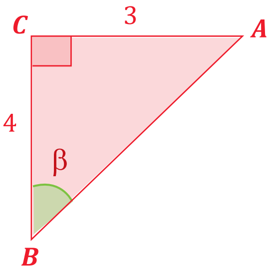
e) $\theta = \frac{2\pi}{5},\quad s = 7\,m,\quad r = ?$

9. Encuentre el área de un sector circular de radio 5 metros formado por un ángulo de $60°$. Redondee las respuestas a tres decimales.

10. En un círculo de radio $0{,}02\,m$ el área de cierto sector circular es $\frac{\pi}{6}\,cm^2$. Encuentre la medida angular en radianes del ángulo central, redondeando la respuesta a tres decimales.

11. Determine amplitud, período y trace la gráfica de $y = 2\operatorname{sen}(x+\pi)$.

12. Dado el triángulo rectángulo ACB de la figura, donde $C=90°$, $AC=3$, $BC=4$, encuentre todas las funciones trigonométricas para el ángulo agudo señalado.



13. Construya dos triángulos rectángulos tal que todos los valores de las funciones trigonométricas de uno de los ángulos agudos de cada triángulo no sean números irracionales.

14. Los triángulos pitagóricos son aquéllos cuyos lados miden números naturales que cumplen el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, los números naturales $3,\ 4,\ 5$ representan un triángulo pitagórico de catetos $3,\ 4$ e hipotenusa 5. Dados los triángulos pitagóricos representados por las ternas $11,\ 60,\ 61;$ $19,\ 180,\ 181;$ y $5,\ 12,\ 13$ encuentre:

a) Las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de cada triángulo.

b) El área de cada uno de los triángulos anteriores.

c) ¿Es alguno de los números de **b)** un cuadrado perfecto

15. La ecuación $P=100+20\,\text{sen}\,2\pi t$ modela la presión arterial P de una persona en milímetros de mercurio, donde el tiempo está dado en segundos. La presión arterial oscila entre $20\,mm$ arriba y $100\,mm$ abajo, lo cual significa que la presión arterial de una persona saludable es 120 sobre 80. Esta función tiene un período de 1 segundo, lo cual indica que el corazón de una persona da 60 latidos por minuto.

a) Encuentre la presión arterial cuando $t=0$, $t=0{,}25$, $t=0{,}5$, $t=0{,}75$ y $t=1$.

b) Utilice los resultados del inciso **a)** y trace la gráfica de P en el intervalo $[0;\ 1]$. Durante el primer segundo ¿cuándo se alcanzó la máxima presión?¿cuándo se alcanzó la mínima presión?

c)

16. En la relación depredador–presa el número de animales de cada especie tiende a variar periódicamente. Cierta región tiene pumas como depredadores y venados como presas. La ecuación $P=500+200\,\text{sen}\,[0{,}4(t-2)]$ modela el número de pumas después de t años y la ecuación $V=1\,500+200\,\text{sen}(0{,}4t)$ modela el número de venados después de t años. ¿Cuántos pumas y venados habrán en la región cuando

a) $t=0$ **b)** $t=10$ **c)** $t=30$?

17. El período de un péndulo queda determinado por la fórmula $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, donde T es el período, l la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Determine la longitud del péndulo si éste tiene en la Tierra un período de $4{,}1$ segundos y la aceleración debida a la gravedad terrestre es de $9{,}8\,m/s^2$.

18. Se ha demostrado que el cáncer de piel está relacionado con la exposición al sol. La tasa W por la que la piel de una persona absorbe energía del sol depende de la energía S, en watts por metro cuadrado, provista por el sol, el área A de la superficie expuesta al sol, la habilidad del cuerpo de absorber energía y el ángulo θ entre los rayos del sol y una recta perpendicular al cuerpo. La habilidad de un objeto para absorber energía se relaciona con un factor llamado emisividad e del objeto, que está dada por

$$e = \frac{W \sec\theta}{AS}$$

a) Resuelva la ecuación para W, expresándola en función de $\cos\theta$.

b) Encuentre W si $e = 0{,}80$, $\theta = 40°$, $A = 0{,}75\,m^2$ y $S = 1\,000\ watts/m^2$.

19. Llamamos iluminancia a la cantidad de luz que una fuente provee a una superficie. La iluminancia en candelas sobre una superficie a R pies de una fuente de luz con intensidad I candelas es $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$ donde θ es la medida del ángulo entre la dirección de la luz y una recta perpendicular a la superficie iluminada. Verifique que la fórmula $E = \frac{I\cot\theta}{R^2\csc\theta}$ es equivalente a la anterior.

20. Las celdas solares convierten la radiación del sol en electricidad. Para calcular la potencia que generan se debe determinar la cantidad de energía solar que incide sobre ellas. Si el cielo está despejado la cantidad total de energía solar que incide sobre una celda solar de área A está dada por $4{,}82P = AW\operatorname{sen}\theta$ donde θ es el ángulo de inclinación del sol y $W = 1\,340\ watts/m^2$ es la constante solar. ¿Cuánta energía solar incide sobre una celda con un área de $10\,m^2$ si el ángulo de inclinación es de $30°$. ¿Cuánta energía genera una celda solar con un 25% de eficiencia?

21. La tabla siguiente muestra la temperatura promedio mensual de Managua en el año 2013, calculada usando la temperatura máxima diaria. El 1 corresponde al mes de Enero, 2 a Febrero, etc.

Mes	Temperatura °C
1	28,80
2	30,30
3	32,10
4	31,40
5	30,50
6	27,50
7	26,60
8	28,70
9	27,70
10	29,20
11	29,20
12	30,20

a) Haga una gráfica en el plano cartesiano usando el eje horizontal t, donde $\text{Enero} = 1$, $\text{Febrero} = 2$, etc, luego 13 correspondería a Enero del 2014, y así sucesivamente.

b) Encuentre una función periódica de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bt - C) + D$ que aproxime la curva de **a)**. En este caso, A es la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima del año, B cumple la relación $12B = 2\pi$ y $\frac{C}{B} = 4$.

c) Busque en internet la temperatura promedio mensual de su municipio, forme la tabla y realice los pasos **a)** y **b)**.

d) Comparta con sus compañeros los resultados encontrados.

22. Trace la gráfica en un intervalo que corresponda a un período.

a) $y = 0{,}5\sec(2x - \frac{3\pi}{4}) + 1{,}5$

b) $y = \frac{3}{2}\csc(0{,}5x - \frac{3\pi}{4}) + 1$

c) $y = -0{,}5\sec(2x + \frac{\pi}{3}) - 3$

23. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{x}{5}$ y $180° < \theta < 270°$, calcule las restantes funciones trigonométricas en función de x.

24. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y $270° < \theta < 360°$, encuentre $\cos\theta$ y $\sec\theta + 1$.

25. Suponga que el ángulo θ está en posición estándar y el lado terminal del ángulo está en el tercer cuadrante ¿Cuáles de las siguientes funciones trigonométricas son negativas?

a) $\tan\theta$ **d)** $\cos\theta$

b) $\sec\theta$ **e)** $\operatorname{sen}\theta$

c) $\cot\theta$ **f)** $\csc\theta$

26. Ordene de menor a mayor con el signo $<$ las cantidades siguientes:

a) $\operatorname{sen}75°$, $\operatorname{sen}15°$, $\operatorname{sen}5°$, $\operatorname{sen}85°$

b) $\operatorname{sen}(-270°)$, $\cos180°$, $\operatorname{sen}5°$, $\tan720°$

c) $\operatorname{sen}(-280°)$, $\tan320°$, $\sec120°$

27. Utilice una identidad para simplificar las siguientes expresiones:

a) $\cos^2 133° - \operatorname{sen}^2 133°$

b) $\dfrac{2\tan 40{,}5°}{1 - \tan^2 40{,}5°}$

c) $-\dfrac{1}{\csc^2 32{,}3°} + \dfrac{1}{\sec^2 32{,}3°}$

28.

Fecha	Salida del sol AM	Puesta del sol PM	Horas de luz solar	t (meses)
15 de enero de 2013	6:10	17:39	11,49	1
15 de febrero de 2013	6:07	17:52	11,75	2
15 de marzo de 2013	5:52	17:56	12,05	3
15 de abril de 2013	5:33	17:57	12,4	4
15 de mayo de 2013	5:21	18:06	12,7	5
15 de junio de 2013	5:21	18:11	12,8	6
15 de julio de 2013	5:28	18:14	12,8	7
15 de agosto de 2013	5:34	18:05	12,5	8
15 de septiembre de 2013	5:34	17:46	12,2	9
15 de octubre de 2013	5:35	17:26	11,9	10
15 de noviembre de 2013	5:43	17:17	11,6	11
15 de diciembre de 2013	5:58	17:23	11,4	12
15 de Enero de 2014	6:10	11:39	11,49	1

a) En la tabla anterior con las horas de salida y puesta de sol cada 15 de mes en el año $2\,013$ puede observar que para $t=13$, correspondiente a enero $2\,014$, el número de horas solares es igual al de enero $2\,013$. Si quisiéramos definir una función periódica, ¿cuál es su período?

b) Grafique los puntos $(t;l)$, t el tiempo y l la cantidad de luz solar. Observe que la gráfica se asemeja a la de la función senoidal. Se puede escribir una función senoidal para representar estos datos. Una función senoidal puede ser una función de la forma
$y=A\,\mathrm{sen}(k\theta+c)+h$ o
$y=A\cos(k\theta+c)+h$.

c) La cantidad de horas de sol en Managua pueden ser modelada mediante la función $y=A\,\mathrm{sen}(kt+c)+h$, donde t es el tiempo en meses.

i) Encuentre A y h sabiendo que A es igual a la mitad de la diferencia entre el mayor valor y el menor de las horas solares; h es el promedio de el mayor valor y el menor de las horas solares.

ii) Dado que la fórmula del período es $T=\dfrac{2\pi}{k}$, y que en nuestro caso $T=12$, calcule k.

iii) Para calcular c sustituya los valores anteriores de A, h y k y utilice un punto de la curva, por ejemplo, $(1;\,11{,}49)$.

iv) Si tuviese una graficadora compruebe la forma de la curva resultante.

v) Use su modelo para estimar el número de horas solares el 30 de Diciembre de $2\,013$.

29. En un círculo de radio $1{,}5\,cm$ el área de cierto sector circular es $25\,m^2$. Encuentre la medida angular en grados del ángulo central, redondeando la respuesta a dos decimales.

30. Conteste verdadero o falso, justificando.

a) Los dominios y recorridos de seno inverso y coseno inverso son iguales.

b) El dominio de la función tangente inversa es el recorrido de la funcion cotangente inversa.

c) Si una función es inyectiva o sobreyectiva, entonces tiene inversa.

d) $\mathrm{sen}^{-1}\left[\mathrm{sen}\left(2\,015\right)\right]=2\,015$.

e) $90°$ es $0{,}25$ de una revolución completa.

f) La función $y=\csc x-10$ no se interseca ni con el eje x ni con el eje y.

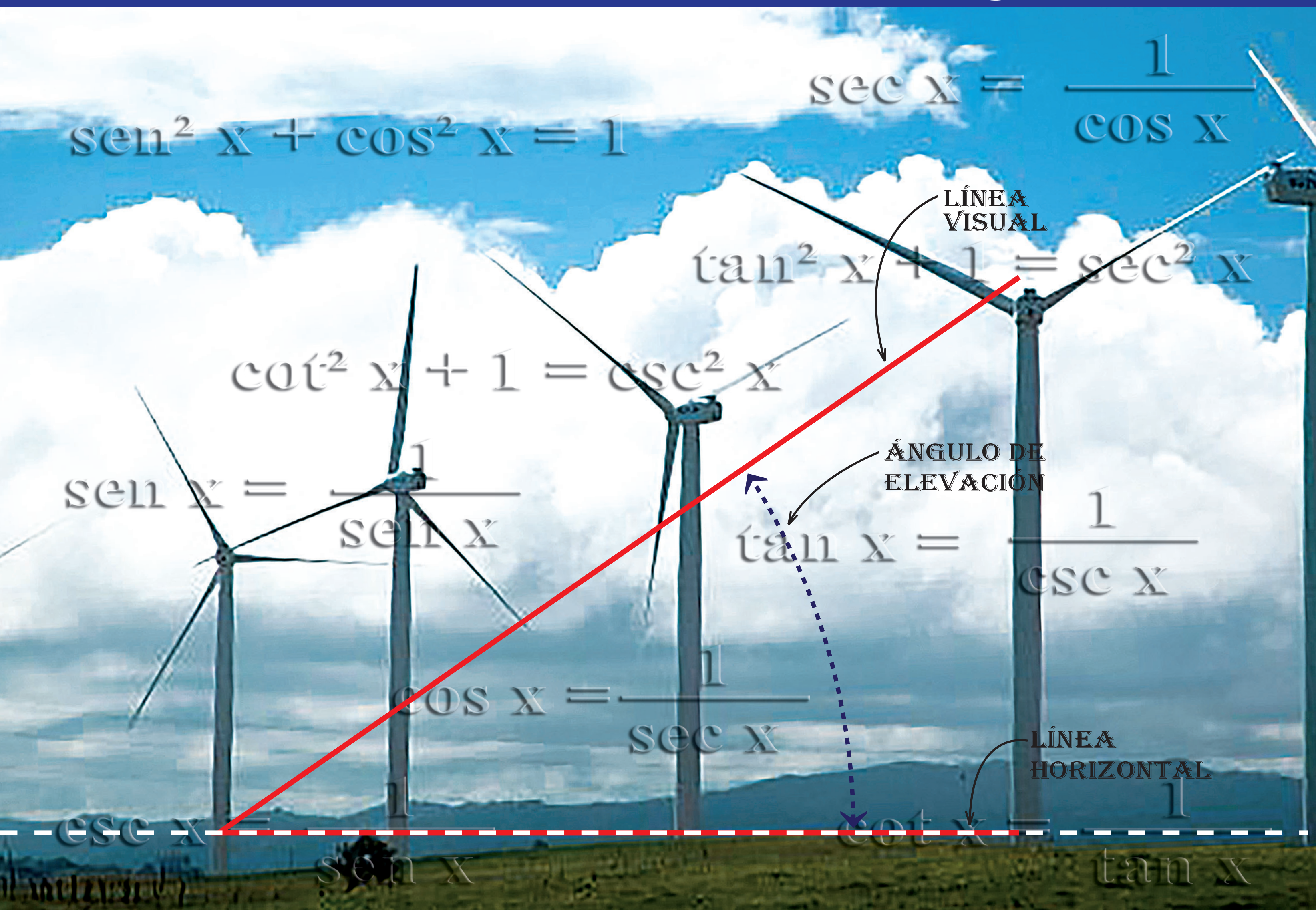
g) El ángulo $\alpha=90°$ coincide con su suplementario.

h) tan $90°$ no existe y secante de $2\,015$ es 235.

h) $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2}}=\cos^{-1}\dfrac{\pi}{2}$

Identidades y Ecuaciones Trigonométricas

Unidad 3

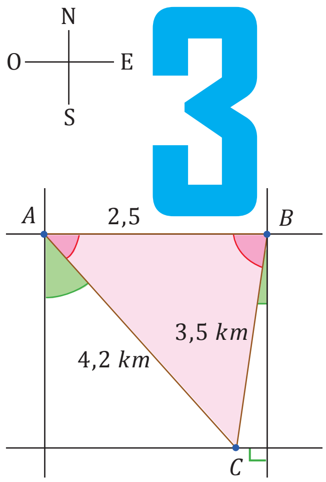


El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional puso en funcionamiento el parque eólico "Comandante Camilo Ortega" quien es considerado el Apóstol de la Unidad Sandinista. "La unidad de todos los nicaragüenses, unidos por el Bien Común de este país, en reconciliación y haciendo patria siempre para este pueblo".

Este parque eólico cuenta con una capacidad para generar 40 megawatts (MW), y se encuentra ubicado en el sureño departamento de Rivas. Con este se busca la transformación de la matriz energética y la generación de energía renovable, lo cual conlleva a un impacto de menos costos de producción y un mayor beneficio para las familias.

Fuente: 19 digital
12 de Marzo 2 014

Unidad 3



Identidades y Ecuaciones Trigonométricas

Introducción

Esta unidad abarca las identidades y las ecuaciones trigonométricas. Las primeras deben considerarse las partes deliciosas y más seguras de la matemática al ejercitar la habilidad analítica porque dan el punto de partida y la respuesta, mediando una serie de sustituciones intermedias que convierten a la demostración de identidades en un verdadero juego, con los retos que ésta presenta.

Las ecuaciones trigonométricas tienen la novedad de que las incógnitas intermedias no son literales, como en las ecuaciones algebraicas, sino ¡las propias funciones trigonométricas! Por ejemplo al resolver la ecuación $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$, la incógnita intermedia es $\operatorname{sen} x$. Luego deberá encontrarse el valor de x; similarmente ocurre con la ley de los senos y cosenos aplicada a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Identidades Trigonométricas

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué es una ecuación?

2. ¿A qué se llama identidad en matemática?

3. ¿Es toda ecuación una identidad? Dé ejemplo de una identidad.

4. ¿Cómo se demuestra que una ecuación no es una identidad?

5. Si x e y son números reales ¿es $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ una identidad?

6. ¿Existe algún par de números reales para los cuales la expresión $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ no sea válida? ¿Es una identidad?

7. Si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ ¿es $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$ una identidad?

8. En trigonometría, ¿cuáles son las identidades fundamentales?

En la unidad anterior estudiamos las llamadas identidades fundamentales, las cuales resultan ser de gran ayuda en la simplificación de expresiones complicadas que involucren funciones trigonométricas. Para lograr esta simplificación no existe un método general, solamente se puede sugerir algunas técnicas que pueden ser muy útiles.

mayúsculas	minúsculas	nombre de la letra	transcripción latina
Α	α	alfa	A
Β	β	beta	B
Γ	γ	gamma	G
Δ	δ	delta	D
Ε	ε	épsilon	E
Ζ	ζ	dseta	Z
Η	η	eta	E
Θ	θ	zeta	Th
Ι	ι	iota	I
Κ	κ	kappa	C, K
Λ	λ	lambda	L
Μ	μ	mi	M
Ν	ν	ni	N
Ξ	ξ	xi	X
Ο	ο	ómicron	O
Π	π	pi	P
Ρ	ρ	rho	R
Σ	σ, ς	sigma	S
Τ	τ	tau	T
Υ	υ	ípsilon	Y, I
Φ	φ	fi	Ph
Χ	χ	ji	Ch
Ψ	ψ	psi	Ps
Ω	ω	omega	O

Alfabeto Griego

En el caso que la expresión sea una ecuación que contiene funciones trigonométricas y se desea probar que es una identidad, esto es, que es válida para todos los valores de la variable que aparece en la ecuación y para los cuales ambos lados tienen sentido, se recomienda lo siguiente:

1. Estudie la ecuación, observando ambos lados, con el objetivo de determinar cuál es el más complicado, e inicie su simplificación, con la ayuda de las identidades fundamentales u otras identidades ya demostradas.

2. Realice las operaciones indicadas. Recuerde que si la expresión involucra suma o diferencia de fracciones debe encontrar el mínimo común de los denominadores.

3. Si utilizando los pasos **1.** y **2.** no logra el objetivo propuesto, exprese las funciones trigonométricas que aparecen en términos de seno y coseno y luego realice las operaciones indicadas.

Otras recomendaciones adicionales son:

1. Memorice las identidades trigonométricas fundamentales.

2. Repase los procedimientos algebraicos estudiados relacionados con la resolución de sistemas de ecuaciones, hasta lograr un buen dominio de ellos.

3. Tome cada ejercicio a resolver como un juego y pruebe las distintas estrategias hasta lograr el triunfo.

4. Si efectúa operaciones en ambos lados de la ecuación, no introduzca errores; para evitarlo, toda operación que realice debe ser reversible.

A continuación presentamos ciertas variaciones de las identidades pitagóricas que se utilizan para demostrar una identidad trigonométrica o para simplificar una expresión trigonométrica.

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ $\cot^2 x = \csc^2 x - 1.$

Ejemplo 1

Simplifique la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}.$$

Solución

Para simplificar la expresión dada, es conveniente utilizar las identidades recíprocas, y luego realizar las operaciones indicadas.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\csc\theta}\right) + \cos\theta\left(\frac{1}{\sec\theta}\right)$$

$= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta\cos\theta$ $\rightarrow$ Identidad recíproca

$= \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$ $\rightarrow$ $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$

$= 1.$ $\rightarrow$ Identidad pitagórica

Luego, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1.$

Ejemplo 2

Simplifique la expresión

$$(\sec x - 1)(\sec x + 1).$$

Solución

$(\sec x - 1)(\sec x + 1) = \sec^2 x - 1$ $\rightarrow$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$= \tan^2 x.$ $\rightarrow$ Identidad pitagórica

En conclusión, $(\sec x - 1)(\sec x + 1) = \tan^2 x.$

- Utilizando la identidad anterior, calcule $(\sec\pi - 1)(\sec\pi + 1)$. ¿Es el resultado obtenido igual a $(1 - \sec^2\pi)^2$?

- ¿Es $(\sec\frac{\pi}{4} - 1)(\sec\frac{\pi}{4} + 1)$ igual a $\tan\frac{\pi}{4}$? ¿y a $\tan^2\frac{\pi}{4}$? ¿Por qué?

- Determine el valor de $(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 1)(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1)$ y $-\cos^2\frac{\pi}{2}$. ¿Los resultados obtenidos son iguales? ¿Cuál identidad conocida puede utilizar para justificar este resultado?

Ejemplo 3

Verifique la identidad

$$\frac{\sec t - \csc t}{\sec t + \csc t} = \frac{\tan t - 1}{\tan t + 1}.$$

Solución

Parta del lado izquierdo (porque parece más complicado) y exprese la secante y la cosecante en términos de coseno y seno respectivamente, luego multiplique la fracción obtenida por $\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t}$, este último artificio no está en las recomendaciones, pero se utiliza con frecuencia.

$$\frac{\sec t - \csc t}{\sec t + \csc t} = \frac{\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\operatorname{sen} t}}{\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\operatorname{sen} t}} = \frac{\operatorname{sen} t\left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\operatorname{sen} t}\right)}{\operatorname{sen} t\left(\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\operatorname{sen} t}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t}}{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t}} = \frac{\tan t - 1}{\tan t + 1}.$$

En la parte final de la demostración anterior se utilizó la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma en $\mathbb{R}$ y la definición de la tangente.

Observación

La identidad del ejemplo anterior es válida solamente para aquellos valores de t para los cuales todas las funciones trigonométricas que aparecen en ella están definidas y para $\tan t \neq -1$ y $\sec t \neq -\csc t$. ¿Para qué valores de t $\tan t = -1$?

Ejemplo 4

Verifique la identidad

$$\tan\alpha = \sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}.$$

Solución

Demostremos que el lado derecho de la ecuación es equivalente al izquierdo.

$$\sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} \quad \rightarrow \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{1+\operatorname{sen}\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)} \quad \rightarrow \text{Por sustracción}$$

$$= \frac{1+\operatorname{sen}\alpha-(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)} \quad \rightarrow \cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{sen}\alpha)} \quad \rightarrow \text{Simplificación}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha\cdot \quad \rightarrow \text{Definición de la tangente}$$

Así, $\sec\alpha - \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \tan\alpha$.

1. ¿Para qué valores de α es válida la identidad anterior?
2. Verifique que $\tan\frac{\pi}{3}$ es igual a $\sec\frac{\pi}{3} - \dfrac{\cos\frac{\pi}{3}}{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}$.

Otra técnica que a veces se utiliza para verificar una identidad trigonométrica consiste en reducir por separado cada lado de la ecuación a una misma expresión, teniendo cuidado que cada paso sea reversible, es decir, que si la expresión A se transformó en otra expresión B, a través de sustituciones trigonométricas ésta pueda reconvertirse en A invirtiendo el procedimiento utilizado para llegar a B. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

Ejemplo 5

Verifique la identidad

$$\frac{\tan^2\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\sec\beta-1}{\cos\beta}.$$

Solución

Simplifique el miembro izquierdo

$$\frac{\tan^2\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}}{1+\cos\beta} \quad \rightarrow \text{ Identidad fundamental}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}}{1+\cos\beta} \quad \rightarrow \text{ Identidad pitagórica}$$

$$=\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta\,(1+\cos\beta)} \quad \rightarrow \text{ División de fracciones}$$

$$=\frac{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)}{\cos^2\beta\,(1+\cos\beta)} \quad \rightarrow \text{ Factorización}$$

$$=\frac{1-\cos\beta}{\cos^2\beta}. \quad \rightarrow \text{ Simplificación}$$

Observe que cada paso que se da es reversible.

Transforme el lado derecho de la ecuación dada en $\frac{1-\cos\beta}{\cos^2\beta}$,

$$\frac{\sec\beta-1}{\cos\beta}=\frac{\frac{1}{\cos\beta}-1}{\cos\beta} \quad \rightarrow \text{ Identidad recíproca}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos\beta}{\cos\beta}}{\cos\beta} \quad \rightarrow \text{ resta con fracciones}$$

$$=\frac{1-\cos\beta}{\cos^2\beta}. \quad \rightarrow \text{ división con fracciones}$$

por tanto,

$$\frac{\tan^2\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\sec\beta-1}{\cos\beta}.$$

Note que en este caso también cada paso dado se puede revertir. Al inicio de esta unidad se le planteó la siguiente pregunta ¿Es toda ecuación una identidad? La respuesta es no.

Para demostrar que una ecuación no es una identidad se debe encontrar al menos un valor numérico de la variable para el cual la ecuación no sea verdadera. Ilustremos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6

Demuestre que la ecuación dada no es una identidad.

$$1 - \sec^2 x = \tan^2 x$$

Solución

El procedimiento acostumbrado es el de ensayo y error.

Si $x = \frac{\pi}{4}$, sustituyendo obtenemos

$$1 - \left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2 = -1. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1^2 = 1. \qquad (2)$$

Por (1) y (2) tenemos que la ecuación dada no es válida para $x = \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, no es una identidad.

1. Encuentre un valor distinto de $\frac{\pi}{4}$ para el cual la ecuación anterior no sea válida.
2. Intente encontrar un valor para el cual la misma ecuación sea válida.
3. Encuentre otras ecuaciones que no sean identidades.

Compruebe lo aprendido

I. Verifique cada identidad

1) $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

2) $\cos\theta \cdot \tan\theta = \operatorname{sen}\theta$

3) $\cot u = \dfrac{\csc u}{\sec u}$

4) $\sec t \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t$

1) $\operatorname{sen}\beta \cot\beta = \cos\beta$

2) $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

3) $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \cot\alpha = \csc\alpha$

4) $\csc u - \operatorname{sen} u = \cot u \cos u$

II. Simplifique las expresiones dadas

1) $\operatorname{sen}(-\theta) + \operatorname{sen}\theta$

2) $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$

3) $\sec(-u) \cdot \cos u$

4) $(\operatorname{sen} t - 1)(\operatorname{sen} t + 1)$

5) $1 - \tan^2(-\alpha)$

6) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$

7) $\dfrac{\cot\alpha}{\tan\alpha} + 1$

8) $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^2 x}$

Aplique los conocimientos adquiridos

I. Reduzca la expresión dada a una sola función trigonométrica.

1) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos x}$

2) $\dfrac{\sec^2\theta - 1}{\tan\theta}$

3) $\operatorname{sen} t + \cos t \cot t$

4) $\dfrac{\sec^2 u}{\cos u + \cos u \tan^2 u}$

II. Verifique las siguientes identidades

1) $\dfrac{\sec^2 2t - 1}{\sec^2 2t} = \operatorname{sen}^2 2t$

2) $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$

3) $1 - \cos^4 y = (2 - \operatorname{sen}^2 y) \operatorname{sen}^2 y$

4) $\operatorname{sen}^2\theta \cot^2\theta + \cos^2\theta \tan^2\theta = 1$

5) $\cos(-\theta) \csc(-\theta) = -\cot\theta$

6) $\dfrac{1 + \cos 3\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen} 3\alpha}{1 + \cos 3\alpha} = 2\csc 3\alpha$

7) $\dfrac{\sec^4 y - \tan^4 y}{1 + 2\tan^2 y} = 1$

8) $(\csc z - \cot z)^2 = \dfrac{1 - \cos z}{1 + \cos z}.$

III. Demuestre que las ecuaciones trigonométricas dadas no son identidades.

1) $\dfrac{\sec^2(-2t)+1}{\sec^2 2t} = \operatorname{sen}^2 2t$

2) $(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^3 = 1$

3) $\operatorname{sen} x = \sqrt{1+\cos^2 x}$

4) $\cot^2 u + \csc^2 u = 1$

5) $\operatorname{sen} x\,(\sec x) = 1$

6) $\operatorname{sen}\alpha = 1 - \cos\alpha.$

Actividad en grupo

a) Construyan identidades, partiendo de expresiones trigonométricas sencillas y transfórmenlas utilizando otras identidades y cualquier otro recurso algebraico.

b) Intercambien su trabajo con otro grupo con el fin de verificar las identidades creadas.

Ecuaciones Trigonométricas

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Cuándo dos ecuaciones son equivalentes?
2. ¿A qué se llama ecuación condicional?
3. ¿Qué es una ecuación lineal en x?
4. ¿A qué se le llama solución o raíz de una ecuación lineal en x?
5. ¿Qué significa resolver una ecuación lineal en x?
6. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal $ax + b = 0$, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$?
7. ¿A qué se llama ecuación cuadrática?
8. Mencione tres métodos para resolver una ecuación cuadrática.

9. La fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ nos permite resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

10. ¿Cómo se llama la expresión $b^2 - 4ac$?

11. Si $b^2 - 4ac > 0$ ¿cómo son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$?

12. Si $b^2 - 4ac = 0$, ¿qué ocurre con las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$? ¿qué se puede afirmar si $b^2 - 4ac < 0$?

Actividad en grupo

I. Intercambien las respuestas a las preguntas anteriores y utilicen esta información para resolver las siguientes ecuaciones:

1) $-5y + 4 = 3$

2) $\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}x$

3) $x^2 + 6x - 1 = x^2 - x + 6$

4) $3z^2 - 13z + 4 = 0$

5) $\frac{2p}{p-2} - 2 = \frac{-4}{p+2}$

6) $(x+5)^2 = 3$

7) $0{,}2\,t + 1{,}2 = 0{,}5$

8) $x^2 - b^2 = 0$, b constante

9) $s = 4s^2 - 1$

10) $7(t+1) - 2 = 5(t+1) + 2.$

II. Clasifiquen las ecuaciones anteriores en lineales o cuadráticas.

En este apartado analizaremos los métodos para resolver ecuaciones que contienen expresiones trigonométricas; algunos son los mismos que se utilizaron para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, pero antes aclaremos qué entendemos por una ecuación trigonométrica.

Una **ecuación trigonométrica** en una variable es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas que funcionan como incógnitas intermedias.

Las expresiones $\sec x \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}^2\alpha = 9$ y $\operatorname{sen} t - 1 = 0$ son ecuaciones trigonométricas. Además, todas las identidades trigonométricas son ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 1

Suponga que debe resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x = 0.$$

Su respuesta inmediata seguramente será $x = 0$, es una solución de esta ecuación; otra respuesta podrá ser $x = \pi$, y si recuerda la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (figura 1), dirá que son soluciones de esta ecuación todos aquellos valores x para los cuales $y = 0$, esto es, los ceros de la función dada por $y = \operatorname{sen} x$, que, por su periodicidad, quedó establecido que son infinitos en número. En general, se cumple que si una ecuación trigonométrica tiene una solución, entonces tiene infinitas soluciones.

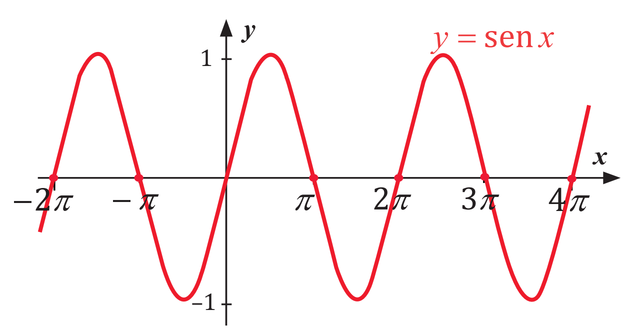


Figura 1

La situación cambia si le piden resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$ porque en este caso los únicos valores para x en $\operatorname{sen} x = 0$ son 0 y π.

Al igual que en algunas ecuaciones algebraicas, hay algunas ecuaciones trigonométricas cuyo conjunto solución es vacío. Por ejemplo, $\operatorname{sen} x = 4$ no tiene solución. ¿Por qué?

Los pasos siguientes pueden ser de gran ayuda para resolver ecuaciones trigonométricas.

¡Importante!

Solución de una ecuación trigonométrica en una variable es un número real que al sustituirlo por la variable nos permite encontrar los valores de las funciones trigonométricas que funcionan como incógnitas intermedias en la ecuación y estos valores convierten a la ecuación en una proposición verdadera.

Paso 1. Determine las soluciones particulares comprendidas en el período de la función trigonométrica que aparece en la ecuación.

Paso 2. Para obtener todas las soluciones de la ecuación sume cada uno de los múltiplos del período de la función a cada solución particular obtenida en el **paso 1**.

Ejemplo 2

Encuentre todas las soluciones de la siguiente ecuación trigonométrica, si x representa un número real

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solución

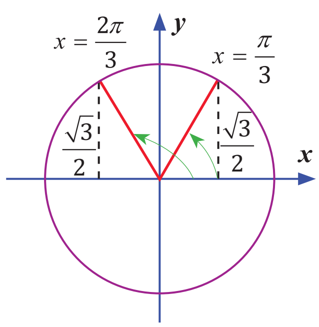


Figura 2

Paso 1. Dado que la función seno tiene período 2π, encontremos las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0; 2\pi]$; para ello utilicemos una circunferencia y el ángulo de referencia (figura 2).

En virtud de que $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{3}$. Por otro lado, $\operatorname{sen} x > 0$ implica que el lado terminal del ángulo x puede estar en el cuadrante I o II. De esta manera, las únicas soluciones para $0 \leq x \leq 2\pi$ son:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Paso 2. Como el período de la función seno es 2π, es posible encontrar todas las soluciones sumando cada uno de los múltiplos enteros de 2π a las soluciones encontradas en el **paso 1**.

Así, el conjunto solución de $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es:

$$\left\{ x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Encuentre el conjunto solución de la ecuación anterior utilizando la gráfica de la función seno.

2. Encuentre 4 soluciones particulares de la ecuación anterior, asignándole valores a n y que uno de ellos coincida con el año de la Cruzada Nacional de Alfabetización y otro con el año de la caída de la dictadura somocista.

¡Importante!

Las ecuaciones que no son identidades, esto es, aquellas que sólo se satisfacen para algunos valores, en la mayoría de los casos se resuelven con métodos algebraicos y la utilización de identidades trigonométricas por ejemplo; se puede usar métodos lineales, factorización y la fórmula cuadrática.

3. ¿Es π una solución de $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$? Justifique su respuesta.

Ejemplo 3

Encuentre el conjunto solución de $\cot z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solución

El período de la función cotangente es π, luego sólo es necesario encontrar un valor real z tal que $\cot z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Utilicemos la gráfica de la función cotangente en el intervalo $(0;\ \pi)$ (figura 3).

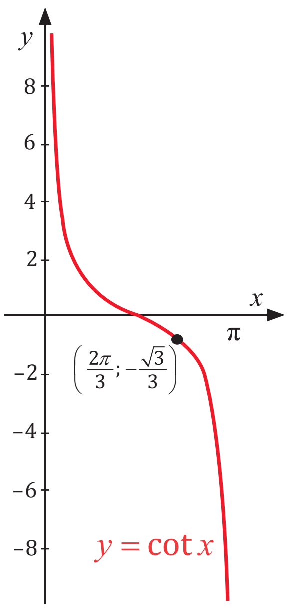


Figura 3

Resolvamos la ecuación

Paso 1. $\cot z = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad 0 < z < \pi.$

La gráfica de la función cotangente en este intervalo nos indica que $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, por lo tanto, una solución particular para la ecuación es $z = \frac{2\pi}{3}$ y es la única para $0 < z < \pi$.

Paso 2. Utilizando el hecho de que el período de la cotangente es π sumamos a la solución encontrada las cantidades $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, obteniendo el conjunto solución

$$\left\{z = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Recuerde

Para A y B conjuntos cualesquiera, decimos que A está incluido en B o es **subconjunto de B** si todo elemento de A pertenece a B y se denota por $A \subset B$.

1. ¿Qué característica de la función cotangente nos permite afirmar que en el intervalo $(0;\ \pi)$ la ecuación anterior solamente tiene una solución?

2. Encuentre el conjunto solución para la ecuación anterior utilizando una circunferencia unitaria.

3. Dé valores a n y encuentre 4 soluciones para la ecuación del ejemplo anterior. ¿Las soluciones encontradas son números racionales o irracionales?

4. ¿$\left\{z = \frac{2\pi}{3} + n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}'$?

¡Importante!

Con $\mathbb{Q}'$ denotamos el conjunto de los **números irracionales** que son todos aquellos números reales que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

5. Si $n = -10$ ¿cuál es la solución particular para la ecuación del ejemplo anterior? Encuentre la soluciones particulares en el caso $n = 2015$ y $n = 2017$.

6. ¿Es posible encontrar una solución para la ecuación $\cot z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ para un n que corresponda al año en que usted nació? ¿Es su edad actual solución de esta ecuación?

7. Dé 3 valores de z para los cuales $\cot z$ no está definida.

Ejemplo 4

Encuentre el conjunto solución de $\cos^2 t - 3\cos t = 4$.

Solución

Observe que esta ecuación es de segundo grado en $\cos t$.

Paso 1. Calculemos las soluciones particulares por factorización

$\cos^2 t - 3\cos t = 4$

$\cos^2 t - 3\cos t - 4 = 0$ $\rightarrow$ Igualando a cero

$(\cos t - 4)(\cos t + 1) = 0$ $\rightarrow$ Factorizando

$\cos t - 4 = 0$ o $\cos t + 1 = 0$ $\rightarrow$ Aplicando la propiedad $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0$ o $b = 0$

$\cos t = 4$ o $\cos t = -1$. $\rightarrow$ Despejando

Puesto que $\cos t \neq 4$ para cualquier número real t, esta ecuación no tiene solución. Luego, solamente consideramos $\cos t = -1$ que se cumple para $t = \pi$.

Paso 2. El conjunto solución de la ecuación es:

$$\{t = \pi + 2n\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Encuentre 4 soluciones particulares de la ecuación $\cos^2 t - 3\cos t = 4$, asignándole valores a n que tengan más de dos dígitos y que la suma de éstos sea múltiplo de 3.

2. Resuelva $x^2 - 3x = 4$ y compare con los resultados obtenidos para $\cos^2 t - 3\cos t = 4$.

3. ¿Tienen las dos ecuaciones anteriores las mismas soluciones?

Ejemplo 5

Encuentre las soluciones de la ecuación $2\cos 2\theta - \sqrt{3} = 0.$

Solución

Paso 1. Como coseno tiene período 2π, encontremos las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0;\, 2\pi)$.

$$2\cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$$
$$2\cos 2\theta = \sqrt{3}.$$

Despejando $\cos 2\theta$ tenemos

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sustituyendo 2θ por x se obtiene

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

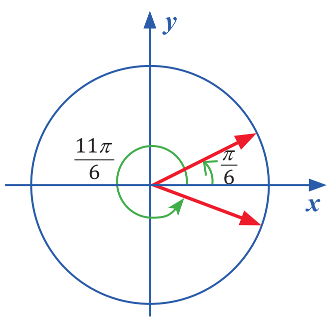


Figura 4

donde $\cos x > 0$, lo que significa que el ángulo de x radianes está en el cuadrante I o en el cuadrante IV. Por consiguiente, como se observa en la figura 4, las únicas soluciones para la ecuación dada en el intervalo $[0;\, 2\pi]$ son:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{11\pi}{6}.$$

Sustituyendo x por 2θ obtenemos

$$2\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad 2\theta = \frac{11\pi}{6}$$

por consiguiente,

$$\theta = \frac{\pi}{12} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{11\pi}{12}.$$

Paso 2. El conjunto solución de $2\cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$ es:

$$\left\{\theta = \frac{\pi}{12} + n\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{11\pi}{12} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ejemplo 6

En un parque de Managua se encuentra un resbaladero de 10 pies de altura con una base de 20 pies (figura 5).

a) Encuentre el ángulo γ en grados y radianes.

b) Si se desea aumentar la altura a 15 pies manteniendo la base de 20 pies ¿en cuánto debe incrementarse el ángulo de inclinación γ ?

Solución

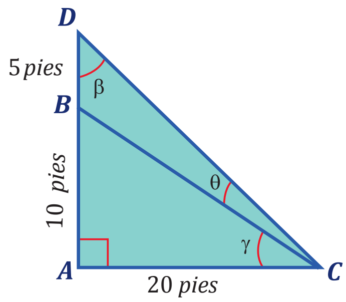


Figura 5

a) Tenemos que $\tan\gamma = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Calculemos γ utilizando $\tan^{-1}$, así:

$$\tan\gamma = \frac{1}{2} \text{ si y sólo si } \gamma = \tan^{-1}\frac{1}{2}.$$

Luego, $\gamma \approx 26{,}5^\circ = 26^\circ 30'$ o $\gamma \approx 0{,}46$ radianes.

b) Calculemos el valor del ángulo β (figura 5),

$$\tan\beta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3},$$

$\tan\beta = \frac{4}{3}$ implica que

$$\beta = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53{,}1^\circ = 53^\circ 6'.$$

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, para el triángulo ΔDAC tenemos

$$90^\circ + \beta + (\gamma + \theta) = 180^\circ.$$

Sustituyamos el valor de β y γ

$$90^\circ + 53{,}1^\circ + 26{,}5^\circ + \theta = 180^\circ.$$

Despejemos θ

$$\theta = 180^\circ - 169{,}6^\circ = 10{,}4^\circ = 10^\circ 24'.$$

En conclusión para que el resbaladero alcance una altura de 15 *pies*, γ debe incrementarse en aproximadamente $10^\circ 24'$.

1. Exprese los ángulos β y θ en radianes.

2. En el ejemplo anterior, si se quiere que el ángulo de inclinación sea $\frac{2}{3}$ de α, ¿qué altura debe tener el resbaladero?

3. Estará de acuerdo que, los resbaladeros anteriores no son apropiados para niños menores de 3 años; si se quiere construir uno que tenga una base de 20 pies y una altura de 3 pies, ¿cuál es la medida del ángulo de inclinación? Exprese este ángulo, primero en grados, minutos y segundos, y luego en radianes, además, convierta la altura a metros.

4. ¿Es posible construir un resbaladero con una base de 20 pies y el ángulo de inclinación igual a $89°$? Si es así, ¿cree usted que es adecuado para niños y para adultos?¿Cuál es la altura en kilómetros? ¿Cuál es la altura si el ángulo mide $89{,}9°$? ¿Y si mide $89{,}999°$? Calcule las diferencias de alturas para todos los casos expresando su respuesta en km.

Compruebe lo aprendido

I. Resuelva las siguientes ecuaciones, encontrando primero soluciones en el intervalo $[0;\, 2\pi)$.

1) $\operatorname{sen} x = -1$

2) $\cos\alpha = 1$

3) $2\cos\beta + \sqrt{3} = 0$

4) $\tan u = -\sqrt{3}$

5) $\sec z = \frac{1}{2}$

6) $\csc\gamma = 2$

7) $2\operatorname{sen} t + 1 = 0$

8) $\cot x = \sqrt{3}$.

Recuerde

Para a, b y $x \in \mathbb{R}$

$x \in [a;b) \Leftrightarrow a \leq x < b$

II. Verifique las soluciones encontradas en $[0;\, 2\pi)$ sustituyéndolas en las ecuaciones originales.

III. Exprese en grados las soluciones encontradas para los ejercicios 1), 3) y 5).

IV. Para las ecuaciones de los incisos pares encuentre 2 soluciones particulares que no pertenezcan al intervalo $[0; 2\pi)$

Actividad en grupo

Un método alternativo para encontrar las soluciones de $\csc\gamma = 2$ consiste en trazar en un mismo plano las gráficas de $y = \csc\gamma$ y de $y = 2$. Las soluciones de la ecuación dada son los valores de las ordenadas que corresponden a los puntos de intersección de las gráficas de ambas funciones.

- Resuelvan las ecuaciones del **1)** al **8)** en la serie **I** de la página 164, utilizando el método explicado anteriormente.

Para que ustedes resuelvan con éxito esta tarea, deberán graficar las funciones trigonométricas que aparecen en cada ecuación con la mayor exactitud posible. Esto significa que deben trabajar con responsabilidad, cuidado, orden y aseo.

Aplique los conocimientos adquiridos

I. Encuentre el conjunto solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $3\cos^2\theta - \cos\theta = 0$

2) $6\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 0$

3) $\frac{4}{3}\operatorname{sen} t = \cos t$

4) $\tan 4u = -1$

5) $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

6) $1 + \cot\beta = \csc\beta$

7) $\sec^2 z - 4 = 0$

8) $\left(2\operatorname{sen}\alpha + 1\right)\left(2\cos\alpha + 3\right) = 0.$

¡Importante!

Para resolver la ecuación $f(x) = c$, c un número real y f una función trigonométrica, se trazan en un mismo plano las gráficas de $y = f(x)$ y $y = c$.

Las soluciones de la ecuación dada son los valores de las ordenadas que corresponden a la intersección de ambas funciones.

II. Establezca relaciones entre los conjuntos de soluciones encontrados en el ejercicio anterior, por ejemplo, ¿es alguno subconjunto de otro? ¿hay conjuntos iguales? ¿existen conjuntos comparables? ¿es posible encontrar pares de conjuntos disjuntos?

III. Resuelva

1. Las poblaciones de conejos fluctúan en períodos cíclicos de 10 años. Suponga que el número de conejos en t años está dado por:

$$f(t) = 1\,000 \cos\frac{\pi}{5}t + 4\,000.$$

a) ¿Cuál es la amplitud, el desplazamiento vertical, y el período de la gráfica de f?

b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 10$.

c) Encuentre un valor de t para el cual la cantidad de conejos sea mayor que $4\,800$.

d) ¿Para qué valor de t la población de conejos es igual a 500?

e) ¿Hay algún valor de t para el cual la población de conejos sea cero? Justifique su respuesta.

f) ¿Para qué valores de t la cantidad de conejos es mínima?

g) ¿En qué intervalo la población de conejos decrece? ¿En qué intervalo crece?

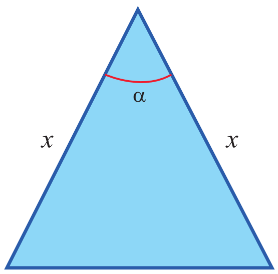


Figura 6

¡Importante!
El área de un triángulo isósceles con lados iguales de longitud x es

$$A = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} \alpha,$$

donde α es el ángulo formado por los dos lados iguales.

2. Si en el triángulo isósceles de la figura 6, la longitud de x es 6 metros y su área es $9\,m^2$, ¿cuál es el valor de α? Utilice la fórmula que aparece a la izquierda.

a) ¿Para qué valores de x el triángulo de la figura 6 tiene un área de $6{,}25\ m^2$, siendo $\alpha = 50°$?

b) ¿Existe un valor de α y x para los cuales este triángulo tenga un área de $20\ m^2$? Justifique su respuesta.

Resolución de triángulos rectángulos

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Puede la suma de dos ángulos de un triángulo ser menor de $90°$? ¿puede ser mayor de $90°$? Dé ejemplo.

2. Si un triángulo es rectángulo, ¿puede la suma de sus ángulos agudos ser mayor de $90°$? Justifique su respuesta.

3. En un triángulo cualquiera ¿es posible que la suma de las medidas de dos de sus lados sea menor que la medida del tercero? La diferencia de las medidas de dos lados de un triángulo ¿cómo es respecto al tercero?

Actividad en grupo

1. Dibujen tres triángulos rectángulos, cada uno con un ángulo agudo α de $48°$. Supongan que la medida de la hipotenusa del primer triángulo es de 10 centímetros de longitud, la del segundo y tercer triángulo el doble y el triple de la longitud de la hipotenusa del primero respectivamente.

En la tabla de la derecha *op, ady* e *hip* son abreviaturas de cateto opuesto, cateto adyacente, e hipotenusa, respectivamente.

2. A partir del ejemplo anterior completen los datos de la tabla de abajo

Δ	Hipotenusa	Cateto opuesto a α	Cateto adyacente a α	$\frac{op}{hip}$	$\frac{ady}{hip}$	$\frac{op}{ady}$
Δ_1	10	$7{,}43$				
Δ_2			$13{,}38$			
Δ_3		$22{,}3$				

3. Comparen sus resultados con otros grupos de estudiantes. Aprovechen para practicar el respeto a las ideas de los demás y los principios democráticos.

El respeto es la base del entendimiento entre los seres humanos; tenemos que aprender a respetar para que los demás nos respeten.

4. ¿Qué observan en las últimas tres columnas?

5. ¿Son iguales los valores de las razones trigonométricas para triángulos con un ángulo agudo de $48°$?

Conocer las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo tiene muchas aplicaciones en la resolución de problemas prácticos de la vida cotidiana y en variadas ciencias.

Al proceso de encontrar las longitudes de todos los lados y la medida de todos los ángulos de un triángulo se le llama **resolver el triángulo**.

En el caso particular de un triángulo rectángulo podemos resolverlo si conocemos:

1) Las longitudes de dos lados o,

2) La longitud de un lado y la medida de un ángulo.

Ejemplo 1

Para el triángulo de la figura 7 encuentre los valores de los lados y ángulos restantes.

Solución

Como los dos ángulos agudos son complementarios ¿Por qué?

$$\beta + 55° = 90°, \quad \beta = 90° - 55° = 35°.$$

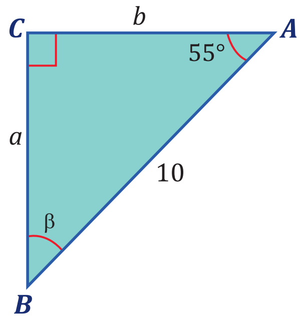


Figura 7

Utilicemos la función seno para encontrar el valor de b.

$$\text{sen } 35° = \frac{b}{10} \quad \rightarrow \quad b = 10 \text{ sen } 35°$$
$$\approx 10(0{,}5735)$$
$$\approx 5{,}73.$$

Para obtener el valor de a utilicemos la función coseno:

$$\cos 35° = \frac{a}{10} \quad \text{por consiguiente,} \quad a = 10 \cos 35°$$
$$\approx 10(0{,}8191)$$
$$\approx 8{,}19.$$

Encuentre a utilizando el teorema de Pitágoras y compare los dos resultados, calcule, además, $\text{sen}^2 35° + \cos^2 35°$, ¿el último valor que encontró es exacto o aproximado?¿a qué número entero se aproxima?

Ejemplo 2

Utilice las dimensiones de la pirámide de Khafre (figura 8) para encontrar el ángulo α y el lado c del triángulo ACB.

Solución

Encontremos el ángulo α con la ayuda de la función tangente:

$\tan \alpha = \dfrac{144}{108} \approx 1{,}333,$ esto implica que $\alpha = \tan^{-1}(1{,}333) \approx 53°.$

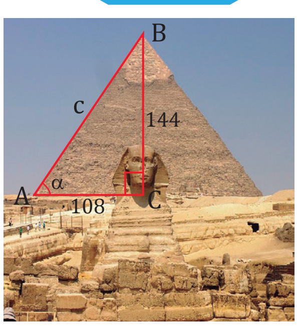


Figura 8

Para determinar c utilicemos el teorema de Pitágoras,

$$c = \sqrt{144^2 + 108^2} = \sqrt{32\,400} = 180.$$

Encuentre la medida del otro ángulo agudo. ¿Cuál es el área aproximada del triángulo ACB y de la cara lateral de la pirámide que aparece en la fotografía de la izquierda?

Ejemplo 3

Un hexágono regular está inscrito en un círculo de radio 6. Encuentre el perímetro P y el área A_{hex} de este hexágono.

Solución

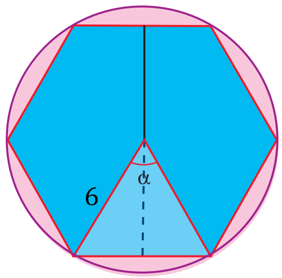


Figura 9

Calculemos el área del polígono, obteniendo primero el área del triángulo A_t de la figura 9. Como éste es isósceles apliquemos la fórmula $A_t = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}\alpha$.

$$A_t = \frac{6^2}{2}\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{36}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9\sqrt{3}.$$

En virtud de que el área del polígono A_{hex} es igual a 6 veces el área del triángulo A_t, obtenemos:

$$A_{hex} = 6A_t = 6\left(9\sqrt{3}\right) = 54\sqrt{3}.$$

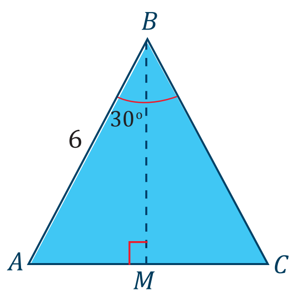


Figura 10

Para encontrar el perímetro del hexágono calculemos primero la base del triángulo ABC de la figura 10, que corresponde a uno de los lados del polígono:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{AM}{6} \quad \text{entonces,} \quad AM = 6(0{,}5) = 3$$

Como la medida de $\overline{AM}$ es $AM = 3$, AC es igual a 6. ¿Por qué? Para encontrar el perímetro del hexágono multipliquemos por 6 el resultado anterior. Así

$$P = 6 \cdot 6 = 36\,.$$

Ejemplo 4

Suponga que quiere calcular el ancho de cualquiera de nuestros ríos en una de sus riberas, sin atravesarlo. Para tal efecto, localice un árbol que esté ubicado en la orilla opuesta (punto C), luego coloque un objeto en la orilla donde usted se encuentra, pero en la recta perpendicular a ésta (punto B). Después, sitúe otro objeto (punto A) a una distancia $d = 10$ metros del objeto B. Por último, calcule el ángulo α del triángulo ABC.

Solución

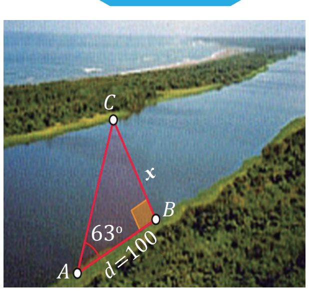


Figura 11

Utilicemos los datos de la figura 11 y calculemos de manera aproximada y en un punto concreto el ancho del río San Juan de Nicaragua.

De acuerdo con la figura 11

$$\tan 63^\circ = \frac{x}{100}$$

luego,

$$x = \tan 63^\circ\ (100) \approx 2\,(100) = 200\ m.$$

Compruebe lo aprendido

Resuelva los siguientes triángulos. Dibuje para cada ejercicio un triángulo rectángulo como el de la figura 12.

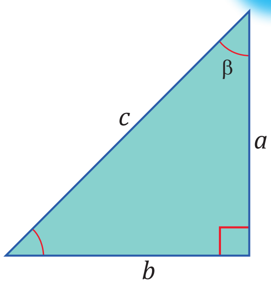


Figura 12

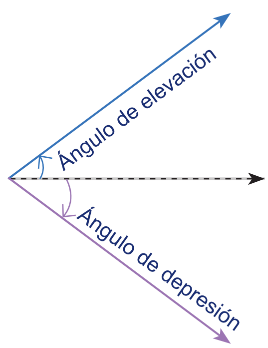
1) $\alpha = 40°$ $\quad c = 30$
2) $\beta = 55{,}2°$ $\quad c = 92{,}1$
3) $b = 1{,}4$ $\quad c = 2$
4) $a = 5$ $\quad \alpha = 61°10'$
5) $a = 10$ $\quad \alpha = 33{,}4°$
6) $\alpha = 38{,}3°$ $\quad a = 110$
7) $c = 7$ $\quad \beta = 46°$
8) $b = 8$ $\quad \beta = 32°\,20'$.

Aplique los conocimientos adquiridos

Resuelva

1) La parte superior de una escalera de 25 pies, está apoyada en el borde del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera desde la horizontal es de $48°$ ¿Cuál es la altura aproximada de la casa? ¿cuál es la distancia de la parte inferior de la escalera a la casa?

   El ángulo entre la línea de visibilidad de un observador y un objeto, y la línea horizontal recibe un nombre especial. Si la línea visual y el objeto están por encima de la horizontal, el **ángulo** se llama **de elevación** mientras que si la línea visual y el objeto están por debajo de la horizontal, el **ángulo** se denomina **de depresión (figura** 13**)**.



La línea punteada es la horizontal visual

Figura 13

2) De lo alto de un faro se ve un bote que navega en el mar con un ángulo de depresión de $70°$. Si el faro tiene una altura de 18 metros ¿a qué distancia estaba ubicado el bote al momento de la observación?

3) Juan se encuentra a 524 metros del volcán Momotombo y desde el suelo observa la parte extrema superior de éste. Si el ángulo de elevación es de aproximadamente $68°$, ¿Cuál es la altura aproximada de dicho volcán? Si él se encontrara a $1\ km$ y el ángulo de elevación fuese el mismo, ¿el resultado sería igual al obtenido anteriormente?

Actividad en grupo

I. Dibujen un segmento horizontal $\overline{AC}$ de longitud $3\,cm$ y uno vertical $\overline{CB}$, luego dibujen segmentos que formen con $\overline{AC}$ ángulos de

$$10°,\ 20°,\ 30°,\ 40°,\ 50°,\ 60°\ \text{y}\ 70°.$$

Para darse una idea observen la figura 14.

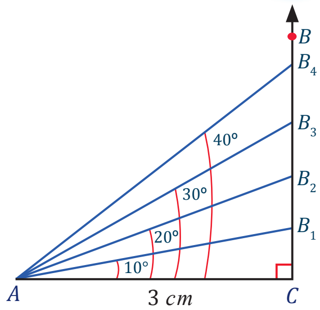


Figura 14

II. Midan las longitudes de los segmentos $\overline{CB_1}$, $\overline{CB_2}$, $\overline{CB_3}$, $\overline{CB_4}$, $\overline{CB_5}$, $\overline{CB_6}$ y $\overline{CB_7}$.

En la figura 14 se observa que $\measuredangle CAB_2$ es dos veces $\measuredangle CAB_1$.

III. ¿Es el segmento $\overline{CB_2}$ el doble del segmento $\overline{CB_1}$? ¿Es el segmento $\overline{CB_4}$ 4 veces el segmento $\overline{CB_1}$?

IV. Resuelvan todos los triángulos rectángulos que aparecen en la figura 14, comparen los resultado ¿Es el área del triángulo ACB_4 cuatro veces el área del triángulo ACB_1?

Ley de los senos

Recuerde, reflexione y concluya

A continuación veremos que no solamente se puede resolver un triángulo rectángulo, sino que con la ayuda de la que llamaremos ley de los senos también es posible resolver un triángulo oblicuángulo (figura 15).

¡Importante!

Un triángulo es oblicuángulo si ninguno de sus ángulos es recto.

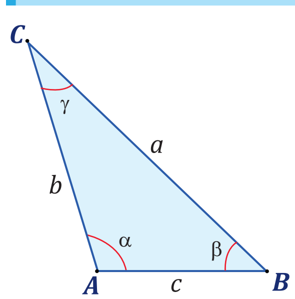


Figura 15

Ley de los Senos

Sea ABC un triángulo cualquiera con ángulos α, β, γ y lados opuestos correspondientes a, b y c, respectivamente.

Entonces
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

o equivalentemente,
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

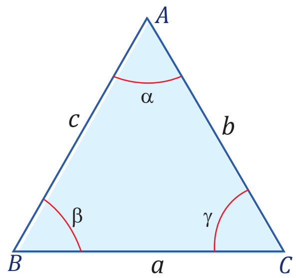


Figura 16

En general, podemos utilizar la ley de los senos para resolver triángulos si son conocidos:

1) Dos ángulos y cualquiera de los lados, o

2) Dos lados y un ángulo opuesto a algunos de estos lados.

Ejemplo 1

Resuelva el siguiente triángulo. Las posiciones de α, β, γ, a, b y c se muestran en la figura 16 con $\gamma = 80°$, $b = 4$, $c = 8$.

Solución

Observe que a partir de la ley de los senos podemos calcular $\operatorname{sen}\beta$ para luego determinar β:

$$\frac{\operatorname{sen} 80^{\circ}}{8} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{4} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}. \qquad (1)$$

Entonces, $\dfrac{\operatorname{sen} 80^{\circ}}{8} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{4}$.

Luego, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{4 \operatorname{sen} 80^{\circ}}{8} \approx 0{,}4924.$

Apliquemos seno inverso para encontrar β

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1} 0{,}4924 \approx 29°\,30'.$$

Encontremos el ángulo α utilizando el hecho que la suma de la medidas de los tres ángulos de un triángulo es $180°$:

$$\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 80° - 29°\,30' = 70°\,30'.$$

Utilizando (1) tenemos:

$$a = \frac{8 \operatorname{sen} 70^{\circ} 30'}{\operatorname{sen} 80^{\circ}} = 8\left(\frac{0{,}9426}{0{,}9848}\right) \approx 7{,}66.$$

Dibuje un triángulo con las medidas de los lados y ángulos encontrados en el ejemplo anterior. Utilice el cm como unidad de medida para los lados.

¡Importante!

La ley de los senos no se puede aplicar en los siguientes casos: solamente se conocen

a) los tres lados de un triángulo

b) dos lados y el ángulo incluido entre los dos lados.

Observación

Hay dos casos en que nos dan los datos necesarios para resolver un triángulo, pero no es posible encontrar solución.

Ejemplo 2

Resolver el triángulo indicado por

$$\gamma = 150°, \quad b = 7, \quad c = 5.$$

Solución

Utilicemos la ley de los senos para calcular $\operatorname{sen}\beta$

$$\frac{\operatorname{sen} 150^{\circ}}{5} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{7}.$$

Entonces,

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{(\operatorname{sen} 150^{\circ})\,7}{5} = \frac{7\,(0{,}5)}{5} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7.$$

Luego,

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}7) \approx 44^{\circ}\,26'$$

El valor obtenido para β es imposible porque $\alpha + \beta + \gamma$ debe ser igual a 180° y sólo $\gamma + \beta = 150^{\circ} + 44^{\circ}\,26' = 194^{\circ}\,26' > 180^{\circ}$.

Por lo tanto, no hay solución.

Ejemplo 3

Dos campesinos del norte de nuestro país viven en lugares diferentes A y B que distan entre sí $30\ km$ y decidieron viajar juntos desde A a la cabecera de su departamento (C) que está situada a 20 kilómetros de B. El ángulo BCA es de 115° (figura 17) ¿Cuántos kilómetros desde A deberán recorrer los campesinos para llegar a su destino?

Solución

Con $c = 30,\ a = 20,\ \gamma = 115^{\circ}$ apliquemos la ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} 115^{\circ}}{30} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{20}.$$

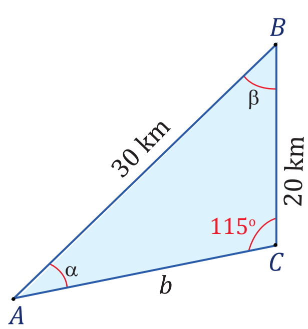


Figura 17

Así,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{20 \operatorname{sen} 115^{\circ}}{30} \approx 0{,}6042.$$

Luego,

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}6042) = 37{,}17^{\circ} \approx 37^{\circ}10'.$$

El ángulo β lo encontramos de la siguiente manera:

$$\beta = 180^{\circ} - 115^{\circ} - 37{,}17^{\circ} = 27{,}83^{\circ} \approx 27^{\circ}50'$$

Calculemos la distancia b de A a C. Sabemos que $a = 20$. Por la ley de los senos se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}.$$

Esto es,

$$\frac{\text{sen } 37^{\circ} 10'}{20 \; km} = \frac{\text{sen } 27^{\circ} 50'}{b}$$

$$b = \frac{\text{sen } 27^{\circ} 50'}{\text{sen } 37^{\circ} 10'}(20 \; km) = 15{,}45 \; km.$$

1. ¿Cuántos kilómetros recorrió el campesino que partiendo de su casa (punto B), pasó por A, para llegar a C?

2. Si en lugar de salir de A salieran de B ¿Cuántos kilómetros recorrería el campesino que vive en A y el que vive en B?

3. ¿Cuál es el plan más económico para que los amigos viajen a C, si deben utilizar un medio de transporte y viajar juntos? ¿gastarían menos si cada uno viaja a C desde donde vive?

4. Convierta a radianes las medidas de los ángulos encontrados en el ejemplo anterior.

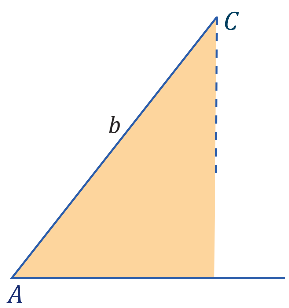


Figura 18

Recuerde

En un triángulo rectángulo ABC, $\text{sen } A = \frac{a}{b}$ luego $a = b \text{ sen } A$. En la figura 18 se muestra que es posible que a no coincida con la medida del segmento perpendicular de c al lado opuesto, esto es, $a < b \text{ sen } A$.

Caso ambiguo

En el ejemplo anterior conocíamos 2 lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados. Sucede algunas veces que dada la información del triángulo que se supone se va a resolver ocurre que, se pueden dibujar dos triángulos, no se puede formar un triángulo o como en el ejemplo antes mencionado se forma un solo triángulo. Esto estará en dependencia de la longitud de los lados y de la medida del ángulo dado.

Suponga que a y b son conocidos y α es el ángulo dado. En la figura 18 no se muestra el lado con medida a porque pueden suceder dos casos:

1) $a < b \text{sen } \alpha$, entonces no se forma triángulo, esto se sigue del hecho que $b \text{sen}\, \alpha$ es la medida del segmento perpendicular de C al lado opuesto y ésta es la distancia más corta de C a ese lado y si a es menor que ese valor, entonces no se forma triángulo.

2) b sen $\alpha < a < b$, entonces se forman dos triángulos. En la figura 19 se muestran los triángulos ABC y $A'B'C'$ para a entre $b\,\text{sen}\,\alpha$ y b. Este **caso** es llamado **ambiguo**.

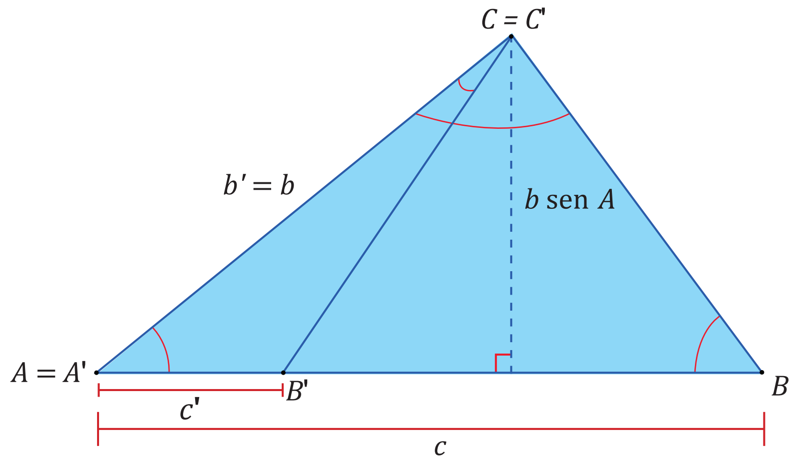


Figura 19

Actividad en grupo

I. Resuelvan el triángulo ABC si $a = 15\ cm$, $b = 18\ cm$ y $A = 33°30'$.

Sugerencia

Este es un caso ambiguo ¿Por qué? Deben dibujar los dos triángulos posibles y resolverlos.

II. Si mantienen los valores $a = 15\ cm$, $b = 18\ cm$, pero A es cualquier ángulo agudo. ¿Para qué valores de A el problema es un caso ambiguo? ¿si el ángulo A es obtuso, qué ocurre?

III. Den valores a a, b y A con las condiciones siguientes:

a) Se forman dos triángulos (caso ambiguo), esto es $b\,\text{sen}A < a < b$.

b) No se forma triángulo, que resulta cuando $a < b\,\text{sen}A$.

c) $a > b$, se forma solamente un triángulo.

IV. Hagan una figura para **a)**, **b)** y **c)** del ejercicio anterior y resuelvan los triángulos de los incisos **a)** y **c)**.

Ley de los cosenos

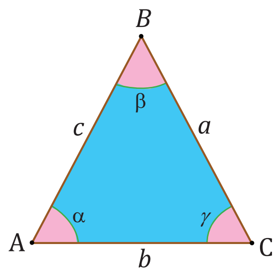


Figura 20

Cuando solamente conocemos los tres lados o dos lados de un triangulo y el ángulo entre ellos, no se puede utilizar la ley de los senos para resolverlo. En este caso utilizamos la ley de los cosenos.

Ley de los Cosenos

En cualquier triángulo ΔABC (Figura 20) se cumple

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

donde α, β y γ son los ángulos del triángulo y a, b y c son los lados correspondientes.

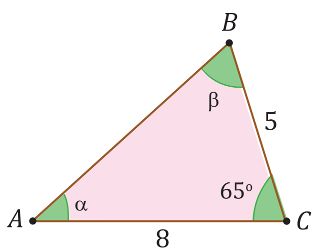


Figura 21

De forma sencilla la ley de los cosenos se puede expresar de la siguiente manera:

El cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el producto de esos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

Ejemplo 1

Resuelva el siguiente triángulo. Las posiciones de los ángulos y los lados se muestran en la figura 21.

$$\gamma = 65°, \quad a = 5, \quad b = 8.$$

Solución

Encontremos c aplicando la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= 5^2 + 8^2 - 2\,(5)\,(8)\,\cos 65° \\ &= 25 + 64 - 80\,(0{,}4226) \\ &= 89 - 33{,}808 \end{aligned}$$

por tanto, $c = \sqrt{55{,}192} \approx 7{,}43.$

Ahora aplicamos la ley de los senos para encontrar α:

$$\frac{\text{sen } 65^{\circ}}{7{,}43} = \frac{\text{sen } \alpha}{5}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{5 \text{ sen } 65^{\circ}}{7{,}43} \approx \frac{5\,(0{,}9063)}{7{,}43} \approx 0{,}61$$

luego,

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(0{,}61) \approx 37{,}59^{\circ} \approx 37^{\circ}35'$$

$$\beta = 180^{\circ} - 37{,}59^{\circ} - 65^{\circ} = 77{,}41^{\circ} \approx 77^{\circ}25'.$$

Ejemplo 2

Héctor ubica en un mapa de Nicaragua los puntos A, B y C que corresponden a tres lugares que quiere visitar por medio de una caminata. Él cuenta con la siguiente información: el punto A queda a 2,5 kilómetros al oeste del punto B y el punto C queda a 3,5 kilómetros al sur oeste de B y a 4,2 kilómetros de A. Ayúdele a encontrar a) la orientación de A hacia C y b) la orientación de B hacia C.

Solución

Tomando en cuenta la información dada en el problema y la figura 22 podemos afirmar que $a = 3{,}5\ km$, $b = 4{,}2\ km$ y $c = 2{,}5\ km$. La ayuda solicitada consiste en encontrar los ángulos MBC y $M'AC$.

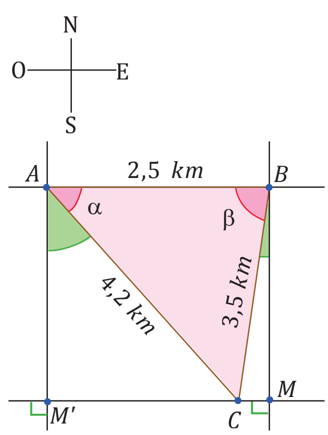


Figura 22

Utilizando la ley de los cosenos en el triángulo *ABC* calculamos el ángulo β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$(4{,}2)^2 = (3{,}5)^2 + (2{,}5)^2 - 2(3{,}5)(2{,}5)\cos\beta.$$

Luego,

$$\cos\beta = \frac{12{,}25 + 6{,}25 - 17{,}64}{17{,}5} = \frac{0{,}86}{17{,}5} \approx 0{,}04914\,.$$

Por lo tanto,

$$\beta = \cos^{-1}(0{,}04914) \approx 87{,}18^{\circ} \approx 87^{\circ}10'.$$

Necesitamos también conocer el ángulo α. Por la ley de los cosenos tenemos

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha.$$

Sustituyendo los valores dados obtenemos

$$(3,5)^2 = (2,5)^2 + (4,2)^2 - 2(2,5)(4,2)\cos\alpha.$$

Así,

$$\cos\alpha = \frac{6,25 + 17,64 - 12,25}{21} = \frac{11,64}{21} \approx 0,55430$$
$$\alpha \approx \cos^{-1}(0,55430) \approx 56,33^{\circ} \approx 56^{\circ}20'.$$

Tracemos dos segmentos perpendiculares desde los puntos A y B a la recta que contiene a C, y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$, en los punto M' y M (figura 22), los ángulos $M'AC$ y MBC son las orientaciones de A a C y de B a C respectivamente.
Observe que:

$$\begin{aligned}\measuredangle MBC &= 90^{\circ} - 87,18^{\circ} \\ &= 2,82^{\circ} \approx 2^{\circ}49'\end{aligned}$$

y $$\measuredangle M'AC = 90^{\circ} - 56,33^{\circ} = 33,67^{\circ} \approx 33^{\circ}40'.$$

En conclusión, la orientación de A a C es $S\,33^{\circ}40'\,E$ y de B a C es $S\,2^{\circ}49'\,O$.

Actividad en grupo

Ubiquen en un mapa político de Nicaragua los municipios de Siuna, Bonanza y Rosita y formen el denominado triángulo minero.

1. Investiguen las distancias lineales entre los municipios, esto es, los lados del triángulo minero.

2. Desde el punto de vista de la matemática, ¿es un triángulo el llamado triángulo minero?

3. Ubiquen en el mapa de Nicaragua los municipios de Estelí, Matagalpa y Jinotega. Formen un triángulo con vértices en estos municipios y resuelva, si es posible, este triángulo. Para cumplir con su tarea investigue, como en el caso anterior, las distancias lineales entre estos municipios.

Compruebe lo aprendido

I. Resuelva los siguientes triángulos usando la ley de los cosenos

Recuerde

El área A de un triángulo es $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$. donde a y b son las medidas de dos lados γ y el ángulo entre ellos.

1)	$a = 40$	$b = 50$	$c = 60$
2)	$a = 28$	$b = 35$	$\gamma = 49°$
3)	$a = 11{,}8$	$b = 15{,}6$	$\gamma = 34° 20'$
4)	$\beta = 100°$	$a = 22{,}3$	$c = 16{,}1$
5)	$\alpha = 162°$	$b = 11$	$c = 8{,}2$
6)	$a = 8$	$b = 10$	$c = 23{,}8$
7)	$a = 12{,}2$	$b = 19{,}1$	$c = 23{,}8$
8)	$\alpha = 60°$	$b = 14$	$c = 10.$

II. Utilice la información que aparece en el margen izquierdo para encontrar el área de los triángulos de los incisos **2)**, **3)**, **5)** y **8)**.

Aplique los conocimientos adquiridos

¡Importante!

La **milla náutica** es una unidad de longitud empleada en navegación marítima y equivale a $1\,852$ metros.
El **nudo** es una medida de velocidad. Equivale a una milla náutica por hora.

I. Un terreno tiene forma triangular con lados de $35, 40$ y 60 metros. Encuentre el ángulo interior más pequeño.

II. La fórmula del área de Herón afirma que un triángulo con lados a, b y c y semiperímetro $s = \frac{(a+b+c)}{2}$ tiene un área de $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

El área de un triángulo con lados $5{,}9$, $6{,}7$ y $10{,}3$ es $18{,}63$. Aplique la fórmula de Herón y verifique este resultado. Encuentre la altura de mayor longitud del triángulo.

III. Dos barcos parten del puerto de Corinto al mismo tiempo, uno navegando a 15 nudos y el otro a 12 nudos. El primero lleva una orientación $S42°O$ y el segundo $S10°E$. Después de 2 horas el primer barco queda varado y el otro va en su ayuda. ¿Cuánto demorará el segundo barco en llegar donde está el primero si viaja a 14 nudos? ¿qué rumbo debe tomar?

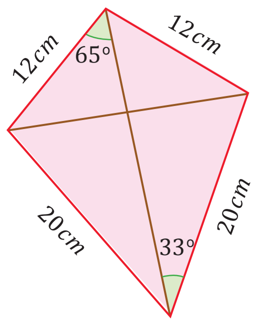


Figura 23

IV. Jairo compró un barrilete como el que se muestra en la figura 23. Encuentre las longitudes de las varas que aparecen en las diagonales.

V. Calcule el área del barrilete de 3 maneras distintas. ¿Cuál resultó ser la forma más fácil y rápida?

Fórmulas de suma y diferencia

La primera fórmula que consideraremos es la siguiente:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad (1)$$

Ejemplo 1

Verifique la identidad

$$\cos(\pi - t) = -\cos t.$$

Solución

Sustituyendo α por π y β por t en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\pi - t) &= \cos\pi\cos t + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen} t\\ &= -1\cos t + 0\operatorname{sen} t\\ &= -1\cos t\\ &= -\cos t.\end{aligned}$$

¡Cuidado!

$$\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta.$$

Así,

$$\cos(\pi - t) = -\cos t.$$

De manera análoga al ejemplo 1 vamos a obtener la fórmula para $\cos(\alpha + \beta)$, solamente escribimos

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$ y aplicamos la fórmula anterior.

Así,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - (-\beta)) &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Observe que se ha sustituido $\cos(-\beta)$ por $\cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta)$ por $-\operatorname{sen}\beta$ por ser coseno par y seno impar.

¡Cuidado!

En general,

$$\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta.$$

En conclusión,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

a) Enuncie en palabras la identidad anterior.

b) Encuentre valores para α y β de tal manera que $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$.

Ejemplo 2

Utilice la fórmula anterior para encontrar el valor exacto de $\frac{5\pi}{12}$.

Solución

Como $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

¡Importante!

Si $t \in \mathbb{R}$, se cumple:

$\cos(\pi + t) = -\cos t$

$\cos(2\pi + t) = \cos t$.

Verifíquelo utilizando la fórmula de la suma para el coseno.

Utilice el resultado anterior y responda.

1. ¿A qué es igual $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ y $-\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$?
2. ¿Es el resultado de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \left(-\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$ el neutro para la adición en los enteros?
3. ¿Cuál es el opuesto de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ en $\mathbb{R}$?
4. Calcule $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$. ¿Cuál es el su opuesto en $\mathbb{R}$?¿tiene inverso? Justifique su respuesta.

A las funciones seno y coseno se les llama cofunciones, igual nombre reciben la tangente y la cotangente; también son cofunciones la secante y la cosecante, y cada una de ellas cumplen las siguientes igualdades.

Si t es un número real, para el cual $\frac{\pi}{2}-t$ no indefine las funciones trigonométricas consideradas, entonces

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\operatorname{sen} t$

2) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cot t$

4) $\cot\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\tan t$

5) $\sec\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\csc t.$

Ejemplo 3

Probemos que $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cot t.$

Solución

Para lograr nuestro objetivo solamente necesitamos aplicar las identidades cocientes

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}=\cot t.$$

Para la demostración de la identidad dada además de la definición de la tangente y cotangente se utilizaron las identidades **1)** y **2)**.

¡Importante!

En todos los ejercicios a resolver t representa un número real cualquiera que no indefine la función trigonométrica considerada.

I. Demuestre las identidades restantes de la lista anterior.

II. ¿Es $\csc\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sec t$?

III. Utilice las identidades fundamentales y las igualdades anteriores para calcular:

a) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$

b) $1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{11}\right)$

c) $1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

d) $1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$

e) $1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)$

f) $1+\cot^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$

IV. Verifique que:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \neq \cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}.$

Utilicemos las fórmulas de las cofunciones **1)** y **2)** para obtener las fórmulas de la suma para seno.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

¡Importante!

Si $t \in \mathbb{R}$, se cumple:

$\operatorname{sen}(\pi+t) = -\operatorname{sen} t$

$\operatorname{sen}(2\pi+t) = \operatorname{sen} t.$

Verifíquelo utilizando la fórmula de la suma para el seno.

Luego,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

En la fórmula anterior sustituya $\alpha+\beta$ por $\alpha-\beta$ en la forma $\alpha+(-\beta)$ y obtenga

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

En resumen, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentre el valor exacto de la expresión

$$\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{13\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}.$$

Solución

Utilicemos la identidad $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ haciendo $\alpha=\frac{13\pi}{12}$ y $\beta=\frac{5\pi}{12}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{13\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} &= \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{12}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Observación

Como el valor que le piden es exacto no debe utilizar calculadora. ¿Por qué?

Si no recuerda el valor de la función seno en $\theta = \frac{2\pi}{3}$ puede utilizar su ángulo de referencia que se obtiene restando $\frac{2\pi}{3}$ a π, esto es, $\theta' = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Así,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

¡Cuidado!

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \neq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$$

y

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \neq \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta.$$

a) ¿A qué es igual $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{13\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$? ¿tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}$ el número resultante?

b) ¿Hay algún valor de α y β para los cuales $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$ o $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta$? Si es así, dé un ejemplo.

¡Cuidado!

En general,

$$\tan(\alpha+\beta) \neq \tan\alpha + \tan\beta.$$

Derivemos una fórmula para la expresión $\tan(\alpha+\beta)$ en términos de $\tan\alpha$ y $\tan\beta$, usando las fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.\end{aligned}$$

Dividamos numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$ considerando $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

¡Importante!

La fórmula de la suma de la tangente (1) es válida si $1 \neq \tan\alpha\tan\beta$.

Por lo tanto tenemos la siguiente fórmula

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}. \qquad (1)$$

Observación

La identidad anterior es válida para todos los valores de α y β para los cuales $\tan\alpha$, $\tan\beta$ y $\tan(\alpha+\beta)$ estén definidas.

- Obtenga la fórmula de $\tan(\alpha-\beta)$ en términos de $\tan\alpha$ y $\tan\beta$, sustituyendo β por $-\beta$ en la fórmula para $\tan(\alpha+\beta)$ y utilizando el hecho de que la tangente es impar.

En resumen tenemos

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

- Utilice los resultados anteriores para obtener una fórmula de $\cot(\alpha+\beta)$ y $\cot(\alpha-\beta)$. Recuerde que la tangente es la recíproca de la cotangente.

Ejemplo 5

Utilizando solamente una función trigonométrica reescriba la expresión.

$$\frac{\tan 5\theta+\tan 6\theta}{1-\tan 5\theta\,\tan 6\theta}.$$

Solución

Sabemos que

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\tan 5\theta+\tan 6\theta}{1-\tan 5\theta\,\tan 6\theta}=\tan(5\theta+6\theta)=\tan 11\theta\,.$$

1. Utilizando la fórmula para $\tan(\alpha+\beta)$ ¿qué puede decir acerca de los valores $\tan(\alpha+\beta)$ y $\tan\alpha+\tan\beta$? ¿son iguales o distintos? ¿hay valores de α y β tal que los valores anteriores sean iguales?

2. Verifique el resultado anterior si $\theta=0^{\circ},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{11},\ \frac{\pi}{6}$.

3. ¿Existe $\frac{\tan 5\theta+\tan 6\theta}{1-\tan 5\theta\,\tan 6\theta}$ si $\theta=\frac{\pi}{22}$? Dé 3 valores de θ para los cuales esta expresión esté definida.

¡Importante!

Para $u\in\mathbb{R}$ y que no indefine las funciones trigonométricas consideradas se cumple:

$$\tan(\pi-u)=-\tan u$$
$$\cot(\pi-u)=-\cot u$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=-\cot u$$
$$\cot(\pi+u)=\cot u$$
$$\tan(\pi+u)=\tan u.$$

¡Importante!

Otras fórmulas que se obtienen elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones de ángulo medio para seno, coseno y tangente son:

$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$,

$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

y

$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$,

respectivamente.

A partir de las fórmulas de la suma estudiadas anteriormente otras fórmulas pueden ser deducidas, por ejemplo, las del ángulo doble y del ángulo medio, las cuales son:

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Fórmulas de ángulo medio

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Ejemplo 6

Demuestre: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

Solución

En virtud de que $2\alpha = \alpha + \alpha$, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha) &= \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha.\end{aligned}$$

Calcule $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ¿Son iguales los resultados? ¿qué valor de los anteriores es igual a $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$? ¿por qué?

Ejemplo 7

Verifique que $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Solución

Esta identidad se puede obtener a partir de

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

de la siguiente manera. Despejemos $\cos^2\alpha$

$$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}.$$

Extraigamos raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación para obtener

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}.$$

Sustituyamos α por $\frac{\alpha}{2}$,

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} + 1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

1. ¿Qué propiedad de la suma de números reales se utilizó al final de la demostración del ejemplo anterior?

2. Verifique las fórmulas restantes para ángulos dobles y medios de la página anterior.

Observación

En las fórmulas con doble signo, la elección de uno de ellos está determinada por el intervalo en que esté $\frac{\alpha}{2}$.

Ejemplo 8

Use una de las fórmula del ángulo medio para calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solución

En virtud de que $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$ obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Observe que tomamos el signo positivo porque $\frac{\pi}{8}$ está en el primer cuadrante y ahí el seno es positivo.

A continuación presentamos las fórmulas que nos permiten reescribir un producto de funciones trigonométricas como una suma.

1) $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$

2) $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$

3) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

4) $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$

Demostremos **4)** iniciando del lado derecho

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right]$$
$$=\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

En la verificación de la identidad anterior se utilizaron las fórmulas para $\cos(\alpha-\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$ y a continuación, se simplificó.

De manera análoga al ejemplo anterior, verifique las fórmulas restante **1)**, **2)** y **3)**

Ejemplo 9

Escriba el producto $\operatorname{sen}t\cos 2t$ en forma de suma y seguidamente trace la gráfica de la función dada, como una suma de funciones.

$$f(t)=\operatorname{sen}t\cos 2t.$$

Solución

Utilizando la fórmula **1)** tenemos

$$\operatorname{sen}t\cos 2t=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(t+2t)+\operatorname{sen}(t-2t)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}3t+\operatorname{sen}(-t)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}3t-\operatorname{sen}t)$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{sen}3t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}t.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}t\cos 2t=\frac{1}{2}\operatorname{sen}3t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}t.$$

1. Justifique cada paso del ejemplo anterior.

Ahora trazamos la gráfica de f sumando las coordenadas y de las funciones resultantes $f_1(t) = \frac{1}{2}\text{sen } 3t$ y $f_2(t) = -\frac{1}{2}\text{sen } t$. Las gráficas de estas tres funciones aparecen en la figura 23.

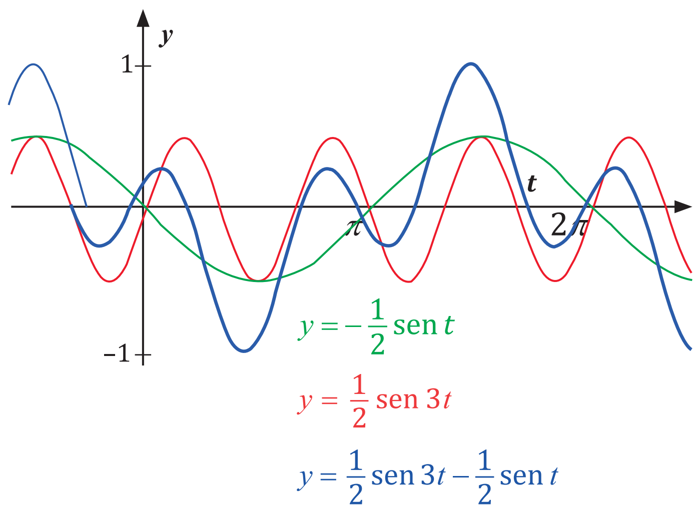


Figura 23

2. ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función f?

3. ¿$(0; 0)$ es punto de la gráfica de f?

4. Encuentre 3 ceros de la función f en el intervalo $[0; 2\pi]$.

Las siguientes fórmulas nos permiten escribir sumas de funciones trigonométricas como productos.

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \text{ sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Compruebe lo aprendido

I. Simplifique cada expresión

1) $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

2) $\operatorname{sen}20^{\circ}\cos 15^{\circ}-\cos 20^{\circ}\operatorname{sen}15^{\circ}$

3) $\cos 175^{\circ}\cos 25^{\circ}+\operatorname{sen}175^{\circ}\operatorname{sen}25^{\circ}$

4) $\cos^2\left(\frac{3t}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{3t}{2}\right)$

5) $\frac{1-\cos 4\theta}{2}$

6) $\frac{\tan 12^{\circ}+\tan 33^{\circ}}{1-\tan 12^{\circ}\tan 33^{\circ}}$.

Ejercicios finales de la Unidad

1. Un **triángulo** que tiene las medidas de sus lados y área enteros se llama **de Herón**. Investigue si el triángulo cuyos lados miden 5, 5 y 8 es de Herón. Encuentre la medida de los ángulos interiores de dicho triángulo.

2. Sea el triángulo ABC cuyos ángulos miden $40°$, $60°$ y $80°$. Dibuje tres triángulos no congruentes que cumplan la condición anterior. ¿Son triángulos semejantes? Justifique su respuesta. ¿Se pueden resolver cada uno de ellos? Si no es posible, mida de manera aproximada uno de los lados de cada triángulo encuentre la medida de los otros dos lados.

3. Resuelva el triángulo cuyas medidas se muestran en la fotografía de la derecha, y utilice el hecho que las diagonales del rectángulo se bisecan para resolver el triángulo que aparece a la izquierda.¿Cuál es la distancia del piso al asiento?

14,5 pulg

4. Resuelva el triángulo ABC y calcule su área utilizando la fórmula A_t= *la mitad de la semisuma de las longitudes de los lados por el seno del ángulo entre ellos*.
Haga un dibujo para cada inciso.

a. $A=33{,}86°$ $\quad b=3\,629\ cm$
$c=2\,767\ cm.$

b. $B=90°$ $\quad c=30{,}4\ pulg$
$a=50{,}4\ pulg.$

c. $C=143{,}5°$ $\quad a=20{,}3\ km$
$b=22{,}7\ km.$

d. $A = 40{,}73°$ $b = 1{,}36\ Dm$ $c = 11{,}1\ m.$

e. $B = 90°$ $a = 150\ dm$ $C = 32°.$

5. Para el ejercicio anterior, compruebe que al calcular el área utilizando la fórmula $A_t = \frac{1}{2}bh$ se obtiene el mismo resultado.

6. La expresión $\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} A}$ es válida para cualquier triángulo ABC con los lados correspondientes a, b y c. Verifíquela para los incisos **a)**, **c)** y **d)** del ejercicio **4**.

7. El dueño de un terreno da las siguientes medidas de su propiedad: $B=111°$, $a=48{,}83\ m$, $b=21{,}32\ m.$ Sin utilizar la ley de los senos conteste justificando. ¿Con los datos anteriores puede formar un triángulo ABC? Intente utilizar la ley de los senos. ¿Qué ocurre?

8. Dé un conjunto de 3 elementos que cumplan las siguientes condiciones.

a. Cada uno de los elementos representa la medida de un ángulo.

b. Los tres elementos representan la medida de los segmentos.

c. 2 elementos representan la medida de segmentos y uno la medida de un ángulo

9. Determine con cuál de los conjuntos del ejercicio **8.** se puede dibujar un único triángulo, ningún triángulo o dos triángulos.

10. ¿Puede, utilizando la ley de los senos, resolver el triángulo con valores $a = 5$, $b = 4$ y $c = 7$. ¿Qué dato hace falta? Encuéntrelo y luego calcule los otros valores aplicando esta ley.

11. El diamante de un cuadro de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado, con vértices la meta y las otras bases. Si la distancia del montículo a la primera es $63{,}7\ pies$, encuentre la distancia del montículo a las otras bases.

12. Resuelva cada uno de los siguientes triángulos:

a. $AB = 29{,}8\ Dm$, $BC = 0{,}324\ km$, $AC = 4\,210\ dm.$

b. $a = 3{,}21\ pulg$, $b = 6{,}71\ pulg$, $C = 32°15'20''$.

c. $a = 72\ pulg$, $b = 86{,}4\ cm$, $c = 5\ pies.$

13. Aplicando la fórmula de Herón calcule el área de los triángulos del ejercicio **12.**

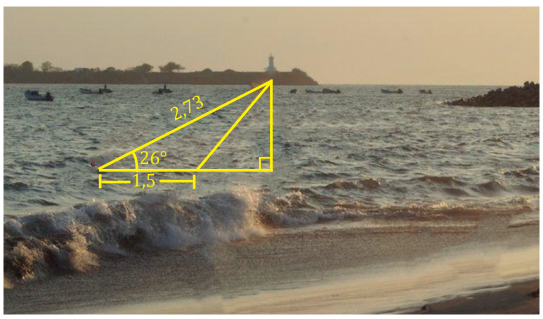
14. Un **triángulo** es **perfecto** si las medidas de sus lados son números enteros y su área es igual a su perímetro. De ejemplo de uno de estos triángulos y encuentre la medidas de sus angulos internos.

Investigue cuales de los siguientes triángulos son perfectos, los datos que se dan representan los lados del triángulo.

$a = 9$, $b = 5$ y $c = 5.$

$a = 28$, $b = 47$ y $c = 58.$

15. Un pasajero de un bote que navega paralelamente a la costa ve el faro de Corinto a un ángulo de $26°$ desde la dirección que lleva. Después que el bote recorre $1{,}5\ km$ más, el ángulo ha aumentado a $51{,}33°$. En este momento, ¿cuál es la distancia del bote al faro?¿cuál es la distancia aproximada del faro a la costa? Utilice la ley de los cosenos, además analice si es un caso ambiguo de la ley de los senos.



16. Explique qué técnica o recurso utilizaría para resolver la siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[-2\pi; 2\pi]$.

a) $\cos x + 1958 = 1959$

b) $\cot^2 z = 4\cot z - 2$

c) $55\cos^2 x - 51\cos x - 1 = 0$

d) $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta = 1$

e) $2017\sec^2 x - 2018\sec x = 0$

f) $\tan^2\gamma - 4\tan\gamma = -4.$

17. Investigue la ley de las tangentes y verifique que se cumple par el triángulo ABC con los siguientes datos

a. $\alpha = 40°,\quad b = 7,\quad a = 25,\quad \beta = 63°$

b. $\alpha = 60°,\quad a = 19,\quad b = 8,\quad \beta = 35°$

c. $\alpha = 80°,\quad a = 15,\quad b = 5,\quad \beta = 20.$

18. Un circuito eléctrico $V = \cos 2\pi t$, modela la fuerza electromotriz en *volts* en t segundos.

a) Encuentre t, $0 \le t \le \frac{1}{2}$ si $V = 0$, $V = \frac{1}{2}$.

b) Es posible encontrar t para $V=1{,}0007$.

c) Si $t = \frac{1}{2}$ y $t = 0$, ¿cuál es el valor V en cada caso?

d) Calcule

$$\frac{V\left(\frac{1}{4}\right)}{V(0)},\quad V\left(\frac{1}{3}\right)+V(0)+V\left(\frac{1}{2}\right),\quad \frac{V\left(\frac{1}{3}\right)}{V\left(\frac{1}{2}\right)}$$

¿Existe $\dfrac{V(0)}{V\left(\frac{1}{4}\right)}$?

e) Exprese V en términos de secante y seno.

f) Considere a V como una función de t y complete la tabla.

t	0			$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$V(t)$	10	$\frac{1}{2}$	0			

g) En un sistema de coordenadas ubique los puntos de la tabla anterior y únalos con una curva suave.

h) ¿La curva trazada en el inciso **g.** corresponde a una onda cosenoidal completa? ¿Puede a partir de la gráfica obtener el período y la amplitud de V?

19. Conteste verdadero o falso, justificando

a. $\tan\theta + \cot\theta = 2$ es válida para $\theta = 45°$, luego la ecuación es una identidad.

b. Todas las identidades tienen un número infinito de soluciones.

c. $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y

$\sec(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

d. $\cos(2\beta) + \operatorname{sen}^2(-\beta) = \cos^2\beta$.

e. $\tan(-\alpha) + \tan\alpha + 1 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha$.

f. $\cos\alpha + \cos\beta = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

g. En un triángulo cualquiera el lado más largo es opuesto al ángulo mas grande por lo tanto en un triángulo rectángulo el lado más grande es opuesto al ángulo de $90°$ grados.

h. Dado tres segmentos cualesquiera siempre es posible formar un único triángulo.

i. Los datos $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\delta = 80°$ determinan un único triángulo.

j. No se puede resolver un triángulo utilizando la ley de los cosenos si se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, pero si por la ley de los senos.

k. $\dfrac{\pi}{3}$ es solución de la ecuación $\operatorname{sen}\theta - \cos 2\theta = 0$.

l. $\sec^2\beta - \tan 2\beta + 2 = 2\tan\beta$ es una identidad.

20. El voltaje común de la corriente eléctrica domiciliar está dada por la formula $V = 163\operatorname{sen} wt$ siendo w la rapidez angular (en radianes por segundo) del generador de una planta eléctrica y t es el tiempo.

a. Exprese V en términos de cosecante, coseno, y secante.

b. Utilice $w = 120\pi$ y calcule V para $t = 0, \dfrac{1}{60}, \dfrac{1}{80}, \dfrac{1}{120}, \dfrac{1}{240}$.

c. Exprese los resultados del inciso **b.** como pares ordenados, ubíquelos en un sistema de coordenadas y únalos con una curva suave.

d. ¿Cuál es el período y la amplitud de la función dada por

$$V(t) = 163\operatorname{sen} 120\,\pi t?$$

e. Si $t \in \left[0; \dfrac{1}{60}\right]$ y

$V(t) = 163\operatorname{sen} 120\,\pi t,$

¿para qué valor de t se alcanza el máximo voltaje? ¿Cuál es este máximo? ¿Cuál es el mínimo voltaje en este intervalo?

f. A partir de los resultados del inciso **b.** calcule:

$$\left[V\left(\frac{1}{60}\right) + V\left(\frac{1}{80}\right)\right]V\left(\frac{1}{120}\right),$$

$$\left[V\left(\frac{1}{80}\right)\right]^2 - \left[V\left(\frac{1}{120}\right)\right]^3,$$

$$\sqrt{\left[V\left(\frac{1}{80}\right)\right]^3 - \left[V\left(\frac{1}{120}\right)\right]^2}$$ y

$$V\left(\frac{1}{240}\right)V(0).$$

21. Complete, justificando.

a. Para un triángulo ABC, el área está dada por

$A_t =$ ________ $\operatorname{sen}\alpha$ o

$A_t =$ ________ $\operatorname{sen}\beta$ o

$A_t =$ ________ $\operatorname{sen}\delta$.

b. $2\operatorname{sen}^2\theta - 1 = -\cos^4\theta +$ ________

c. $\cos(135°) = (\cos\_\_)(\cos\_\_) - (\cos\_\_)(\cos\_\_)$.

d. Si $\theta \in [0°; 90°]$, entonces $[\cos(90° - \theta)]^2 =$ ______

e. sen ______ $= \cot($ ______ $+ 2\alpha)$.

f. $\theta =$ ____ es solución de la ecuación $\cot\theta = \csc\theta \cdot \cos\theta$.

g. No es cierto que $\theta = 0$ es solución de la ecuación $\cos\theta =$ ________________ .

h. Toda identidad trigonométrica es una ________ .

i. La expresión $\cos(20° - \theta)$ en función de θ es ________.

j. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$ _____.

17. Utilice el lenguaje común para enunciar la ley de los senos y cosenos.

22. Explique por qué las siguientes ecuaciones trigonométricas no tienen solución. No use calculadora.

a) $2\operatorname{sen} x = 7{,}5$

b) $4\sec\gamma = 2\pi$

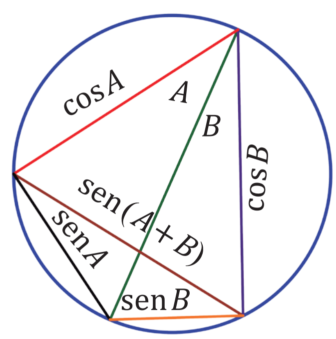
c) $-\dfrac{3\pi}{2} + \tan(-\theta) = -2\pi$

d) $10{,}58\cos\theta + 11{,}11 = 0$

e) $\dfrac{1}{2}\sec^{-1}\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$

f) $\dfrac{\cot(-x)}{\pi} = 1$.

El círculo de la figura de abajo tiene diámetro 2, investigue si las longitudes de los segmentos son como se muestran. ¿Haga los cálculos para una circunferencia de diámetro 1, 3 y 4? ¿Dependen estas logitudes del diámetro del círculo?



Por simple inspección explique porque no existe un triángulo ABC con los siguientes datos

a. $\alpha = 40°$, $b = 7$, $a = 25$, $\beta = 63°$

b. $\alpha = 60°$, $a = 3$, $b = 19$, $\beta = 35°$

c. $\alpha = 80°$, $a = 6$, $b = 8$, $\beta = 20°$.

d. $\alpha = 40°$, $b = 7$, $\delta = 100°$, $\beta = 63°$

e. $\alpha = 60°$, $a = 3$, $\delta = 95°$, $\beta = 35°$.

Sistema de ecuaciones lineales con tres variables

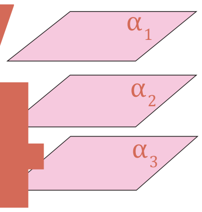
Unidad 4

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través de la Empresa Nicaragüense de Alimentos Básicos (ENABAS) ha distribuido un total de 70 mil libras de frijoles en los siete distritos de la capital, a través de los puestos de venta móviles que ha dispuesto el Gobierno Sandinista mediante el Plan Especial de Frijoles Solidarios, con el objetivo de brindar a la población un producto de calidad y a bajos precios, lo que representa un ahorro económico considerable para los consumidores.

Fuente: 19 digital.
08 de Mayo 2 014.

Unidad 4

Sistema de Ecuaciones lineales con tres variables



Introducción

Esta unidad es una generalización inmediata de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En nuestro caso tratamos sistemas de tres o cuatro ecuaciones lineales con tres o cuatro variables respectivamente, resueltos con el método de Gauss o con determinantes. Las operaciones entre matrices sirven para resolver estos sistemas de una manera más cómoda y elegante.

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué es una ecuación lineal con dos variables?

2. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de la forma $ax + by = c$, a, b y c números reales? Analice los distintos casos para valores nulos de a, b o c.

3. ¿Cuál es la interpretación geométrica del conjunto solución de una ecuación lineal con dos variables?

4. ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos variables?

5. ¿Cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales con dos variables son equivalentes?

6. ¿Qué métodos conoce para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas? Explíquelos.

7. Desde el punto de vista geométrico ¿qué representa la solución de un sistema de ecuaciones con dos variables?

8. ¿Todo sistema de ecuaciones lineales tiene solución?

9. ¿Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables?

10. ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es compatible? ¿cuándo es incompatible?

11. ¿Qué tipo de transformaciones puede realizar en un sistema de ecuaciones lineales con dos variables que lleven a un sistema equivalente al primero?

¿Sabía qué?

Hace cerca de 4 000 años los matemáticos babilonios resolvían ecuaciones de primer y segundo grado, y algunas cúbicas. También resolvían ciertos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Actividad en grupo

I. Encuentren las soluciones de los sistemas de ecuaciones dados, utilizando los métodos conocidos.

1. $\begin{cases} 2x+3y = 2 \\ 3x-2y = -4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{1}{5}x - 3y = -25 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y = 6 \\ 0{,}5x + y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3r - 4s = 2 \\ -6r + 8s = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \pi x + \sqrt{2}\,y = 1 \\ 2\pi x - \sqrt{3}y = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2y - 3z = 5 \\ -6y + 9z = 15. \end{cases}$

II. Clasifiquen los sistemas anteriores en compatibles e incompatibles.

III. Encuentren gráficamente las soluciones para los sistemas anteriores y compárenlas con las obtenidas algebraicamente.

IV. Obtengan dos sistemas de ecuaciones equivalentes al dado en el ejercicio **1)** aplicando el método de reducción. Grafiquen las ecuaciones de los sistemas encontrados y comparen estas gráficas con las de las ecuaciones del sistema **1)**; observen que aunque las gráficas son distintas todos los sistemas tienen la misma solución, esto es, el mismo punto de intersección.

V. ¿Qué ocurre con las gráficas de las ecuaciones del sistema del ejercicio **2)** ? ¿se intersecan?

¿Sabía qué?

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales le corresponde al álgebra lineal, siendo ésta un área de la matemática que se utiliza en la economía, la ingeniería, la física, etc.

Usted está familiarizado con el concepto de ecuación lineal con una o dos variables y aprendió a resolver sistemas de dos ecuaciones con dos variables, aplicando diferentes métodos, sin embargo muchos modelos matemáticos que sirven para describir fenómenos estudiados por la ciencia y situaciones de la vida cotidiana involucran ecuaciones y particularmente sistemas de tres o más ecuaciones lineales con tres o más variables.

Para dar continuidad al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en esta ocasión resolveremos **sistemas lineales con tres variables.**

Supongamos que nos piden escribir mediante una ecuación el siguiente enunciado.

"Los salarios de Brenda y Jorge suman $12\,000$ córdobas".

Designemos por x el salario de Brenda y por y el salario de Jorge, luego tenemos.

$$x + y = 12\,000,$$

que es una ecuación lineal con dos variables.

Cambiemos el enunciado anterior por el siguiente.

"Los salarios de Brenda, Jorge y Claudia suman $16\,500$ córdobas".

Representemos por x, y y z los salarios de Brenda, Jorge y Claudia respectivamente. Entonces

$$x + y + z = 16\,500. \qquad (1)$$

Esta es una ecuación lineal con tres variables. Observe que si asignamos valores a dos de las tres variables podemos determinar el valor de la tercera, un ejemplo de esto aparece en la columna de la izquierda.

Si los salarios de Brenda y Claudia ascienden a $4\,200$ y $5\,200$ córdobas respectivamente entonces se obtiene que

$4\,200 + y + 5\,200 = 16\,500$

de donde

$y = 16\,500 - 4\,200 - 5\,200$

$= 7\,100$

sería el salario de Jorge.

Si los salarios de Brenda y Jorge son $3\,200$ y $6\,500$ córdobas respectivamente ¿cuál es el salario de Claudia?

En general,

Una **ecuación lineal con tres variables** es una expresión de la forma

$$ax + by + cz = d \qquad (2)$$

donde a, b, y c son constantes reales no todas nulas y d un número real.

Recuerde

Una **proposición** es una expresión que en un momento y lugar dado es verdadera o falsa pero no ambos a la vez.

Observe que **una ecuación con tres variables es una expresión abierta.**

1. ¿Para cuáles de las siguientes ternas $(x; y; z)$ se cumple la igualdad $x + y + z = 16\,500$?

$(3\,500;\ 8\,000;\ 5\,000)$, $(4\,000;\ 6\,500;\ 7\,000)$

$(5\,000;\ 8\,000;\ 3\,500)$ y $(8\,000;\ 5\,000;\ 3\,500)$.

Recuerde

Una **proposición abierta**, forma proposicional o expresión abierta es una expresión que contiene una o más variables y tal que al sustituir la o las variables por valores determinados ésta se convierte en una proposición.

¡Importante!

Si una terna $(x_0; y_0; z_0)$ de números reales es solución de launa ecuación
$ax + by + cz = d$
decimos que la terna satisface la ecuación.

¡Importante!

$\mathbb{R}^3$ representa el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, esto es

$\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$

Observación

Al conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales que satisfacen la ecuación
$ax + by + cz = d$ se le llama **conjunto solución** de esta ecuación.

Las componentes de la terna $(3\,500; 8\,000; 5\,000)$ representan un salario para Brenda de $3\,500$, para Jorge de $8\,000$ y para Claudia de $5\,000$.

2. ¿Qué representan los valores de la terna $(5\,000; 8\,000; 3\,500)$ para la ecuación (1)?

3. ¿Son iguales las ternas $(3\,000; 8\,500; 5\,000)$ y $(5\,000; 8\,500; 3\,000)$?

4. ¿Convierten cada una de las ternas anteriores a la expresión (1) en una proposición verdadera?

5. Encuentre otras ternas que conviertan a (1) en una proposición verdadera ¿Cuántas ternas cree que existen que transforman a (1) en una proposición verdadera?

Una **solución de la ecuación** $ax + by + cz = d$ es una terna de números reales $(x_0; y_0; z_0)$ que cumple $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

Por ejemplo, la terna $(3\,000; 8\,500; 5\,000)$ es solución de la ecuación

$$x + y + z = 16\,500$$

porque

$$3\,000 + 8\,500 + 5\,000 = 16\,500.$$

La terna $(4\,000; 6\,500; 7\,000)$ no es solución de la ecuación (1) ya que

$$4\,000 + 6\,500 + 7\,000 = 17500 \neq 16\,500.$$

Si en la ecuación (2) al menos uno de los coeficientes a, b ó c es distinto de cero, entonces el conjunto solución de la ecuación desde el punto de vista geométrico es un plano.

Para la ecuación (1) el conjunto solución expresado en forma conjuntista es $\{(x; y; z) \mid x + y + z = 16\,500, \ \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ y por ser $a = b = c = 1 \neq 0$, geométricamente este conjunto está representado por un plano.

En el caso que $a=b=c=0$ y $d\neq 0$, obtenemos una expresión de la forma

$$0=d$$

para la cual no hay solución posible, esto es, el conjunto solución es vacío.

En nuestra definición de ecuación lineal con tres variables no consideramos el caso cuando a, b, c y d son simultáneamente nulos, pero si se permitiera, cualquier terna de número reales satisfaría (2), luego, el conjunto solución sería todo $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1

Encuentre 3 ternas que satisfagan la ecuación

$$2x+y-z=3. \qquad (3)$$

Solución

Si $x=0$, $y=1$, entonces $2\cdot 0+1-z=3$, así $1-z=3$ implica que $-z=3-1$, luego, $z=-2$.

Por tanto, una solución de la ecuación (3) es la terna $(0; 1; -2)$.

Para $y=0$, $z=4$, tenemos

$$2x+0-4=3$$
$$2x-4=3$$
$$2x=3+4$$
$$x=\frac{7}{2}.$$

Luego, $\left(\frac{7}{2}; 0; 4\right)$ es otra solución de la ecuación (3).

Para finalizar si $x=\pi$, $z=2$, entonces $2\pi+y-2=3$

$$y=3-2\pi+2$$
$$y=5-2\pi.$$

La terna $(\pi; 5-2\pi; 2)$ también es solución de la ecuación (3).

Observe que en la ecuación (3) $a=2$, $b=1$, $c=-1$ y $d=3$, por tanto, el conjunto solución de esta ecuación es, desde el punto de vista geométrico, un plano (figura 1).

¡Importante!

Convendremos en representar un plano por un paralelogramo, esto nos ayudará a visualizar la imagen que se tiene de una superficie plana.

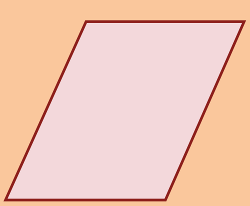


Figura 1

1. Encuentre dos soluciones de la ecuación (3) que tengan dos componentes que sean números racionales no enteros.

2. Determine dos soluciones de la ecuación (3), una con una componente que sea un número natural, y la otra con una componente que sea un número irracional.

3. Encuentre una terna $(x; y; z)$, solución de la ecuación (3) tal que que $x+z=\frac{2}{3}$.

Exprese por comprensión el conjunto solución de (3). ¿Es un conjunto finito o infinito?

Leonard Euler
(1 707 - 1 783)

¿Sabía qué?

Fue a partir de la segunda mitad del siglo XVIII con un trabajo de Leonard Euler y otro de Gabriel Cramer en 1 750 que se comenzó a investigar sobre los sistemas de ecuaciones como objeto de estudio en si mismo.

Suponga que el enunciado

"Los salarios de Brenda, Jorge y Claudia suman 16 500 córdobas",

es completado con la siguiente información:

"Claudia gana el doble que Brenda y Jorge gana el triple que Brenda".

Si queremos determinar cuál es el salario de cada uno de ellos, lo primero que hacemos es expresar mediante ecuaciones cada una de las condiciones dadas.

La primera condición ya fue representada por la ecuación

$$x+y+z=16\,500$$

Las otras condiciones se expresan por las ecuaciones

$$2x=z \rightarrow 2x-z=0$$
$$3x=y \rightarrow 3x-y=0.$$

Observe que hemos obtenido 3 ecuaciones lineales con tres variables

$$\begin{cases} x+y+z=16\,500 \\ 2x+0y-z=0 \\ 3x-y+0z=0. \end{cases}$$

En general,

Un **sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas** es un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \qquad (4)$$

donde d_1, d_2, d_3 y todos los coeficientes de las variables son números reales. A d_1, d_2 y d_3 se le llaman términos constantes o independientes.

Una solución del sistema (4) es cualquier terna de números reales $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ que es solución común de las tres ecuaciones del sistema, o sea que satisface simultáneamente las tres ecuaciones.

Ejemplo 2

Verifique que la terna $(1;\ 2;\ 3)$ es solución de los sistemas

1. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -z + 3x + 2y = 4 \\ 8x + 3y = 14 \\ -5x - 3y = -11. \end{cases}$

Solución

La verificación se realiza sustituyendo los valores dados para x, y y z en las tres ecuaciones de cada sistema. Para el primer sistema tenemos

$$2(1) - 2 + 2(3) = 6 \quad \rightarrow \quad 6 = 6$$

$$3(1) + 2(2) - 3 = 4 \quad \rightarrow \quad 4 = 4$$

$$4(1) + 3(2) - 3(3) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 1.$$

Por tanto, la terna $(1;\ 2;\ 3)$ satisface de manera simultánea las tres ecuaciones.

En el caso del segundo sistema tenemos

$$\begin{array}{rl} -3+3(1)+2(2)=4 & \rightarrow \quad 4=4 \\ 8(1)+3(2)=14 & \rightarrow \; 14=14 \\ -5(1)-3(2)=-11 & \rightarrow -11=-11, \end{array}$$

lo que comprueba que $(1;\ 2;\ 3)$ también es solución del sistema **(2)**.

Dos **sistemas** de ecuaciones lineales con tres variables son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

En este capitulo se indican las rectas como:

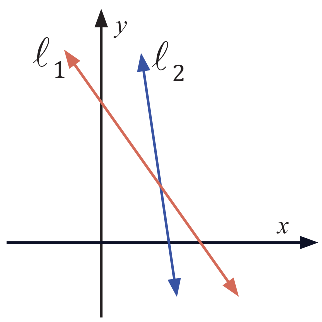
$\overleftrightarrow{\ell}_1$ como: ℓ_1

$\overleftrightarrow{\ell}_2$ como: ℓ_2

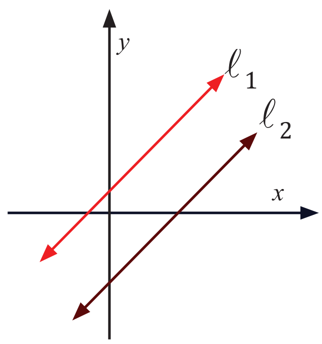
$\overleftrightarrow{\ell}_3$ como: ℓ_3

Recuerde que dado el sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$

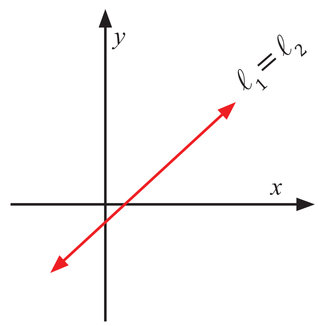
y ℓ_1, ℓ_2 las rectas determinadas por las ecuaciones (1) y (2) respectivamente, tenemos tres posibles situaciones



Rectas concurrentes

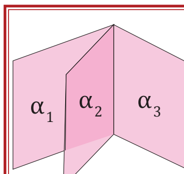


Rectas paralelas no iguales

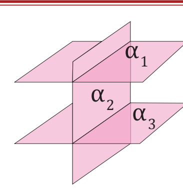


Rectas coincidentes

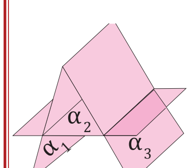
De manera análoga si representamos gráficamente un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cada una de las ecuaciones corresponde a un plano en el espacio. Sean α_1, α_2 y α_3 los planos de cada una de las ecuaciones del sistema (4), entonces algunas de las posibilidades que se presentan son:



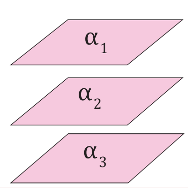
Tres planos se intersecan en una recta. Hay infinitas soluciones.



Dos planos paralelos y perpendiculares a un tercero. No hay solución.



Tres planos que se intersecan dos a dos, pero no tienen puntos en común. No hay solución.



Tres planos paralelos. No hay puntos en común. No hay solución.

Actividad en grupo

- Investiguen las otras posibilidades que se presentan para la gráfica de un sistema de ecuaciones con tres variables e intenten representarlas.

Desde el punto de vista analítico podemos resolver un sistema de ecuaciones del tipo (4) usando métodos algebraicos como igualación, sustitución o reducción; éstos nos permiten eliminar una variable para luego resolver los sistemas ya conocidos de dos ecuaciones con dos incógnitas, por último encontramos el valor de la tercera variable. Además hay otros métodos que utilizan matrices y determinantes y que usted también conoce para el caso de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Ejemplo 3

Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 5x + 2y - z = 11 \\ 4x + 2y + 3z = 5. \end{cases} \quad (a)$

Solución

Intercambiemos la 1^{ra} y 2^{da} ecuación $\begin{cases} 5x + 2y - z = 11 \\ x - y + z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = 5. \end{cases} \quad (b)$

Si en el sistema (b) sumamos la primera ecuación a la segunda, se tiene el nuevo sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 6x + y = 12 \\ 4x + 2y + 3z = 5. \end{cases} \qquad (c)$$

Si ahora multiplicamos por -3 la primera ecuación del sistema (c) y el resultado lo sumamos a la tercera, el nuevo sistema es:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 6x + y = 12 \\ x + 5y = 2. \end{cases} \qquad (d)$$

En el sistema (d), multipliquemos la segunda ecuación por -5 para obtener

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -30x - 5y = -60 \\ x + 5y = 2. \end{cases} \qquad (e)$$

Sumemos la segunda a la tercera ecuación de (e) y obtengamos

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -30x - 5y = -60 \\ \quad -29x = -58. \end{cases}$$

Despejemos x en la última ecuación del sistema anterior

$$-29x = -58$$
$$x = \frac{-58}{-29} = 2.$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación de (e) resulta

$$-30(2) - 5y = -60$$
$$-60 - 5y = -60$$
$$-5y = -60 + 60$$
$$y = \frac{0}{-5} = 0.$$

Finalmente, sustituyendo $x = 2$ y $y = 0$ en la primera ecuación de (a) se tiene $2 - 0 + z = 1 \rightarrow z = 1 - 2 = -1$.

Por consiguiente el conjunto solución del sistema dado es $\{(2;\ 0;\ -1)\}$. Verifíquelo.

La técnica más sencilla para resolver sistema de ecuaciones lineales con tres variables es la que acabamos de utilizar. Se llama **método de Gauss o eliminación gaussiana**.

Con esta técnica transformamos el sistema original en otro sistema más fácil de resolver y equivalente al primero, es decir, ambos, sistemas tienen el mismo conjunto solución.

La eliminación gaussiana utiliza las llamadas operaciones elementales sobre un sistema de ecuaciones lineales que son las siguientes:

1. Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema.
2. Multiplicar cualquier ecuación del sistema por un número real no nulo.
3. Sumar a cualquier ecuación del sistema un múltiplo escalar de otra ecuación del sistema.

Mohammed Ibn Musa abu Djafar Al-Khwarizmi, nació probablemente en la ciudad persa de Khwarizm (actual Khiva, en Uzbekistán). Matemático, astrónomo y geógrafo musulmán. Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además, sistematizó la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Recuerde que:

Si sobre un sistema de ecuaciones lineales se realiza cualquiera de las operaciones anteriores, el nuevo sistema obtenido tiene el mismo conjunto solución que el sistema original. Esto es, los dos **sistemas** son **equivalentes**.

Actividad en grupo

I. Resuelvan el ejercicio del ejemplo 3 aplicando el método de sustitución que utilizaron para sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Recuerden que primero deben despejar una de las variables en alguna ecuación del sistema, luego sustituyan en las otras dos la expresión obtenida para la variable despejada. Resuelvan el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que obtuvieron. Por último, para encontrar el valor de la última incógnita, sustituyan los valores conocidos para las otras dos variables en una de las ecuaciones del sistema dado.

Compruebe lo aprendido

I. Encuentre el conjunto solución de los sistemas dados utilizando eliminación gaussiana.

1. $\begin{cases} 2x+6y+z=-2 \\ 3x+4y-z=2 \\ 5x-2y-2z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u+v-w=0 \\ u-v+w=2 \\ 2u+v-4w=-8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-3y=22 \\ y+6z=-3 \\ \frac{1}{3}x+2z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u-2v-3w=-1 \\ 2u+v+w=6 \\ u+3v-2w=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-3y+2z=-3 \\ -3x+2y+z=1 \\ 4x+y-3z=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5t+2w=1 \\ v-3w=2 \\ 2t+v=3. \end{cases}$

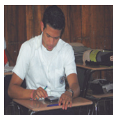
II. Resuelva los sistemas anteriores utilizando el método de sustitución.

¡Importante!

Un **sistema de ecuaciones** lineales es llamado **homogéneo** si los términos constantes son todos ceros.

III. En la página 201 está planteado el sistema de ecuaciones que nos ayudará a encontrar los salarios de Brenda, Jorge y Claudia. Resuelva el sistema y entérese cuánto gana cada uno.

IV. Dé un ejemplo de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres variables y resuélvalo. ¿Tiene una única solución? Si es así, ¿cuál es?



Aplique los conocimientos adquiridos

¡Importante!

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en las variables $x,\ y,\ z$ siempre tiene la solución $(0;\, 0;\, 0)$ llamada **solución trivial**.

1. Resuelva los sistemas lineales con 4 variables, aplicando eliminación gaussiana y el método por sustitución.

a) $$\begin{cases} 2t-u+3v-w=8 \\ t+u-v+w=3 \\ t-u+5v-3w=-1 \\ 6t+2u+v-w=-2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x+4y-z+3w=10 \\ 2x+2y\ -14z=44 \\ x+8y+4z-8w=3 \\ 5x+17y-z+13w=44. \end{cases}$$

2. Resuelva, si es posible, los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.

a) $$\begin{cases} x+y+3z=10 \\ -3x-2y+4z=24 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x+y+3w=0 \\ 4x-2y-2z+w=0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2u+v-5w=0 \\ u-3v+6w=0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} -6u+2v-10w=28 \\ 15u-3v+w=5. \end{cases}$$

¡Importante!

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que posee más variables que ecuaciones tiene “muchas” soluciones.

3. ¿Es la terna $(0;0;0)$ solución de cada uno de lo sistemas anteriores?

4. Si tenemos la ecuación $-5x-3y-z=10$ y $x=-1$, exprese por comprensión el conjunto formado por los pares $(a;b)$ tal que $(-1;a;b)$ sea solución de la ecuación dada.

5. Encuentre todas las soluciones de la ecuación anterior.

6. Marta, Rosa y Ana son beneficiados por el gobierno con un préstamo de $40\,000$ córdobas. Exprese esta proposición por medio de una ecuación lineal con 3 variables y encuéntrele 3 soluciones. ¿Qué representan cada una de estas soluciones? ¿hay una solución con la cual ellas estarían contentas? ¿cuál es y porqué?

Recuerde

Para a y b números enteros decimos que a divide b si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a \cdot k = b.$$

Ejemplo

3 y 5 dividen a 435 porque existen 145 y 87 tales que $435 = 3 \cdot 145$ y $435 = 5 \cdot 87$.

7. Construya una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$ que cumpla

   a) a, b, c y d son cuadrados perfectos mayores que cero y menores que 20.

   b) a, b, c y d son números primos.

   c) a y b son divisibles por 3, y, c y d son divisibles por 5.

8. Resuelva si es posible el sistema formado por las tres ecuaciones del ejercicio 7.

Matrices

Cuando se utiliza el método de eliminación gaussiana lo que menos importa son los símbolos usados para las variables que aparecen en el sistema, porque todas las operaciones elementales se realizan con los coeficientes de estas variables; tomando en cuenta esto, surge una forma sencilla de describir y resolver un sistema de ecuaciones que trabaja solamente con los coeficientes. Usted ya utilizó este método en la solución de sistemas de ecuaciones con dos variables, sabe que para aplicarlo se utiliza la teoría de matrices. Continuemos este estudio analizando el caso para sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Recuerde

Las matrices se representan con letras mayúsculas de nuestro alfabeto.

Se llama **matriz real** de orden o tamaño $m \times n$ a todo arreglo rectangular de m filas y n columnas de números reales que tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

El arreglo $(*)$ se expresa abreviadamente por $A = [a_{ij}]$, con $i = 1, 2, \ldots, m,\quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Los subíndices indican la posición que ocupa un elemento en la matriz, i representa la fila y j la columna. Por ejemplo el elemento a_{21} está en la fila 2 y en la columna 1.

Al elemento a_{ij} se le denomina componente $(i;\, j)$ de la matriz A.

Ejemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \pi & 3 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4{,}1 \end{bmatrix}$$

Entonces el orden de A es 2×3 porque tiene 2 filas y 3 columnas, y:

$$a_{11} = \sqrt{2}, \qquad a_{12} = \pi, \qquad a_{13} = 3,$$
$$a_{21} = 5, \qquad a_{22} = -\frac{1}{2}, \qquad a_{23} = 4{,}1.$$

Observe que $4{,}1$ es la componente $(2; 3)$ de la matriz A.

¿Qué componentes de A son números irracionales?¿cuáles son racionales? ¿tiene A componentes enteras?¿cuáles?

Tipos de Matrices

Se llama **matriz nula** a la que tiene todas sus componentes iguales a cero.

Ejemplo 2

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz nula de orden 2×3.

Una **matriz** es **cuadrada** si tiene igual número de filas y columnas, esto es, $n = m$.

En este caso decimos que la matriz es de orden n. Por ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 5 & \frac{2}{3} \\ 4 & 0 & -2 \\ 7 & -\frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix},$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

La **diagonal** principal de una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]$ está compuesta por los elementos $a_{11},\ a_{22},\ldots,\ a_{nn}$.

Ejemplo 3

Para la matriz C de la página anterior la diagonal está compuesta por $\sqrt{3}$, 0 y 6.

La **traza** de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$.

Ejemplo 4

La traza de la matriz C del ejemplo anterior es $tr(C)=\sqrt{3}+0+6=6+\sqrt{3}$.

Ejemplos de algunas matrices cuadradas especiales son las siguientes.

Una **matriz** cuadrada A es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero y **triangular inferior** si todos los elementos por encima de esta diagonal son cero.

Ejemplo 5

Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 17 & \sqrt{7} & 9 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & \pi & 0 \\ 3{,}8 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

A es triangular superior y B es triangular inferior.

1. Encuentre $tr(A),\ tr(B),\ tr(A)\cdot tr(B),\ \dfrac{tr(A)}{tr(B)}+\dfrac{tr(B)}{tr(A)}$.
2. Clasifique los resultados anteriores en números racionales e irracionales.
3. ¿Es el producto de la componente $(1;1)$ de A con la componente $(2;2)$ de B un número irracional?

Una **matriz** cuadrada es **diagonal** si es a la vez triangular inferior y superior.

Ejemplo 6

¡Importante!
La matriz identidad de orden n se denotará por I_n.

La matriz $D=\begin{bmatrix} -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ es diagonal.

Matriz identidad es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1.

Ejemplo 7

¡Importante!
Una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales se llama **matriz escalar**.

Ejemplo: la matriz nula de orden n es escalar porque todos los elementos de su diagonal principal son iguales.

La matriz identidad de orden 3 es

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) ¿Es I_3 una matriz escalar?

b) Dé ejemplo de una matriz diagonal no escalar y de una matriz escalar que tenga como componentes no nulas un número palíndromo.

Igualdad de Matrices

Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus componentes respectivas son iguales, en símbolos:

Si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$, son matrices de orden $m\times n$,

$$A=B \leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \quad \forall i, \forall j, \ 1\le i\le m, \quad 1\le j\le n.$$

Ejemplo 8

¡Importante!
Dos matrices y $A=[a_{ij}]$ $B=[b_{ij}]$ son distintas si tienen distinto orden o si $a_{ij}\neq b_{ij}$ para algún i, para algún j.

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -4 \\ 0 & \sqrt{5} & 7+3 \\ 6 & 4 & 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 & -4 \\ 0 & \sqrt{5} & 10 \\ 6 & 4 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}=B.$$

1. Dé ejemplo de otra matriz igual a A del ejemplo anterior.
2. Dé ejemplo de dos matrices de tamaño 3×3 que sean distintas.
3. Dé ejemplo de dos matrices 3×3, distintas y ambas con componentes números irracionales.

Álgebra de Matrices

Suma de Matrices

Dadas dos matrices $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ podemos sumarlas de manera muy sencilla, solamente sumamos las componentes correspondientes de las matrices A y B:

Sean $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ dos matrices de tamaño $m \times n$. La matriz $C=[c_{ij}]$ de tamaño $m \times n$ es la **suma de A y B**, si sus componentes o elementos cumplen: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Ejemplo 9

Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 7 \\ 5 & 10 & \sqrt{2} \\ 3 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 & 8 \\ 7 & 3 & -\sqrt{2} \\ 9 & \frac{2}{3} & -6 \end{bmatrix}.$$

Solución

Entonces,

$$A+B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -4+6 & 7+8 \\ 5+7 & 10+3 & \sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 3+9 & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 12 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

¡Importante!

Solamente las matrices que tienen el mismo orden pueden sumarse.

Dadas $A=\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 3 & \pi \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & -\pi \end{bmatrix}$, y $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Verifique que

1. $A+B=C$ **2.** $A+C=A$ **3.** $B+C=B$

4. $A+B=B+A$ **5.** $(A+B)+C=A+(B+C)$

A la matriz C se le llama **matriz cero o nula de tamaño 2×2**.

Recuerde que la matriz de tamaño $m \times n$ cuyas componentes son todas cero se llama matriz cero o nula y se denota por 0. Esta matriz cumple:

$A+0=0$ para cualquier matriz A de orden $m \times n$.

Puesto que $A+0=A$ para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$, **la matriz 0 es el elemento neutro para la suma** en el conjunto de todas las matrices reales de orden $m \times n$.

¡Importante!
En algunos casos, a la matriz nula de orden n, la denotaremos por 0_n.

Debido a la definición de suma de matrices y a que la adición de número reales es asociativa y conmutativa, la suma de matrices es también asociativa y conmutativa, esto es,

si A, B y C son matrices $m \times n$ se cumple:

$$A+B=B+A,$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

Seguramente observó que las componentes correspondientes de las matrices A y B del ejercicio anterior solo difieren en el signo y además verificó que $A+B=C=0_2$. En este caso decimos que B es la opuesta de A y en lugar de escribir B utilizaremos $-A$, así,

$$A+(-A)=0.$$

En general;

Dada la **matriz** $A=[a_{ij}]$ de orden $m\times n$, la matriz $-A=[-a_{ij}]$ también de orden $m\times n$, es la **opuesta de A** y verifica

$$A+(-A)=0 \quad \text{y} \quad -A+A=0.$$

1. Encuentre $-C$ si $C=\begin{bmatrix} e & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2}-5 & 8 \end{bmatrix}$.

2. Encuentre $-(-C)$. ¿Qué relación hay entre C y $-(-C)$?

3. Verifique que $C+(-C)=0$, donde 0 es la matriz nula.

4. Dé ejemplo de una matriz A, de tamaño 3×3, cuyas componentes sean todas números irracionales, encuentre $-A$ y verifique que $A+(-A)=0$.

Compruebe lo aprendido

I. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \sqrt{3} & 5 \\ 0 & 8 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2{,}8 & 35 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 6 & \pi & 5 \\ 3{,}8 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcule

$-C,\ -A+B,\ (I_3+B)+C,\ I_3+(B+C),\ tr(A),\ tr(B)$

$tr(A+B),\ tr(-C),\ tr(C)$. Compare $tr(C)$ con $tr(-C)$.

¿Qué concluye? ¿Es $tr(-C) = -tr(C)$?

¿Cuál es la diagonal principal de A? ¿Cuál de las matrices dadas es triangular superior? ¿Cuál es triangular inferior?

II. Dé ejemplo de dos matrices A y B estocásticas 3×3 y encuentre su suma ¿es el resultado una matriz estocástica? Calcule $(A-B)-B$, $B-A$, $(B-A)-A$. ¿es alguna de estas matrices estocástica?

¡Importante!

Una **matriz** cuadrada es **estocástica** si sus elementos son probabilidades y al sumarlos por columna dan 1.

Ejemplo: I_3 es una matriz estocástica considerando que cada 1 de este arreglo representa una probabilidad.

Multiplicación de Matrices

Usted pudo experimentar que la suma de matrices resultó ser muy natural porque sólo se precisó de una única operación, la suma de números reales. Por el contrario, la multiplicación aumenta la complejidad porque exige las dos operaciones de los números reales, la suma y la multiplicación. Por ello iniciaremos con el caso particular de las matrices 2×2, pero antes debemos tomar en cuenta las siguientes consideraciones que tienen carácter general:

1. No todas las matrices pueden multiplicarse.
Dadas dos matrices A y B podemos determinar el producto $A \cdot B$ si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

2. Supongamos que A es $m \times p$ y B es $p \times n$, como se cumple que el número de columnas de A es igual al número de filas de B, podemos encontrar $A \cdot B$, una matriz de tamaño $m \times n$.

¡Importante!

Si A es $m \times p$ y B es $p \times n$, $A \cdot B$ es de tamaño $m \times n$.

Ilustremos el tamaño del producto así,

$$\underbrace{\overset{A}{m \times p} \quad \overset{B}{p \times n}}_{\substack{A \cdot B \\ m \times n}}$$

Ejemplo 10

Encuentre $A \cdot B$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución

A	B
2 x 2	2 x 2

$\underbrace{2 \times 2 \quad 2 \times 2}_{A \cdot B \; 2 \times 2}$

Primero comprobamos que se puede obtener $A \cdot B$, en este caso es posible porque ambas matrices son 2×2, por consiguiente el número de columnas de A (2) coincide con el número de filas de B (2). Además, $A \cdot B$ es de tamaño 2×2 (observe cuadro de la izquierda). En consecuencia tenemos

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Encontremos las cuatros componentes C_{ij} de la matriz producto de la siguiente manera:

El elemento de la fila 1 y columna 1, esto es, C_{11} de $A \cdot B$ será el resultado de multiplicar componente a componente la fila 1 de A por la columna 1 de B y luego sumar los productos. Así.

$$C_{11} = 2 \cdot 0 + (-1)(-5) = 0 + 5 = 5.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + (-1)(-5) & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Para obtener la componente C_{12} multiplicamos, elemento a elemento, la fila 1 de A y la columna 2 de B y luego sumamos. Recuerde que C_{12} está en la fila 1 y en la columna 2 de $A \cdot B$. Luego.

$$C_{12} = 2(-3) + (-1)(4) = -6 - 4 = -10.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2(-3) + (-1)(4) \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

C_{21} la obtenemos multiplicando elemento a elemento la fila 2 de A y la columna 1 de B y no olvide sumar los productos obtenidos.

$$C_{21} = 7(0) + (-8)(-5) = 0 + 40 = 40.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 7(0) + (-8)(-5) & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 40 & C_{22} \end{bmatrix}.$$

¡Importante!

Se llama **matriz fila** a la que sólo tiene una fila y **matriz columna** a la que sólo consta de una columna.

¡Importante!

Si A y B son matrices de orden n, entonces se cumple:

$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
$tr(A\cdot B)=tr(B\cdot A)$.

Solamente falta encontrar C_{22}, que siguiendo el razonamiento anterior es:

$$C_{22}=7(-3)+(-8)(4)=-21-32=-53.$$

Por consiguiente, la matriz producto buscada es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 40 & 7(-3)+(-8)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 40 & -53 \end{bmatrix}$$

que resulta ser una matriz de orden 2.

1. Encuentre $B\cdot A$ y compárela con la matriz $A\cdot B$. ¿son iguales?
2. Verifique que $tr(B\cdot A)=tr(A\cdot B)$. ¿Es $tr(A\cdot B)=tr(A)\cdot tr(B)$?
3. Encuentre $A+B$ y verifique la igualdad $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

Ejemplo 11

Si $A=\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$, encuentre $A\cdot B$.

Solución

El producto $A\cdot B$ está definido porque A es de orden 1×3 y B de orden 3×1 y será, por lo tanto, una matriz de orden 1×1,

$$A\cdot B=\left[-1(2)+\frac{1}{2}(6)+4(11)\right]=[-2+3+44]=[45].$$

¿Podemos obtener $B\cdot A$? Justifique su respuesta.

¡Importante!

Si A es una matriz cuadrada, es posible calcular $A\cdot A$ que se denota por A^2.

En general, el producto de A, n veces consigo misma se representa por A^n. Así,

$$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n\ veces}.$$

Para generalizar un poco, multipliquemos matrices 3×3.

Sean $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$.

En este caso es posible obtener $A\cdot B$ y $B\cdot A$, ya que ambas matrices son de orden 3×3. Encontremos la matriz producto $C=[c_{ij}]=A\cdot B$ siguiendo el mismo procedimiento utilizado para matrices 2×2, esto es, cada c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la i–ésima fila de A y la j–ésima columna de B.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix},$$

siendo algunos de los c_{ij} los siguientes

$$c_{11}=a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}+a_{13}\,b_{31}\qquad c_{21}=a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}+a_{23}\,b_{31}$$
$$c_{12}=a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22}+a_{13}\,b_{32}\qquad c_{22}=a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22}+a_{23}\,b_{32}$$
$$c_{13}=a_{11}\,b_{13}+a_{12}\,b_{23}+a_{13}\,b_{33}\qquad c_{23}=a_{21}\,b_{13}+a_{22}\,b_{23}+a_{23}\,b_{33}.$$

Recuerde

$\mathbb{Z}_0^+$ denota el conjunto de números enteros no negativos, esto es

$\mathbb{Z}_0^+=\{z\in\mathbb{Z}:\ z\geq 0\}.$

Ejemplo 12

Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3\\ 2 & 6 & 3\\ \frac{1}{2} & 0 & 4\end{bmatrix}$ e $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Halle $A\cdot I.$

Solución

$$A\cdot I=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3\\ 2 & 6 & 3\\ \frac{1}{2} & 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\cdot 1+(-4)\cdot 0+3\cdot 0 & 1\cdot 0+(-4)(1)+3\cdot 0 & 1\cdot 0+(-4)(0)+3\cdot 1\\ 2\cdot 1+6\cdot 0+3\cdot 0 & 2\cdot 0+6\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 0+6\cdot 0+3\cdot 1\\ \frac{1}{2}\cdot 1+0\cdot 0+4\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot 1+4\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot 0+4\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3\\ 2 & 6 & 3\\ \frac{1}{2} & 0 & 4\end{bmatrix}=A.$$

¡Importante!

Si A es una matriz de orden $n,$ por definición

$$A^0=I_n.$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}^0=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Observe que el producto de A por I es $A,$ de allí el nombre de matriz identidadpara $I.$

1. Calcule $I\cdot A,$ ¿coincide con $A\cdot I$?

2. ¿A qué es igual $tr(I_3)$? ¿en general a que es igual $tr(I_n)$, n un número natural?

¡Importante!

Si A es una matriz de orden $n,$ y $m,\,s\in\mathbb{Z}_0^+$ entonces

$$A^m\cdot A^s=A^{m+s}$$
$$(A^m)^s=A^{ms}$$

El producto de matrices está regido por la propiedad asociativa: $A\,(B\cdot C)=(A\cdot B)\,C.$

Las operaciones de adición y multiplicación de matrices satisfacen conjuntamente la propiedad distributiva:

$$A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \quad \text{y} \quad (B+C)A=B\cdot A+C\cdot A.$$

Actividad en grupo

1. Den ejemplos de tres matrices A, B y C, cuyas componentes sean números enteros y verifiquen las propiedades antes mencionadas. Recuerden que deben asegurarse que la multiplicación entre éstas sea posible. Calculen $\frac{1}{2}A,\ 3B,\ -1C$. ¿Es posible encontrar $\frac{1}{2}A+3B$?
2. Encuentren dos matrices A y B, tal que $A\cdot B\neq B\cdot A$.
3. Verifiquen que el producto de dos matrices no nulas de orden 3 puede dar lugar a una matriz nula, encontrando dos de tales matrices.
4. Encuentren tres matrices A, B y C de orden 3, tales que $AB=AC$, pero $B\neq C$. Verifiquen la propiedad asociativa del producto de matrices.
5. Den ejemplo de una matriz cuadrada de orden 3 y calcule: A^2, A^3, A^0, $A^2\cdot A^3$ (verifiquen que es igual a A^5) y $(A^2)^3$ (comprueben que es igual a A^6).

Matriz inversa

Hasta ahora hemos aprendido a sumar y multiplicar matrices; también hemos conocido algunas propiedades de estas operaciones. Además, verificamos lo siguiente:

1) No siempre es posible multiplicar dos matrices.
2) En general el producto de matrices no es conmutativo.
3) El producto de dos matrices no nulas puede dar lugar a una matriz nula.

Podemos entonces concluir que el producto matrices no goza de todas las propiedades del números reales.

¡Importante!

Dada una matriz $A=[a_{ij}]$ y $c\in\mathbb{R}$. El producto de c por A denotado por cA es la matriz que se obtiene multiplicando c por cada componente de A.

Esto es, $cA=[c\,a_{ij}]$.

¡Importante!

Si A, B y C son matrices para las cuales $A\cdot B$ y $A\cdot C$ existen, resulta que

$$A\cdot B=A\cdot C$$

no implica

$$B=C.$$

Ejemplo de matrices no nulas con producto $A\cdot B$ nulo

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0\\-5&4\end{bmatrix}.$$

¡Verifiquelo!
¿Es $B\cdot A=0$?

¡Importante!

Una **matriz** de orden n es llamada **idempotente** si $A^2 = A$.

Por ejemplo I_3 es idempotente porque

$(I_3)^2 = I_3 \cdot I_3 = I_3$.

- Utilice la definición que aparece en la columna de la izquierda para dar ejemplo de dos matrices idempotentes de orden 3. ¿Lo es 0_3?

Por analogía con los números reales podemos preguntarnos si dada una matriz A no nula, existe otra matriz B tal que $A \cdot B = I$.

Recuerde que si tenemos un número real $a \neq 0$ existe su inverso x tal que $ax = 1$, esto es $x = \dfrac{1}{a}$. Podríamos pensar que para las matrices ocurre lo mismo, esto es, dada una matriz A, cuadrada y no nula existe su inversa X tal que $A \cdot X = I$. Sin embargo, lo anterior no siempre es cierto. De $A \cdot X = I$ no podemos obtener X por despeje, $X = \dfrac{I}{A}$, porque no hemos definido la división de matrices; nos adelantamos a decir que no todas las matrices cuadradas tienen inversas.

Definamos entonces matriz inversa

Una **matriz** cuadrada A y de orden n, es **invertible** o **no singular**, si existe otra matriz del mismo orden, llamada **matriz inversa** de A y denotada por A^{-1}, tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

- Verifique que $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ es la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Ahora dirigiremos nuestra atención hacia el cálculo de la inversa de una matriz, cuando exista.

Hay distintos métodos para encontrar la inversa de una matriz A de orden n, uno de ellos es el de Gauss–Jordan, que consiste en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz de orden $n \times 2n$, formada por la matriz original y la matriz identidad de orden n, hasta llegar a obtener la matriz identidad en lugar de la matriz de inicio. Estas transformaciones elementales son las mismas que se realizan sobre un sistema de ecuaciones.

Ilustremos este método con un ejemplo

Ejemplo 13

Encuentre la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

Solución

1. Consideremos la matriz $\left[\begin{array}{cc:cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$. $\quad (1)$

2. Transformemos la matriz A, que aparece a la izquierda de la línea vertical punteada, en la matriz I_2, con este objetivo multipliquemos la primera fila de (1) por $\frac{1}{3}$ así

$$\left[\begin{array}{cc:cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right].$$

3. Multipliquemos la primera fila por -2 y sumemos el resultado a la segunda

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{array}\right].$$

4. Multipliquemos ahora la segunda fila por $-\frac{3}{5}$

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{5}F_2} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{array}\right].$$

5. Para finalizar multipliquemos la segunda fila por $-\frac{1}{3}$ y sumemos el resultado a la primera

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{array}\right].$$

La matriz 2×2 que aparece en el lado derecho de la línea vertical punteada es la inversa de A, así

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

¡Importante!

La **transpuesta de una matriz** A denotada por A^t es la matriz cuyas columnas son las filas de A.

¡Importante!

La transposición de matrices cumple:

Si A y B son dos matrices para las cuales $A+B$ y $A \cdot B$ existen, entonces

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
3. $(A^t)^t = A$.

a) Compruebe que la matriz encontrada A^{-1} es la inversa de A. Encuentre la transpuesta de A y A^{-1}.

b) Dé ejemplos de dos matrices de orden 3 y verifique las propiedades de la transposición de matrices que aparecen en la columna de la izquierda.

c) Dé ejemplo de una matriz diagonal de orden 3 y encuentre su transpuesta. ¿Qué tipo de matriz es?

d) Dé ejemplo de una matriz triangular inferior y determine su transpuesta.

e) Dé ejemplo de una matriz triangular superior y encuentre su transpuesta. ¿Qué tipo de matriz resulta?

En general, si queremos encontrar la inversa de una matriz A, aplicando el método de Gauss Jordan se recomienda que:

1. Considere la matriz $[A:I_n]$ formada por A y la matriz identidad correspondiente I_n.

2. Por medio de operaciones elementales, convierta la matriz A en triangular superior, esto es, haga cero las componentes ubicadas debajo de la diagonal principal; para lograr esto siga el siguiente orden:

   i) Haga cero las componentes de la primera columna, que están debajo de la diagonal.

   ii) Haga cero las componentes de la segunda columna que están debajo de la diagonal, y así sucesivamente.

3. Una vez que convierta a A en triangular superior, transfórmela en triangular inferior por medio de un proceso análogo al anterior.

4. Si ya tiene una matriz diagonal, sólo multiplique cada fila de la diagonal por un valor adecuado, para lograr unos en la diagonal y de esta manera obtener la identidad.

5. Una vez que obtenga la matriz identidad en la parte izquierda, tome como inversa de A la matriz que aparece a la derecha.

Ejemplo 14

Dada la matriz $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ calcule su inversa.

Solución

Consideremos la matriz formada por B e I_3.

$$[B \mid I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

Como la matriz a la izquierda de I_3 es diagonal y por lo tanto triangular superior e inferior, sólo necesitamos multiplicar cada fila por números adecuados para lograr unos en la diagonal, así tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1,\,-\frac{1}{3}F_2,\,\frac{1}{4}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right].$$

Así, la inversa de B es

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

1. Verifique que la matriz resultante a la derecha de la identidad es la inversa de B.

2. Observe la matriz inversa de B. ¿Cómo calcularía de forma rápida la inversa de una matriz diagonal de cualquier orden?

3. ¿Son B y B^{-1} matrices simétricas?

4. ¿Son las matrices identidad y nula, de orden 3 simétricas?

5. ¿Es el producto de dos matrices diagonales de orden 3 una matriz simétrica?

¡Importante!

Una **matriz** se llama **simétrica** si es igual a su transpuesta.

Ejemplo de una matriz que no tiene inversa es

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}.$$

¿Qué ocurre si, con el objetivo de encontrar la inversa de A, sobre ella se aplican operaciones elementales?

¡Importante!

Propiedades de la inversa de una matriz.

Si A y B son invertibles, y $n \in \mathbb{N}$, entonces

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$
4. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$.

6. De ejemplo de una matriz escalar de orden 3 y encuéntrele la inversa. Aplique la forma rápida que encontró para calcular la inversa de una matriz diagonal.

7. Dé ejemplo de dos matrices cuadradas invertibles y verifique las propiedades de la inversa expuestas en la tabla de la izquierda.

Con la información que tenemos acerca de las matrices ya estamos preparados para resolver, de una forma sencilla, resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Ilustremos el método a utilizar con un ejemplo.

Ejemplo 15

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ 2x + y - z = 8 \\ 2x + 2y + 3z = -3. \end{cases} \qquad (a)$$

Solución

Primero formemos una matriz con los coeficientes de las variables que aparecen en el sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que, al formar la matriz, se respetó el orden en que aparecen los coeficientes de las variables; esto es, en la primera columna se ubican los coeficientes de la variable x, en la segunda los de y y en la tercera los que corresponden a z.

¡Importante!

Si una matriz A se obtiene de una matriz B por una sucesión finita de operaciones elementales de filas, se dice que A y B son equivalentes por fila.

Agreguemos a esta matriz una columna formada por los términos independientes del sistema (a), ésta se llama **matriz aumentada** del sistema y es la siguiente

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Investigue en Internet en qué consiste la forma escalonada de una matriz.

Transformemos la matriz aumentada a una forma escalonada equivalente utilizando operaciones elementales sobre las filas.

¡Importante!

A la matriz formada colocando en columna los coeficientes de las variables que aparecen en un sistema de ecuaciones lineales se le llama **matriz de coeficientes**.

Las matrices

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -1 & 8\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

y

$$C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

son equivalentes por fila pues C se obtuvo de B aplicando operaciones elementales de fila.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -1 & 8\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3 & 12\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4F_2+F_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -15\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}F_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Es obvio que la última matriz obtenida está en forma escalonada y es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} x-y+z=-2\\ \quad y-z=\ \ 4\\ \qquad\ \ z=-3.\end{cases}$$

Por lo tanto, sustituyendo $z=-3$ en la segunda ecuación del sistema anterior obtenemos

$$y-(-3)=4 \quad \rightarrow \quad y=4-3$$
$$y=1.$$

Para obtener el valor de x utilicemos la primera ecuación y sustituyamos en ésta z por -3 y y por 1

$$x-1-3=-2 \quad \rightarrow \quad x=-2+4$$
$$x=2.$$

Por consiguiente el conjunto solución del sistema inicial es $\{(2;1;-3)\}$.

Compruebe lo aprendido

Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \sqrt{11} & 5\\ 3 & 8 & \frac{5}{7}\\ 9 & 0 & 30\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -3\\ 5 & 1 & 7\\ 4{,}8 & 35 & -4\end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\\ 6 & \pi & 1\\ 3 & 15 & 7\end{bmatrix}.$$

¡Importante!

La multiplicación de un número real por una matriz cumple las siguientes propiedades:

$a\,(A+B)=a\,A+a\,B$

$(a+b)A=a\,A+b\,A$

$(a\cdot b)A=a(b\,A)$

$1\cdot A=A,$

donde A y B son matrices del mismo tamaño y $a,b\in\mathbb{R}$.

I. Determine $(-A)\cdot B,\ (I_3\cdot B)C,\ I_3(B\cdot C),\ A^2,\ A^2+B,\ A\cdot B,$ $B\cdot A,\ B^{-1},\ A^{-1}.$

II. ¿Existen los productos $B^{-1}\cdot A^{-1}$ y $A^{-1}\cdot B^{-1}$? ¿por qué? ¿son iguales los resultados?

III. Utilice las matrices dadas y verifique las propiedades del producto de un número real por una matriz, utilice $a=2$, $b=-1$.

IV. Dé ejemplo de una matriz de tamaño 3×3 cuyas componentes todas sean iguales y otra 3×3 que sea triangular superior, encuentre su producto, luego determine la inversa de este producto, si existe.

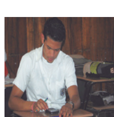
V. Sean $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&1&0\\2&1&3\end{bmatrix}$.

Calcule la matriz, si existe:

a) $B-C$ **b)** $-2A+C$ **c)** $5B$
d) $A\cdot B$ **e)** $B\cdot A^2$ **f)** $(2A)\cdot(5B)$.

VI. Para las matrices del ejercicio anterior, verifique las siguientes igualdades:

- $2\,(A+B)=2A+2B$
- $(5+3)B=5B+3B$
- $(5\cdot3)C=5(3C)$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $B+(-B)=0$
- $B^0(-B)=-B$
- $B\,(A+(-A))=0.$



Aplique los conocimientos adquiridos

I. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&\sqrt{11}&4\\-1&6&\frac{5}{7}\\7&0&30\end{bmatrix}$,

verifique que: $0_3\cdot A=A\cdot 0_3=0_3$.

II. Dé ejemplo de

a. Una matriz A 3×3 cuya opuesta tenga como componentes números enteros no negativos. ¿Cuál es la componente $(2;3)$ de A? ¿si suma la componente $(3;3)$ de A con la $(3;3)$ de $-A$ el resultado es elemento de $\mathbb{Z}_0^+$? ¿por qué?

b. Una matriz no cuadrada con el número de filas menor que el número de columnas.

c. Dos matrices que no se pueden multiplicar, ni sumar.

d. Una matriz que conmute al multipicarla con

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Recuerde

La adición definida en $\mathbb{Z}_0^+$ es cerrada, esto es:
Si $a, b\in\mathbb{Z}_0^+$ entonces, $a+b\in\mathbb{Z}_0^+$. En palabras sencillas, la suma de dos números enteros no negativos es un número entero no negativo.

III. ¿Con cuáles matrices de orden 3, conmuta 0_3 utilizando el producto?

IV. Dé ejemplo de

a) Una matriz diagonal D de orden 3 cuyas componentes no nulas sean números irracionales. Además, encuentre, D^2, D^3 y D^4. ¿Qué característica en común tienen estas matrices?

b) Una matriz A de orden 3 cuyas componentes sean números primos y verifique:

1) $tr\left(\frac{1}{2}A\right)=\frac{1}{2}tr(A)$

2) $tr(A^t)=tr(A)$

3) $\frac{2}{3}A^t=\left(\frac{2}{3}A\right)^t$

4) $(A^t)^t=A.$

¡Importante!

Si A es una matriz de orden n y c un número real entonces, se cumple:
$tr(cA)=c\,tr(A)$
$tr(A^t)=tr(A).$

Determinantes

Continuemos el estudio de los determinantes; en esta oportunidad nos corresponde definir y calcular determinantes de matrices de orden 3. Para ello es necesario introducir previamente algunos conceptos.

Dada una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]$ de orden n, definimos el menor **complementario** M_{ij} (o simplemente menor) **del elemento** a_{ij} como el determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.

Ejemplo 1

Encuentre los menores complementarios de cada uno de los elementos de la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución

Encontremos el menor complementario M_{11}, eliminando la primera fila y la primera columna de A

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3+1=4.$$

Luego, el menor complementario de a_{11} es 4.

Siguiendo sobre la primera fila de A encontremos M_{12}.

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0+4=4.$$

Así, el menor complementario de a_{12} es 4.

Observe que para encontrar M_{12}, eliminamos la primera fila y la segunda columna de la matriz A y luego calculamos el determinante de la matriz 2×2 que obtuvimos al eliminar la fila y columna mencionadas.

Los menores complementarios de los restantes elementos de la matriz son:

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0-12=-12, \qquad M_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7,$$

¡Importante!

El **determinante de una matriz** real

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

que se denota por $\det A$ o $|A|$ es igual al producto de las componentes de la diagonal principal menos el producto de las componentes de la otra diagonal, esto es,

$|A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1, \qquad M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2-0=-2,$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2-8=-6, \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6-0=6,$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2-4=-2.$$

Estrechamente relacionado con el concepto de menor complementario está el de cofactor o adjunto de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada.

El **cofactor** (o adjunto) **del elemento** a_{ij} de una matriz $A=(a_{ij})$ es

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor de a_{ij}.

Ejemplo 2

Encuentre los cofactores de cada uno de los elementos de la matriz del ejemplo 1.

Solución

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}= 1\cdot 4=4$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-1(4)=-4$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}= 1(-12)=-12$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-1(-1)=1$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}= 1(-6)=-6$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-1(-2)=2$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}= 1(-7)=-7$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-1(-2)=2$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}= 1\cdot 6=6.$$

Observe que el cofactor del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada no es más que el menor con el signo más o menos, dependiendo de la fila y la columna en que se encuentre el elemento.

1. ¿Qué tipo de número debe ser $i+j$ para que el menor y el cofactor de un elemento de una matriz coincidan?

2. Si $i+j$ es impar, ¿a qué es igual $M_{ij}+A_{ij}$? ¿qué propiedad de la suma de los números reales le recuerda?

3. ¿Son iguales el menor y el cofactor de los elementos de la diagonal principal de una matriz? ¿por qué?

En general, podemos saber si el cofactor y el menor coinciden o no, utilizando una tabla de signos de más y menos.

Por ejemplo, para matrices 3×3 y 4×4 tenemos

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix},$$

donde el signo "$+$" significa que el cofactor y el menor coinciden y el "$-$" que uno es el opuesto del otro.

Ahora sí podemos definir el concepto de determinante para una matriz de orden 3.

El **determinante** $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3 se define como

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

En forma sencilla podemos decir que el determinante de una matriz es un número que resulta de sumar los productos de los elementos de la primera fila de la matriz A por sus correspondientes cofactores.

¡Importante!

Definición alternativa

El **determinante** $|A|$ **de una matriz** cuadrada de orden 3 se define como $|A|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$.

Observe que en lugar de multiplicar los elementos de la primera fila por los cofactores lo hacemos por los menores, pero se alternan los signos $+$ y $-$.

Ejemplo 3

Calcule el determinante de la matriz del ejemplo 1.

Solución

Como en el ejemplo 2 ya hemos determinado todos los cofactores que necesitamos, resulta fácil calcular $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 2(4) + 1(-4) + 2(-12) = 8 - 4 - 24$$

$$= -20.$$

Observación

El valor del determinante no cambia si en lugar de utilizar la primera fila; realizamos los cálculos con cualquier otra fila. Comprobémoslo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Encuentre el determinante de $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ utilizando la primera fila y luego la tercera fila.

Solución

Utilizando la primera fila, obtenemos

$$|B| = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \pi \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \pi \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\pi + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 2\pi.$$

Ahora utilicemos la tercera fila,

$$|B| = 0\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \pi\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 + \pi(2) = 2\pi.$$

Es importante observar que esta matriz es triangular superior y que además su determinante coincide con el producto de los elementos de su diagonal.

1. ¿Es la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ triangular superior? ¿es triangular inferior? ¿cuál es su determinante? ¿coincide éste con el producto de los elementos de su diagonal principal?

¡Importante!

Si A y B son matrices de orden n y c un número real distinto de cero, entonces

1. $|cA| = c^n |A|$
2. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
3. $|A^t| = |A|$.

¡Cuidado!

Si A y B son matrices de orden n, en general $|A| + |B| \neq |A + B|$.

2. Utilice la matriz A del ejemplo 1 y B del ejemplo 4 para verificar las propiedades del determinante que aparecen en la columna de la izquierda. En el caso $1.$ utilice $c = 6$.

3. De ejemplo de dos matrices de orden 3 que cumplan $|A| + |B| = |A + B|$ y otras dos tales que $|A| + |B| \neq |A + B|$.

Generalizando el concepto de determinante a matrices de orden superior podemos decir que

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces el determinante $|A|$ es la suma de los productos de los elementos de cualquier fila por sus respectivos cofactores.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los determinantes que resultan muy útiles para su cálculo.

1) Si una matriz cuadrada tiene una fila de ceros, el determinante es cero.

Ejemplo 5

El determinante de $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{8}{5} & 10 \end{bmatrix}$ es cero porque en la segunda fila solo hay ceros.

2) Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales o proporcionales, su determinante es cero.

Ejemplo 6

El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 7 & 6 & 13 \end{bmatrix}$ es cero porque la segunda fila de A se puede obtener multiplicando la primera por 2, esto es, la primera y segunda fila son proporcionales.

3) Si intercambiamos dos filas de una matriz cuadrada A el determinante de la matriz que resulta es el opuesto del determinante de A.

Ejemplo 7

Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz del ejemplo 1.

Recordemos que $|A|=-20$ .Obtengamos ahora una nueva matriz B intercambiando las filas primera y segunda de A, entonces

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego por la propiedad antes mencionada $|B|=-(-20)=20$.

Calcule el determinante de B mediante la definición y verifique el resultado anterior.

4) Si una matriz B se obtiene de otra matriz cuadrada A multiplicando cada elemento de una fila por un número real c, entonces, $|B|=c|A|$.

Ejemplo 8

Sea $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz obtenida a partir de la matriz del ejemplo 1, multiplicando la segunda fila por 2. Entonces, por la propiedad anterior y porque $|A|=-20,\ \ |B|=2(-20)=-40$.

5) Si obtenemos una matriz B de otra matriz cuadrada A al sumar c veces los elementos de una fila a los elementos de otra fila de la matriz $A,$ entonces $|A|=|B|$.

Utilice la matriz A del ejemplo 1 para obtener una matriz B, multiplicando la segunda fila por $\frac{1}{2}$ y sumándola a la primera, luego calcule $|B|$ aplicando la definición de determinante, de esta manera verifica la propiedad 5).

¡Importante!

Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si

$|A| \neq 0.$

6) Si A tiene inversa A^{-1} se verifica que:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Dé ejemplo de una matriz A de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, calcule su inversa y aplique la propiedad $6)$ para encontrar el determinante de A^{-1}.

Regla de Sarrus

Pierre Frédéric Sarrus $(1798\text{-}1861)$

Fue un matemático francés.
Sus trabajos tratan sobre los métodos de resolución de ecuaciones numéricas y sobre el cálculo de variaciones. Pero su celebridad entre los estudiantes de Matemáticas se explica sobre todo por una regla de cálculo de determinantes de matrices de orden 3: la regla de Sarrus.

La aplicación de la definición de determinante de una matriz que presentamos anteriormente se vuelve engorrosa a medida que aumenta el orden de ésta. Para el caso de matrices cuadradas de orden 3 existe un método alternativo para calcular el determinante, fácil de ejecutar, llamado **regla de Sarrus**. Esta regla se aplica de la siguiente manera:

Paso 1. Repita las dos primeras columnas de la matriz dada A a la derecha de la tercera columna, esto es, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces el resultado es:

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|.$$

(a) (b)

Paso 2. Multiplique cada elemento de la primera fila de A por los otros elementos de la diagonal en que él se encuentra y que va de izquierda a derecha. Los tres productos $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$, $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ y $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ son los primeros tres sumandos del determinante.

Paso 3. Multiplique cada elemento en la última fila de la matriz A por los otros dos elementos en la diagonal en que él se encuentra y que va de izquierda a derecha. Los opuestos de estos productos, $-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13})$, $-(a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11})$ y $-(a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$ son los otros tres términos del determinante de A.

En conclusión, el determinante de A es:

$$\left|A\right| = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}) + (a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}) + (a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})$$
$$-(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}) - (a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}) - (a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}).$$

Ejemplo 9

Utilice la fórmula de Sarrus para calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución

Paso 1. Repita las dos primeras columnas de A a la derecha de la tercera columna.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right|.$$

(a) $\qquad$ (b)

Paso 2. Obtenga los productos de los elementos que se indican con flechas en (a) y súmelos, así tenemos

$$\begin{aligned} 6\,(3)\,(2) + 5\,(-4)\,(0) + 4(1)\,(-1) &= 36 + 0 - 4 \\ &= 32. \end{aligned}$$

Paso 3. Calcule la suma de los productos que se indican con flechas en (b), esto es

$$\begin{aligned} 6\,(3)\,(2) + 5\,(-4)\,(0) + 4(1)\,(-1) &= 36 + 0 - 4 \\ &= 32. \end{aligned}$$

Para finalizar el producto obtenido en el **paso 3.** se resta del resultado del **paso 2.** y esta diferencia es el determinante de A.

$$\left|A\right| = 34 - 32 = 2.$$

Ejemplo 10

Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Ilustremos la regla de Sarrus que en su primer paso repite las dos primeras filas

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculemos los tres productos de los elementos de las diagonales trazadas de izquierda a derecha y los otros tres productos de los elementos de las diagonales trazadas de derecha a izquierda. (Observe las flechas). Luego el determinante de A es:

$$|A| = [5\,(-3)\,(1) + 0(2)\,(0) + 0(0)\,(0)]$$
$$- [0\,(-3)\,(0) + 0\,(2)(5) + 1\,(0)\,(0)]$$

$$= (-15 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = -15.$$

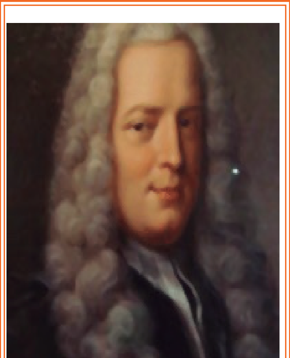
Observe que la matriz dada en el ejemplo anterior es triangular superior, por lo tanto su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal, esto es, $5\,(-3)\,1 = -15$ que coincide con el resultado obtenido aplicando la regla de Sarrus.

¡Importante!

Podemos obtener una variante de la regla de Sarrus si agregamos las dos primeras filas debajo de la última fila de la matriz dada y adecuamos los tres pasos estudiados.

1. Redacte los pasos a seguir en la aplicación de la regla de Sarrus cuando se agregan las dos primeras filas.

2. Calcule de nuevo el determinante del ejemplo 10 utilizando la regla de Sarrus que agrega las dos primeras columnas de la matriz A. Compare los resultados.



Gabriel Cramer

Nació en Ginebra (Suiza) en 1704 y murió en 1752. A él le debemos la regla que lleva su nombre.

Regla de Cramer

Dado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, podemos resolverlo utilizando la regla de Cramer que reza así:

El valor de una variable es igual al cociente del determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo en la matriz de coeficientes la columna de los coeficientes de la variable por la columna de los términos constantes, entre el determinante de la matriz de coeficientes. En símbolos tenemos, sea el sistema a resolver

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases}$$

Entonces,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Ejemplo 11

Resuelva el siguiente sistema utilizando la regla de Cramer

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 4. \end{cases}$$

Solución

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por A_1 la matriz que se obtiene al reemplazar la primera columna de A por la columna $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ de los términos constantes del sistema, similarmente A_2 y A_3 denotarán las matrices que resultan de sustituir la segunda y tercera columna de A por la columna $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$, así

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

A continuación cerciórese de que $|A| = 10$. Luego, podemos aplicar el método de Cramer ya que $|A| \neq 0$.

Compruebe además que $|A_1| = 27$, $|A_2| = 9$ y $|A_3| = 32$.

De acuerdo con el método de Cramer tenemos

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{27}{10}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{9}{10} \quad \text{y} \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}.$$

En conclusión la solución del sistema es la terna $\left(\frac{27}{10}; \frac{9}{10}; \frac{16}{5}\right)$.

Compruebe lo aprendido

I. Calcule los determinantes de las siguientes matrices utilizando primero el desarrollo por la primera fila y luego por la primera columna. Compare los resultados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

II. ¿Cuáles de las matrices anteriores tiene inversa?

III. Aplique las propiedades de los determinantes para encontrar los determinantes de las matrices

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, **b)** $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, **c)** $\frac{1}{2}A$, **d)** B^3,

e) $(5\,B^t)^t$, **f)** $A \cdot B$, **g)** $B \cdot B^{-1}$.

IV. Para las siguientes matrices calcule su determinante aplicando propiedades

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

Compare los resultados obtenidos. ¿Son iguales? Justifique porque cada una de estas matrices no tiene inversa.

¡Importante!

Una **matriz** es **nilpotente** si $A^n = 0$ para algún entero positivo n.

V. Dé ejemplo de una matriz nilpotente y encuentre su determinante.

VI. Calcule los determinantes de las siguientes matrices aplicando la regla de Sarrus.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -9 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

es nilpotente porque

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}^2 = 0_3.$$

VII. Investigue si las siguientes matrices tienen inversa alculando su determinante por medio de la regla de Sarrus

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

Aplique los conocimientos adquiridos

1. Si el determinante de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ es 3, calcule los determinantes a las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} & 2a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

¡Importante!

Toda matriz A que coincide con su inversa cumple:

$|A| = 1$ o $|A| = -1$.

Ejemplo

$I_3 = I_3^{-1}$ y $|I_3| = 1$.

2. Encuentre una matriz A de orden 3 tal que $A^n = 0_3$ para algún entero positivo n. Encuentre su determinante. ¿A que es igual? ¿es A nilpotente? ¿puede hacer alguna afirmación acerca del determinante de este tipo de matrices? ¿es la matriz nula de orden 3 nilpotente?

3. Encuentre los valores de x

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} -3x & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 5-x & 6 \\ 4 & 2x+2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

¡Importante!

Si A es una matriz invertible y su inversa es igual a su transpuesta entonces su determinante es igual a 1 o -1. En símbolos

$$A^t = A^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$|A| = \pm 1.$$

4. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ encuentre su determinante luego, calcule A^{-1} y verifique que $|A|\,|A^{-1}| = 1.$

5. Dé ejemplo de una matriz A de orden 3 diferente de I_3 y que coincida con su inversa. Verifique que $|A| = \pm 1.$

6. Dé ejemplo de una matriz A de orden 3 con su transpuesta e inversa iguales y verifique que $|A| = \pm 1.$

Ejercicios finales de la Unidad

1. Dé ejemplo de:

   a. Un sistema de ecuaciones no homogéneo con tres ecuaciones y dos variables.
   b. Un sistema de ecuaciones no homogéneo con tres variables y dos ecuaciones.
   c. Un sistema de ecuaciones homogéneo con tres ecuaciones que tenga una única solución.

2. Resuelva los sistemas de los incisos **a.** y **b.**

3. Investigue si cada una de las ternas dadas es solución de la ecuación correspondiente:

   a. $2x + y - z = 7;$ $(0;\, 0;\, -7)$
   b. $6u - v + 3w = 14;$ $(2;\, 0;\, 1)$
   c. $4r - 3s + 4t = 6;$ $(2;\, -2;\, 0).$

4. Encuentre dos soluciones particulares para cada una de las ecuaciones del ejercicio 3.

5. Dé ejemplo de una ecuación con tres variables que tenga como una de sus soluciones a la terna $(0;\, 0;\, 0).$

6. Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 10 \\ \quad\;\; y - z = 12 \\ \qquad\quad z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3r+2s-t=0 \\ 4s-t=-4 \\ -2t=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2u+4v=w+6 \\ -3u-2v=-3+w \\ 3u=-v+3w-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=-3y-2z-1 \\ -3x=2y-z+3 \\ 2x=y-3z-8. \end{cases}$

7. Resuelva

a. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 15 y la suma de las unidades y las centenas es el doble de las decenas. El número aumenta en 198 si se invierten las cifras. ¿Cuál es el número?

b. La medida del ángulo más grande de un triángulo supera en $15°$ al doble de la medida del más pequeño y 6 veces éste último excede en $30°$ a la suma de los otros dos. Halle las medidas de los ángulos en grados y radianes. ¿Es éste un triángulo acutángulo?

8. Francisca recibió 42 billetes en las denominaciones de 500, 100 y 50 córdobas que corresponden a su salario mensual de maestra que totaliza C\$ $8\,500$. Si la cantidad de billetes de C\$ 50 es la mitad de los de C\$ 100, ¿cuál es la cantidad de billetes de cada denominación?

9. Juana compra en la pulpería 8 lbs. de azúcar, $2\,lbs.$ de pollo y $10\,lbs.$ de arroz por un total de C\$ 257 ¿Cuál es el precio de cada producto si una libra de azúcar, una libra de pollo y una libra arroz cuestan C\$ 52 y además $2\,lbs.$ de pollo más tres libras de arroz totalizan C\$ 97?

10. Invente un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que tenga como variables los precios de una libra de frijoles, una libra de carne roja y 1 litro de aceite.

11. Si $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule

a. C^2-2D

b. D^2-A

c. $4DA$

d. DC

e. CD.

¿Es $DC = CD$?¿Es inmediato el resultado $I\cdot D^2\cdot I^3$, siendo I la matriz identidad de orden 3? ¿Cuál es este resultado?

12. Para las matrices del ejercicio 11. Verifique las siguientes igualdades.

a. $(AD)C=A(DC)$

b. $|CD|=|D||C|$

c. $D(CA)=(DC)A.$

13. Dé ejemplo de una matriz diagonal de orden 3 tal que si suma las componentes $(i;i)$ el resultado es el idéntico para la multiplicación en ⊓

14. Si A y B son matrices de orden 3, obtenga una expresión más simple de:

a) $[I_3(2BA)+3B(A\cdot I_3)]\,I_3^2$

b) $(A+B)(A+B)-(A+B)^2+A^0\cdot A$.

15. Encuentre una matriz que conmute con $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

16. Investigue si las siguientes matrices son idempotentes:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}\pi&0&0\\0&\pi&0\\0&0&\pi\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}.$$

a. Clasifique las matrices anteriores en escalares, triangulares y diagonales.

b. ¿Cuáles de las matrices dadas conmutan al multiplicarlas dos a dos?

c. ¿Son A^2 y B^2 matrices triangulares?¿cuál es triangular inferior y cuál triangular superior?

d. Calcule D^2 y C^2. ¿Son matrices diagonales?

e. Calcule D^3, D^4, C^3, C^4. ¿Qué infiere a partir de los resultados obtenidos? ¿es posible obtener cualquier potencia de C y D de manera rápida? ¿Cuál es?

f. Verifique las igualdades

i. $tr(A+B+C+D)=$
$tr(A)+tr(B)+tr(D)+tr(C)$

ii. $(ABC)^t=C^tB^tA^t$.

g. Encuentre la transpuesta de AB, $B+D+F$, $C-D$ y $D\cdot C$.

h. ¿Cuáles de las matrices del inciso **g.** son simétricas?

i. Encuentre A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} y D^{-1} si existen.

17. Utilice la definición de inversa para investigar si B es la inversa de A.

a. $A=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

b. $A=\begin{bmatrix}6&-2&0\\4&4&0\\0&0&8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{16}&0\\-\frac{1}{8}&\frac{3}{16}&0\\0&0&\frac{1}{8}\end{bmatrix}$

c. $A=\begin{bmatrix}-6&6&9\\3&-3&0\\0&3&12\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{4}{9}&\frac{5}{9}&\frac{1}{3}\\-\frac{4}{9}&-\frac{8}{9}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&0\end{bmatrix}.$

18. Calcule el determinante de las matrices del ejercicio anterior. Si se cumple $B = A^{-1}$, aplique la propiedad

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

19. Suponga que A y B son matrices de orden 3 y $|A| = -2$, $|B| = 6$. Calcule:

a. $|-2AA^{-1}B^{-1}|$

b. $|A^t A^{-1} B|$

c. $|B^{-1}A^{-1}|$

d. $\left|\frac{7}{3}(A^{-1})^2\right|^3$.

20. Calcule los siguientes determinantes aplicando la regla de Sarrus.

a. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 7 & 0 & -3 \\ 9 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

21. a) Dé las componentes $(2;2)$, $(2;4)$, $(1;3)$, $(2;3)$ y $(3;4)$ de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{4}{3} & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -5 \\ \frac{1}{2} & 6 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

b) Calcule la suma, diferencia, cociente y producto de las componentes anteriores. ¿Los resultados son números enteros? Dé dos conjuntos a los cuales cada uno de éstos pertenece.

c) Presente un sistema de ecuaciones del cual A sea la matriz aumentada. ¿Cuál es la matriz de coeficientes de este sistema? ¿Es invertible? ¿El sistema tiene solución? ¿Es única?

22. Investigue cuáles de las siguientes matrices son estocásticas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{6} & \frac{2}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

23. Utilizando los resultados del ejercicio anterior verifique que el producto de dos matrices estocáticas es una matriz estocática.

24. **La criptografía** es el proceso de codificar y descodificar mensajes.

Suponga que usted quiere enviar un mensaje secreto a un amigo, buena opción es codificarlo, para ello siga los siguientes pasos.

Tome una matriz de tamaño 3×3.

Asigne un número a cada letra de nuestro alfabeto. Por conveniencia, asocie cada letra con su posición en el alfabeto: A es 1, B es 2, y así sucesivamente. El espacio entre palabras represéntelo por el número 28.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ñ	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Si su mensaje es: DIOS ES AMOR.
Éste se convertiría en:

D	I	O	S		E	S		A	M	O	R
4	9	16	20	28	5	20	28	1	13	16	19

Escoja una matriz de tamaño 3 llamada matriz codificadora, por ejemplo,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Descomponga el mensaje en una secuencia de matrices columna 3×1 , es decir,

$$\begin{bmatrix}4\\9\\16\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}20\\28\\5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}20\\28\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}13\\16\\19\end{bmatrix}.$$

Para codificar el mensaje multiplicar la matriz codificadora con cada una de estas matrices columna. Por conveniencia forme con estas matrices columnas una matriz 3×4 y obtendrá

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 20 & 20 & 13\\ 9 & 28 & 28 & 16\\ 16 & 5 & 1 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38 & 81 & 77 & 64\\ 51 & 129 & 125 & 93\\ 8 & -35 & -39 & -7\end{bmatrix}.$$

Las columnas de la matriz producto nos dan el mensaje codificado. Este se transmite de forma lineal.

$$38,\ 51,\ 8,\ 81,\ 129,\ -35,\ 77,\ 125,\ -39,\ 64,\ 93,\ -7.$$

Para descodificar el mensaje, su amigo escribe esta señal como una secuencia de matrices columna 3×1 y repite la técnica usando en lugar de A su inversa A^{-1}. Esta sería la matriz descodificadora.

En nuestro caso la inversa de A es

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Multiplica las dos matrices, recordando que debe multiplicar cada fila de A^{-1} por cada columna de la matriz 3×4, así

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 38 & 81 & 77 & 64 \\ 51 & 129 & 125 & 93 \\ 8 & -35 & -39 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 20 & 20 & 13 \\ 9 & 28 & 28 & 16 \\ 16 & 5 & 1 & 19 \end{bmatrix}.$$

Por último, coloca las columnas de la matriz producto de forma lineal y asigna a cada número la letra que corresponde y al 28 un espacio.

D	I	O	S		E	S		A	M	O	R
4	9	16	20	28	5	20	28	1	13	16	19

A. Codifique los siguientes mensajes, utilice una matriz A, 3×3, que sea invertible.

a) Nada es Absoluto, Todo es Relativo.

b) El principio de la sabiduria es el temor a Dios.

c) Vivir sin amigos no es vivir.

d) La sabiduría es mejor que la plata y el oro.

e) Sabiduría es conocer y transformar.

f) Al amigo no le busques perfecto.

g) Un amigo es un segundo yo.

h) Todo lo que necesitas es amor.

i) Los amigos son la familia que se escoge.

j) La disciplina es el mejor amigo del hombre.

B. Descodifique los siguientes mensajes en cada ejercicio se da la matriz con la que se codificó el mensaje dado.

a) $57, 94, -38, 73, 117, -31, 38, 60, -19, 77, 121, -27, 98, 146, -18, 78, 120, -20, 56, 80, 3, 45, 60, 14.$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $70, 46, 75, 139, -81, 206, 67, -169, 108, 45, -71, 70, 26, -62, 59.$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) $15, 110, 207, -63, 34, 128, -118, 59, 148, -70, 38, 127, -91, 117, 193, 44, 58, 185, -64, 117, 207, -63, 26, 60.$

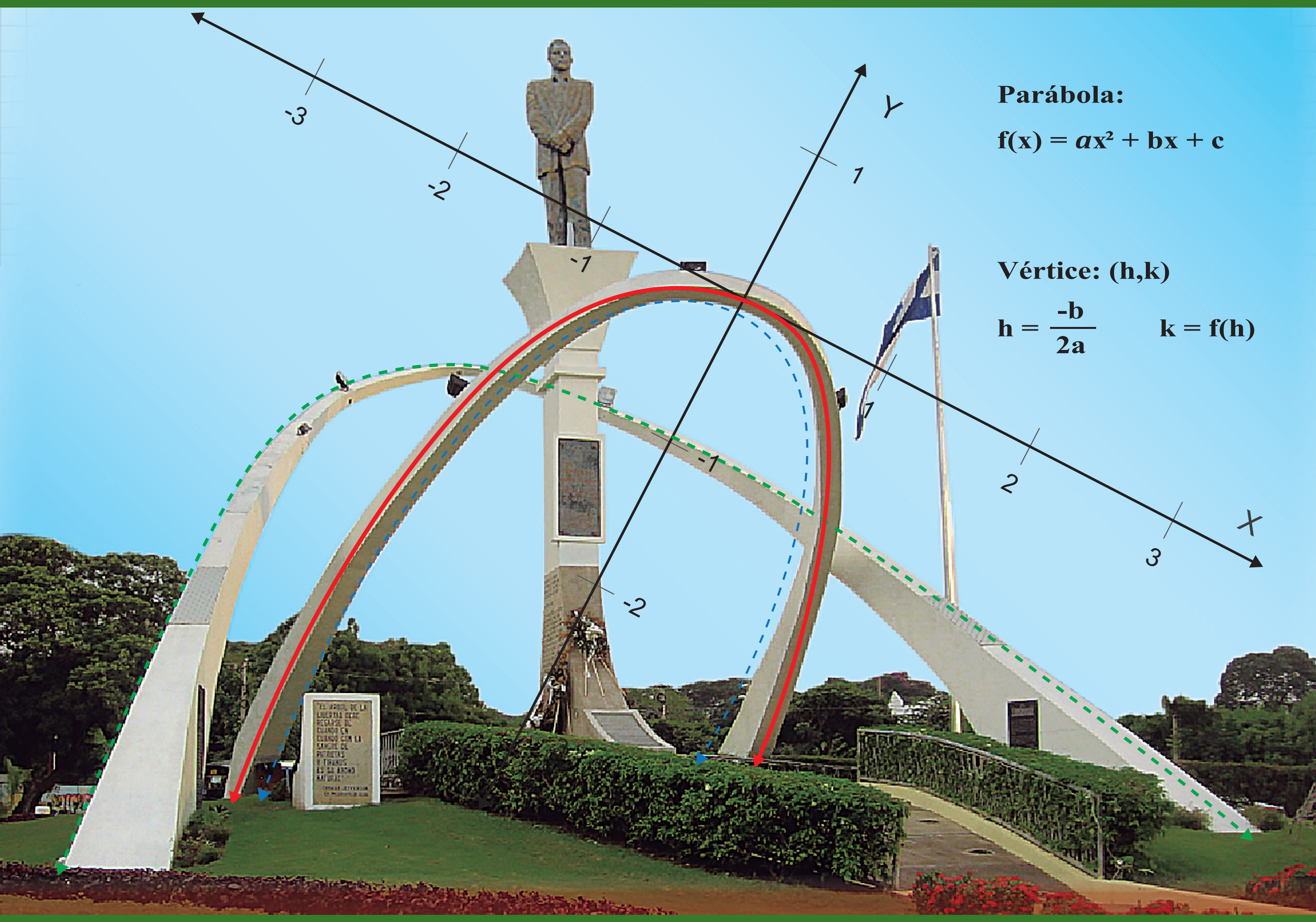
$$C=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

d) $6, -17, 40, 16, -28, 53, -12, 20, -23, 42, -54, 87, -58, 85, -111, -2, 10, 2, -12, 14, -15, -48, 64, -68.$

$$D=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Grafiquemos Funciones

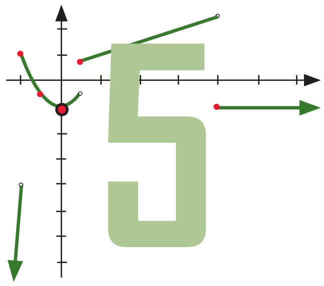
Unidad 5



Pascual Rigoberto López Pérez, más conocido por *Rigoberto López Pérez* (1929 – 1956), poeta nicaragüense e importante símbolo de la revolución, marcó el inicio del fin de la tiranía, pasó a la inmortalidad el 21 de Septiembre de 1956. En septiembre de 1981, Rigoberto López Pérez entró a la lista de héroes nacionales por la "gesta heroica llevada a cabo al ajusticiar al tirano". El Decreto fue aprobado el día en que se cumplieron 25 años del asesinato de López Pérez.

Fuente: 19 digital.
20 de Septiembre 2 013.

Unidad 5



Grafiquemos funciones

Introducción

El concepto de función se ha tornado en un instrumento indispensable para modelar matemáticamente muchas de las actividades de la sociedad, la técnica y los fenómenos naturales. En esta unidad presentamos funciones que tienen más flexibilidad para adecuarse a la realidad como las cuadráticas, las definidas a trozos, la función valor absoluto, etc.

Recuerde, reflexione y concluya

1. Si $x = 0$ ¿por qué punto pasa la gráfica de $f(x) = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$?¿Cómo se llama este punto?

2. ¿Cuál es la pendiente de la recta que esta ecuación representa?

3. ¿Qué condición debe cumplir m para que la función definida por $f(x) = mx + b$ sea creciente o para que sea decreciente?

4. Sea f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ¿Cuál es la gráfica de f? ¿qué característica tiene la gráfica de f, si $a > 0$ y cuando $a < 0$?

5. ¿Cómo se encuentra el vértice de una parábola?

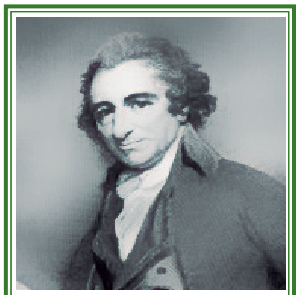
6. ¿Cuál es la abscisa del vértice de una parábola? ¿Cuál es la ordenada?

7. ¿Cómo se encuentran los intersectos de una parábola con el eje x? ¿A lo más, cuántos intersectos con el eje x tiene una parábola?

8. ¿Cuál es el dominio de las funciones lineales?

9. ¿Cuál es el dominio de una función cuadrática? ¿cuál es el recorrido?

10. ¿Siempre una parábola tiene intersecto con el eje y? ¿cómo se encuentra ese intersecto, si existe?



Thomas Bradwardine

$(1\,290 - 1\,349)$

Filósofo, matemático y teólogo inglés, a quien se le dio el nombre de Doctor Profundus.
Aborda el concepto de función potencia.

11. ¿Qué ocurre con la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ si hacemos que el coeficiente b y c varíen ?

Actividad en grupo

1. En una fábrica de puros de Estelí se elabora un tipo de puro llamado Salomón y la cantidad en córdobas que recibe Lissette por x puros fabricados por día está dado por $p(x) = 0{,}72x$. Si el lunes, miércoles y viernes logró fabricar 400 puros cada día, el martes y jueves 500 y el sábado fabricó la mitad del lunes, ¿cuánto recibió de salario semanal? ¿cuál es el dominio de p si el máximo de puros producidos por día es 550? ¿puede x tomar el valor $2{,}5$? Tomen como salario semanal el obtenido anteriormente para calcular el ingreso mensual de Lissette. ¿Es el salario mensual de Lissette mayor que el mínimo establecido en el país? ¿cubre la canasta básica? Tracen la gráfica de p si $1 \leq x \leq 15$. ¿Cuál es la preimagen de $7{,}2$?

Calculen $2p(500) - 5p(120) + 12p(450)$. ¿Es el resultado un número entero? ¿Es racional? ¿Es un número real?

2. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 14$. Si $g(2n) = 9n$, encuentren los valores de n. Bosquejen la gráfica de g y encuentren su recorrido. ¿Cuál es su dominio? Determinen un valor de n para el cuál $g(n) + g(2n)$ sea un número irracional. ¿Es su inverso un número irracional? Encuentren n tal que $g(n)$ sea entero. ¿Qué número real es el inverso de $g(n)$? ¿a qué conjunto pertenece el opuesto de $g(n)$? ¿cuál es la imagen de 2? ¿cuál es la imagen de -2? ¿cuántas preimágenes tiene 18? ¿es g una función inyectiva? ¿es sobreyectiva?

3. Si $2x = 5y$ y $5y = 6m$, encuentren m en función de x.

4. Si $\frac{3x}{6y} = \frac{5}{7}$ ¿cuál es el valor de $\frac{6x}{5y}$?

5. Si las notas obtenidas por Miguel en Álgebra son $2x - 10$, $x + 40$ y $3x - 57$ el promedio de estas es $x + 41$, ¿cuál es el valor de x, qué notas obtuvo Miguel y cuál es su promedio? ¿es Miguel excelente alumno?

Recuerde

Sea a un número real fijo. La aplicación o función lineal de razón a, es la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por una ley de asignación del tipo $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0{,}72x$ es una función lineal.

Recuerde

Si b es la imagen de n bajo una función g, es decir, $b = g(n)$, entonces se dice que n es una preimagen de b bajo g.

Ejemplo:

Si $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 14$, entonces 0 es una preimagen de 14 porque $g(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + 14 = 14$.

¿Existe $n \neq 0$, $n \in \mathbb{R}$ tal que $g(n) = 14$?

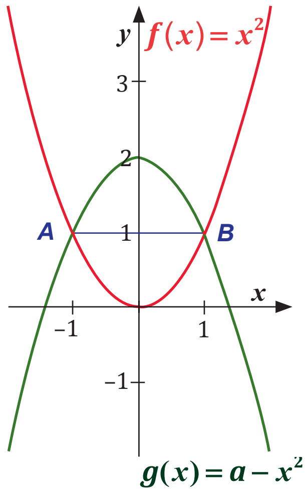


Figura 1

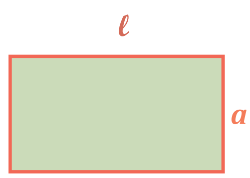


Figura 2

6. La figura 1 muestra la gráfica de las funciones f y g definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=a-x^2$ respectivamente. Si la longitud de $\overline{AB}$ es 2, ¿cuál es el valor de a? ¿Son f y g funciones pares? Encuentren $R_f \cap R_g$, ¿cuál es el vértice de $g(x)=a-x^2$? ¿en qué intervalo f crece y en qué intervalo g decrece? ¿coinciden estos intervalcos? ¿cuál es el valor más aproximado del área de la región acotada por las dos parábolas que ustedes pueden dar? Encuentren dos funciones cuya composición resulte ser g.

7. Si la recta ℓ_1 pasa por $(0;0)$ y tiene pendiente negativa y la recta ℓ_2 es perpendicular a ℓ_1, ¿pasa ℓ_2 por $(0;0)$? ¿tiene ℓ_2 pendiente positiva o negativa? ¿es positivo el intersecto de ℓ_2 con el eje x? ¿puede ser negativo el intersecto de ℓ_2 con el eje y? ¿qué mínima información necesita para obtener la gráfica de ℓ_2?

8. Si $xt=s$, $s=yt$ y $ts\neq 0$, ¿cuál es el valor de y? ¿qué ocurre si $ts=0$?

9. El perímetro y el área del rectángulo de la figura 2 es $p\,cm$ y $42\ cm^2$, respectivamente. ¿Cuáles son algunos posibles valores de ℓ y a si ambos son enteros? ¿y si ambos son racionales no enteros?

10. Si la pendiente de una recta que pasa por los puntos $(x;0)$ y $(-1;2)$ es $\frac{2}{3}$ ¿cuál es el valor de x? Tracen su gráfica.

11. Si $6x-2=7$, ¿cuál es el valor de $\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$? ¿a qué es igual $\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{2}\right)^2$?

12. Si la recta ℓ_1 tiene la ecuación $y=\frac{1}{6}x+3$ ¿qué ecuación tiene la recta ℓ_2 que es la reflexión de ℓ_1 a través del eje x? Grafiquen ambas rectas.

13. Si $t+2\left(x+\frac{1}{2}\right)=w$, encuentren $\frac{1}{2}x+2$ en términos de t y w.

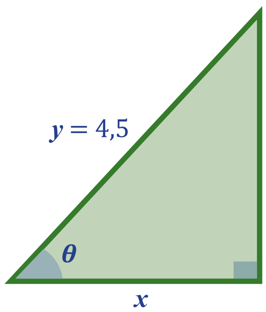


Figura 3

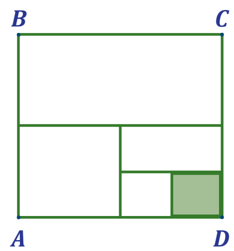


Figura 4

Recuerde

Una función afín es una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por una ley de asignación del tipo $f(x)=ax+b$ donde a y b son números reales $a\neq 0$.

Ejemplo:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
definida por
$f(x)=3x+1$
es una función afín.

14. Si en el triángulo rectángulo de la figura 3, $y=4{,}5$ ¿cuál es el área en términos de x?

15. Para cualesquiera números reales m, n se definen las operaciones $*$ y T de la siguiente manera.

$$m*n=2m+3n$$
$$m\mathrm{T}n=m-2n.$$

¿Son $*$ y T operaciones asociativas y conmutativas?

Si $5*(4x)=(4x)\,\mathrm{T}\,5$, ¿cuál es el valor de x?

Si $y^2=73$ y $xy=24$, ¿cuál es el valor de $(x+y)^2$? ¿es único?

16. En la figura 4, $ABCD$ es un cuadrado. Si los dos cuadrados más pequeños tienen la misma área y además cada uno de los rectángulos no traslapados tiene el doble de área del rectángulo próximo más pequeño ¿Qué fracción del área del cuadrado $ABCD$ es el área del cuadrado sombreado? Si el área del cuadrado $ABCD$ es 16 cm^2 ¿cuál es el área de uno de los cuadrados mas pequeños?

17. Consideren la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=3x+1.$$

a. ¿Cuál es la imagen del único número natural par y primo?

b. Tracen la gráfica de f utilizando una tabla con valores de x que sean números múltiplos de 3.

c. Encuentren una preimagen del número que corresponde a la edad que tiene un estudiante de su grupo.

d. ¿Es f biyectiva? ¿tiene inversa? ¿cuál es?

18. Den ejemplo de una función afín f y una función lineal g. Encuentren $f\circ g$, $g\circ f$ y el dominio de ambas funciones. Tracen en un mismo plano las gráficas de f, g, $f\circ g$ y $g\circ f$. ¿Es $f\circ g$ igual a $g\circ f$? ¿cuántas preimágenes tiene todo número irracional mediante cada una de estas funciones?

Recuerde

Una función cuadrática es una función

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

definida por una ley de asignación del tipo

$f(x)=ax^2+bx+d$,

donde a, b y d son números reales con $a\neq 0$.

Ejemplo

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

definida por

$f(x)=3x^2+2x+4$

es una función cuadrática.

Recuerde

Una función $f:D\rightarrow V$ es función real de variable real si su dominio y codominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Ejemplos:
Las funciones trigonométricas, lineales, cuadráticas y las que estudiaremos en esta unidad son funciones reales de variable real.

19. Consideren la función f definida por $f(x)=(x+5)^2+2$.

a. Encuentren dos funciones h y g cuya composición dé como resultado f.

b. ¿Es f una función inyectiva? ¿Son h y g sobreyectivas?

c. Determinen el dominio y recorrido de f, g y h.

d. Grafiquen la función f utilizando la relación que hay entre el gráfico de f y el de $s(x)=(x+5)^2$.

20. Las siguientes fórmulas de asignación definen funciones cuadráticas

- $f(x)=2(x+5)^2+6$
- $f(x)=-3(x+1)^2$
- $f(x)=(x-4)^2$
- $f(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

Encuentren dominio, recorrido y tracen la gráfica de cada función.

Determinen cuáles de ellas son simétricas respecto al eje y, y por lo tanto pares.

21. Las siguientes fórmulas de asignación definen funciones cúbicas

- $f(x)=2(x+5)^3+6$
- $f(x)=-3(x+1)^3$
- $f(x)=(x-4)^3$
- $f(x)=x^3-\frac{1}{2}$.

Encuentren dominio, recorrido y tracen la gráfica de cada función.

Determinen cuales de ellas son simétricas respecto al origen y en consecuencia impares.

Función definida a trozos o por partes

> **Recuerde**
>
> Si el dominio de una función f se restringe, la función resultante se llama **restricción de f.**
>
> Ejemplo:
>
> $f:[0;\,10)\to\mathbb{R}$
>
> definida por
>
> $f(x)=x^3-5$
>
> es una restricción de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con la misma ley de asignación.

Hasta ahora usted ha estudiado algunas funciones tales como la función lineal, cuadrática, seno y coseno; además, sabe que el dominio de ellas son todos los números reales, pero en el caso de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hay números reales que no están en sus dominios, porque hay una restricción de tipo algebraico, que tiene que ver con sus definiciones. Por ejemplo, 0 no pertenece al dominio de la cosecante porque por definición $\csc x=\dfrac{1}{\text{sen } x}$ y $\csc 0=\dfrac{1}{\text{sen}\,0}=\dfrac{1}{0}$ no está definido.

En este apartado aprenderemos a formar nuevas funciones con trozos de gráficas de funciones ya conocidas, es decir, restringiendo el dominio de éstas construiremos otras de mayor interés práctico.

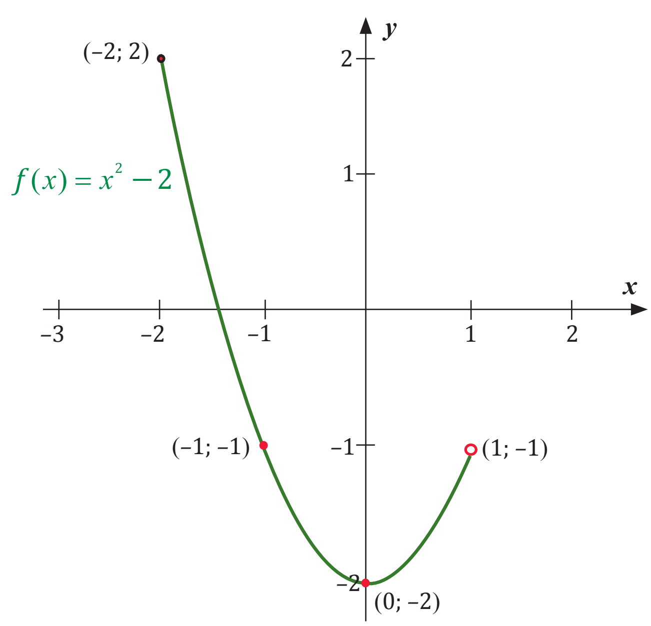
Ejemplo 1

Grafique $f(x)=x^2-2$ para $x\in[-2;\,1)$.

Solución

La gráfica de esta función es una parte de una parábola cuyo vértice es $(0;\,-2)$. Utilicemos los valores de la tabla de la izquierda para trazar su gráfica.

x	$y=x^2-2$
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1



Observe que -2 está en el dominio de f, pero 1 no, esto significa que el punto $(1;\,-1)$ no está en su gráfica y se representa con un círculo sin rellenar.

El recorrido de la función es el intervalo $[-2; 2\,]$. La función es creciente en el intervalo $(0; 1)$ y decreciente en $(-2; 0)$.

Recuerde, siempre que dibuje un trozo de una gráfica debe ubicar los puntos extremos, esto es, si el dominio restringido de f es el intervalo $[a; b)$ ubique $(a; f(a))$, y $(b; f(b))$; en el primero pondrá un círculo relleno porque el intervalo es cerrado en a y en el segundo un círculo vacío porque el intervalo es abierto en b.

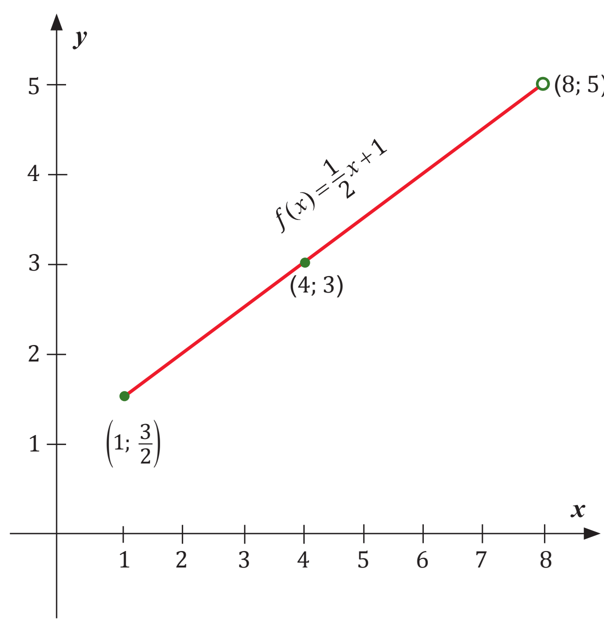
Ejemplo 2

Trace la gráfica de $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ con $1 \leq x < 8$.

Solución

Encontremos los valores de la función f en $x = 1, 4, 8$ (tabla de la izquierda), ubiquemos en el sistema de coordenadas los puntos encontrados y unámoslos con una línea.

x	$y=\frac{1}{2}x+1$
1	$\frac{3}{2}$
4	3
8	5



1. ¿Cuál es el dominio de f? ¿es esta función creciente en todo su dominio?

2. ¿El punto $(0; 1)$ pertenece a la gráfica de f?

3. ¿La gráfica de f intercepta al eje y? ¿intercepta al eje x? ¿cuál es el recorrido de la función?

Observación

La función con la misma ley de asignación del ejemplo anterior y con dominio los números reales tiene como gráfica una recta con pendiente $\frac{1}{2}$, por lo tanto es creciente y además pasa por $(0; 1)$.

4. Trace la gráfica de $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Encuentre la pendiente de g utilizando pares comunes a f y g. ¿Qué características comunes tienen estas dos funciones?

Ejemplo 3

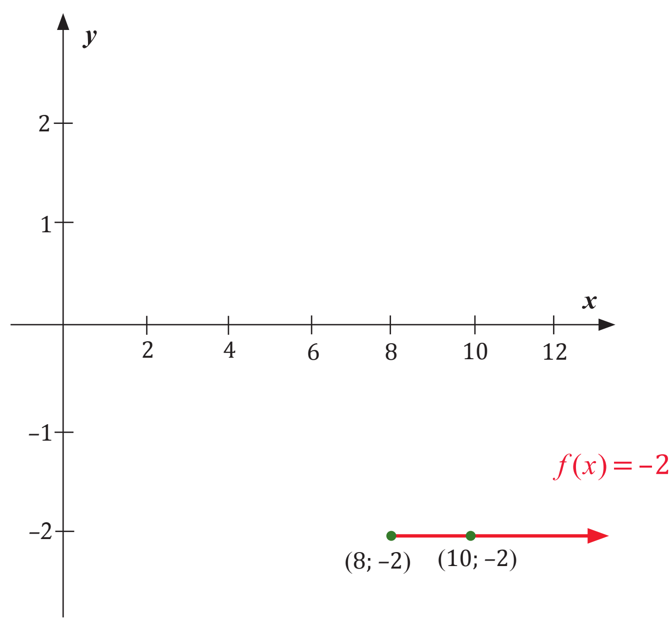
Grafique $f(x) = -2$ si $x \in [8; +\infty)$.

Solución

Sabemos que f es una función constante, porque para cualquier elemento x en su dominio su valor es -2.

En este caso, por el tipo de intervalo en el que está definida la función, solo ubicaremos el punto extremo izquierdo $(8; -2)$ y otro punto con abscisa mayor que 8 (tabla de la izquierda).

x	$y = -2$
8	−2
10	−2



1. ¿Cuál es el recorrido de f? ¿es f creciente? ¿es decreciente?

2. Encuentre un punto $(x; y)$ de la gráfica de f, con abscisa x un número irracional. ¿Cuál es el valor de y para este punto?

3. ¿Es posible encontrar un punto $(x; y)$ de la gráfica de f, tal que $x + y = 2\pi$? ¿cuál es? ¿es x un número racional?

4. Siendo $(x;y)$ un punto de la gráfica de f ¿a qué es igual x, si $x^2+y=142$? ¿puede ser x un número negativo? Justifique su respuesta.

5. ¿Es $(x;y)$ un punto de la gráfica de f, si $x^2+y^2=5$? Justifique su respuesta.

6. ¿Es f una función inyectiva? ¿cuál debe ser el codominio para que f sea sobreyectiva?

7. ¿Puede restringir el dominio de f para que la función resultante sea inyectiva?

8. Dé ejemplo de una función constante cuyo recorrido no sea subconjunto de los números racionales.

Anteriormente vimos la forma de trazar la gráfica de una función con dominio restringido; ahora estudiaremos funciones cuyas gráficas se forman a partir de los trozos de gráficas de funciones definidas sobre determinados intervalos.

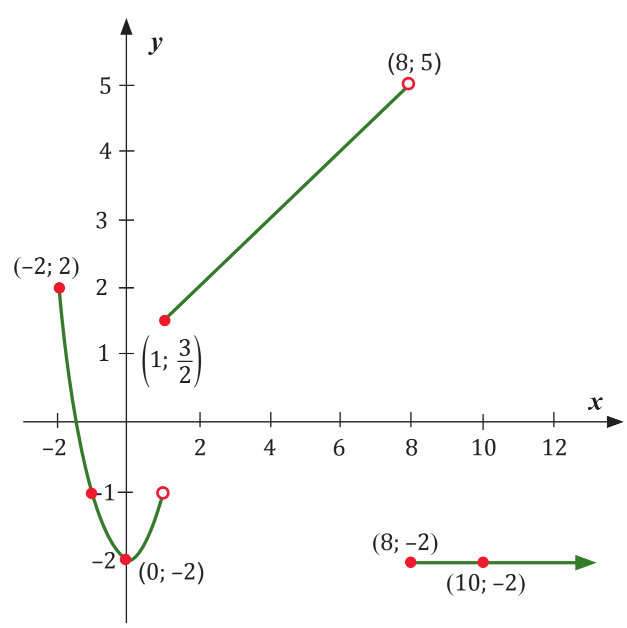
Ejemplo 4

Trace la gráfica de $g(x)=\begin{cases} x^2-2 & -2\leq x<1 \\ \frac{1}{2}x+1 & 1\leq x<8 \\ -2 & x\geq 8 \end{cases}$

Solución

Observe que esta función está definida usando las funciones de los ejemplos 1, 2 y 3. Utilicemos la información que ya tenemos y obtengamos la siguiente gráfica.

x	$y=g(x)$
–2	2
0	–2
1	$\frac{3}{2}$
8	–2
10	–2



Es obvio que $D_g = [-2;\ 1) \cup [1;\ 8) \cup [8;\ \infty)$
$= [-2;\ +\infty)$

El **recorrido** de g es el intervalo $[-2; 5)$.

g **no es inyectiva** porque 0 y 10, elementos del dominio, tienen la misma imagen, -2. De esto se concluye que g no tiene inversa.

g **crece** en los intervalos $(0; 1)$ y $(1; 8)$, **decrece** en $(-2; 0)$ y no crece ni decrece en $(8; +\infty)$.

1. ¿Es g una función par? ¿es g impar? Justifique su respuesta.
2. Dé ejemplo de un conjunto que contenga al dominio de g.
3. Restrinja el dominio de g de tal forma que la función resultante sea inyectiva.

Ejemplo 5

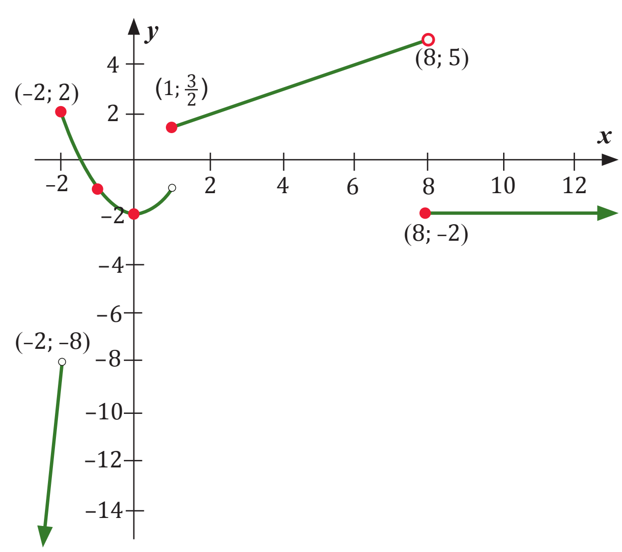
Haga un bosquejo de la gráfica de la función h definida así:

$$h(x) = \begin{cases} x^3 & x < -2 \\ x^2 - 2 & -2 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 & 1 \le x < 8 \\ -2 & x \ge 8 \end{cases}$$

Solución

La gráfica de h se obtiene fácilmente porque solamente se tiene que completar la gráfica de g del ejemplo 4 con una parte de la gráfica de la función f definida por $f(x) = x^3$, que corresponde al intervalo $(-\infty; -2)$. Así tenemos

x	$y = h(x)$
-3	-27
-2	2
-1	-1
0	-2
1	$\frac{3}{2}$
4	3
8	-2
10	-2



Las características de la función h son iguales a las de g del ejemplo 4, en el intervalo $[-2; +\infty)$ puesto que ahí las dos funciones coinciden.

Características adicionales de h son:

Crece en el intervalo $(-\infty; -2)$.

El **recorrido** de h es el intervalo $(-\infty; -8) \cup [-2; 5)$.

El **dominio** de esta función es $\mathbb{R}$, el conjunto de número reales.

Nicolás de Oresme

$(1\,323 - 1\,382)$

Nicolás de Oresme fue un genio intelectual y probablemente el pensador más original del siglo XIV, por su actividad como economista y matemático. Innova en la representación gráfica de una función.

1. Si a h consideramos una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ¿es sobreyectiva?
2. ¿Pertenece a h el par $(-2; -8)$? Justifique su respuesta.
3. ¿Cuál es la imagen, mediante h de $2\,015$ y $2\,020$?
4. Siempre utilizando la función h, ¿cuál es una de las preimágenes de cero? ¿es única? ¿qué justifica su respuesta?
5. ¿Para qué valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 los pares $(x_1; \sqrt{2})$, $(x_2; -27)$, $(x_3; -2)$ y $(x_4; -1)$ pertenecen a h.
6. Si $\left(-\frac{23}{5}; y_1\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; y_2\right)$, $(7; y_3)$ y $(15\,628; y_4)$ son elementos de h, encuentre cada y_i, $i = 1, 2, 3, 4$.
7. Utilice una función cúbica, una lineal y una cuadrática para construir una función definida por partes con dominio los números reales positivos.
8. Trace la gráfica de la función del ejercicio anterior y mencione 5 de sus características que incluyan el dominio y recorrido.

Las funciones del ejemplo 4 y 5 son llamadas funciones a trozos o funciones definidas por partes.

En general,

Una **función** se llama **definida por partes** (a trozos) si la regla que la define incluye más de una expresión (más de una fórmula).

Observación

Cada vez que grafique una función definida por partes no se olvide de realizar la prueba de la recta vertical para asegurarse que no ha cometido errores.

Son ejemplos de **funciones** definidas por partes las llamadas **escalonadas**. A continuación presentamos una de ellas.

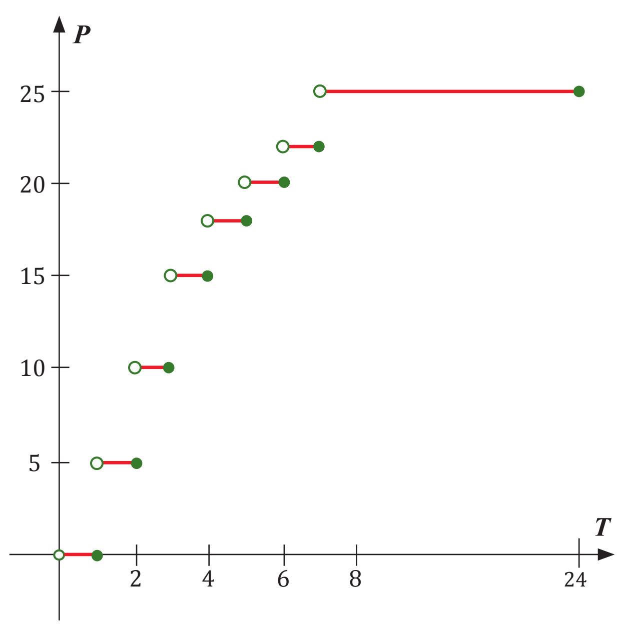
Ejemplo 6

Un lugar de estacionamiento de autos tiene la tabla de precios que aparece a la izquierda donde T es el tiempo en horas y P es el precio en córdobas. Trace su gráfica.

Solución

Es importante aclarar que el precio cambia hasta que transcurren horas completas y según la tabla se paga el máximo cuando se pasa de 7 horas.

T	P
(0; 1]	*gratis*
(1; 2]	5
(2; 3]	10
(3; 4]	15
(4; 5]	18
(5; 6]	20
(6; 7]	22
(7; 24]	25



1. Denotemos por f a la función anterior. Encuentre

$$f(2{,}5),\quad f(22),\quad f(19),\quad f\left(\frac{1}{2}\right),\quad f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(22),$$

$$f(2{,}5)\cdot f(19) - f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de f?

3. Encuentre 4 puntos de la gráfica de f cuyas abscisas sean números racionales no enteros. ¿Hay puntos en la gráfica de esta función cuyas ordenadas sean números no racionales?

4. ¿Pertenecen a la función f los pares $(0; 0)$, $(1; 5)$, $(2; 10)$ y $(3; 10)$? Justifique su respuesta.

5. Grafique a partir de f, las funciones h, g, s y t con leyes de asignación: $h(x) = f(x) - 2$, $g(x) = 4f(x)$, $s(x) = f(x+1)$ y $t(x) = g(x) + 5$. Encuentre el recorrido de cada una de ellas. ¿Son funciones escalonadas?¿alguna de ellas es inyectiva? Si es posible, encuentre una preimagen de 16 mediante cada una de las funciones anteriores.

René Descartes

$(1\,596 - 1\,650)$

René Descartes, también llamado Renatus Cartesius, fue un filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, así como uno de los nombres más destacados de la revolución científica, fue el inventor del Sistema de Ejes Cartesianos.

Función valor absoluto

Para seguir ejemplificando con funciones definidas por partes presentamos la función valor absoluto.

Recuerde que **el valor absoluto de un número real a** coincide con a si a es positivo o cero, o con su opuesto si es negativo. Esto es,

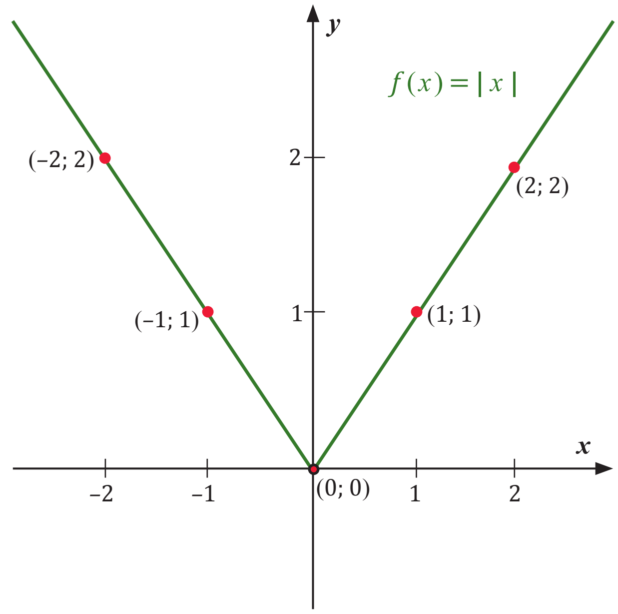
$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Utilicemos la definición anterior para obtener la ley de asignación de la llamada **función valor absoluto** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observe que f es una función definida por partes. Un esbozo de la gráfica de f se obtiene ubicando los puntos que aparecen en la tabla de la página siguiente. Es claro que si x es no negativo el valor de la función coincide con x y si x es negativo el valor $f(x)$ es el opuesto de x.

x	$y = \lvert x \rvert$
–2	2
–1	1
0	0
1	1
2	2



Algunas características de la función valor absoluto:

1. El **dominio** consta de los números reales.

2. Su **recorrido** es el conjunto de números reales no negativos.

3. Crece en el intervalo $(0; +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty; 0)$.

4. Su gráfica es **simétrica** respecto al eje y.

5. Es una función **no inyectiva**, porque la recta horizontal $y = 1$ corta a su gráfica en dos puntos distintos.

Conteste lo siguiente:

1. ¿Es f sobreyectiva? ¿tiene f inversa?

2. Calcule $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $\dfrac{f(0) - f(-4)}{2f(5)}$, $[f(4) + f(7)]^2$ y $[f(4)]^2 + 2f(4) \cdot f(7) + [f(7)]^2$. ¿Son iguales los dos últimos resultados? ¿En qué basa su respuesta?

3. ¿Cuántas preimágenes tiene $\sqrt{2}$ mediante f?¿Cuáles son? En general, ¿cuántas preimágenes tiene cada entero positivo?

4. ¿Cuál es el intersecto con x de la gráfica de f?¿cuál con y? ¿cuál es el valor mínimo de f?¿tiene valor máximo?

A partir de la función valor absoluto, podemos obtener otras funciones y sus gráficas, por ejemplo las definidas por

$$y = |x| + b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Simplemente trazamos la gráfica de $f(x) = |x|$ y luego la desplazamos $|b|$ unidades verticalmente hacia abajo, si $b < 0$ y b unidades verticalmente hacia arriba si $b > 0$.

Ejemplo 7

Trace la gráfica de $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si

1) $g(x) = |x| - 3$

2) $h(x) = |x| + 3$.

Solución

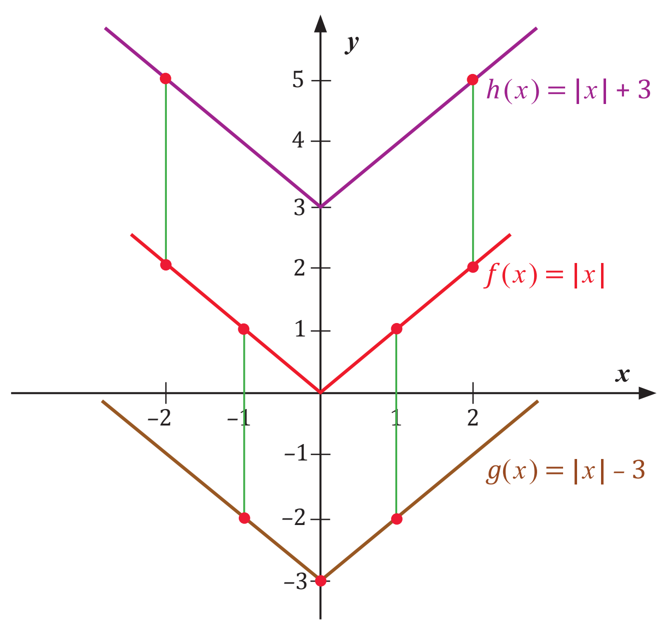
Recuerde

Si f y g son funciones reales de variable real, entonces $f+g,\ f-g,\ f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$, son funciones reales de variable real con leyes de asignación:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$,
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)};\ g(x) \neq 0$

El dominio de las tres primeras es $D_f \cap D_g$. El dominio de la función cociente es $D_f \cap D_g$ menos el conjunto formado por aquellos valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

Una manera fácil de graficar cada una de estas funciones es trazar la gráfica de $f(x) = |x|$ y desde varios puntos de ella bajar o subir, según el caso, segmentos verticales de longitud 3, luego se unen los puntos finales de estos segmentos, recordando que cuando una gráfica se desplaza verticalmente su forma no cambia. Así las dos gráficas solicitadas son:



Conteste lo siguiente:

1. Encuentre el recorrido de h y g. ¿Cuál es el valor mínimo de cada función?

2. Mencione 3 elementos de $\mathbb{R}$ que mediante g no tengan preimagen.

3. ¿Son inyectivas o sobreyectivas las funciones g y h? ¿tienen inversa?

4. Utilice el método de tabulación para graficar g y h.

5. Grafique, encuentre dominio y recorrido de las funciones $g-h$ y $g+h$.

6. ¿Cuáles son los intersectos de g y h con los ejes x e y?

Otras funciones para las cuales resulta fácil encontrar sus gráficas son las que tienen como ley de asignación $y=|x+a|$, porque solamente tenemos que desplazar horizontalmente la gráfica de $y=|x|$, a unidades hacia la izquierda si $a>0$ y $|a|$ unidades hacia la derecha si $a<0$.

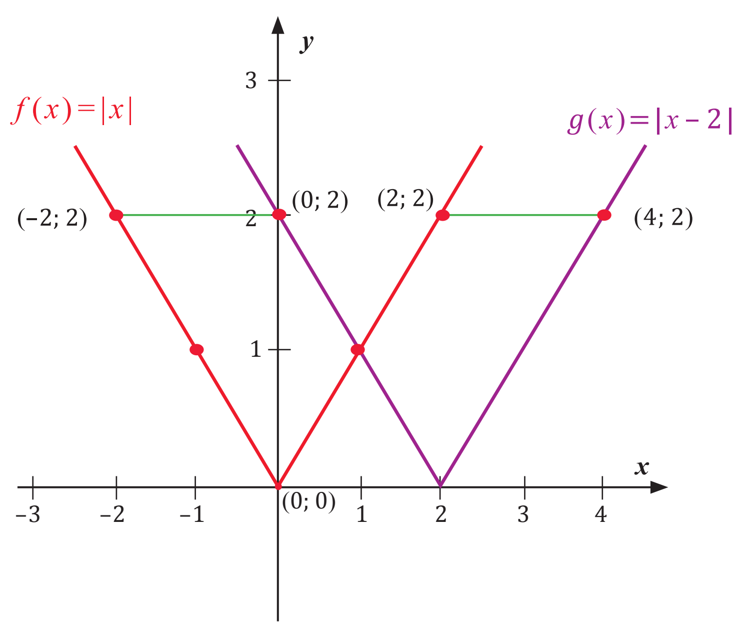
Ejemplo 8

Trace la gráfica de la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=|x-2|$.

Solución

Primero graficamos $f(x)=|x|$; a continuación desplazamos horizontalmente la gráfica de f dos unidades a la derecha puesto que $-2<0$. Así obtenemos

x	y = |x−2|
−1	3
0	2
1	1
2	0
4	2



Observe que para trasladar la gráfica 2 unidades a la derecha utilizamos una manera similar a la del traslado vertical, esto es, desde los puntos $(-2; 2)$, $(0; 0)$ y $(2; 2)$ formamos segmentos horizontales de 2 unidades de longitud, luego trazamos la nueva gráfica uniendo los puntos finales de estos segmentos.

Es importante destacar que una gráfica trasladada horizontalmente tiene la misma forma de la original.

Ahora queremos obtener la gráfica de $g(x)=c|x|$, con c un número real no nulo, a partir de la gráfica de $f(x)=|x|$.

Vamos a considerar tres casos: $c<0$, $0<c<1$, $c>1$.

I. Si $c>1$, el efecto sobre la gráfica de $f(x)=|x|$ es un alargamiento en sentido vertical en un factor c.

Ejemplo 9

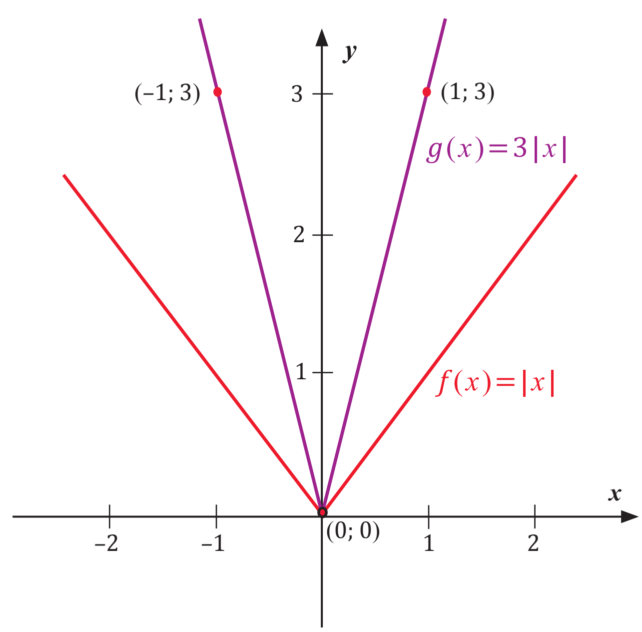
Trace la gráfica de $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con ley de asignación

$$g(x)=3|x|.$$

Solución

Con el objetivo de comparar, ubiquemos la gráfica de $f(x)=|x|$ y $g(x)=3|x|$ en un mismo sistema de coordenadas. Utilicemos los puntos que aparecen en la tabla de la izquierda

x	$g(x)=3\|x\|$
–1	3
0	0
1	3



Jean Bernoulli

$(1\,667 - 1\,748)$

Define por primera vez lo que es una función: "Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de alguna manera, por esa variable y por constantes".

Podemos ver que f y g tienen las siguientes características comunes.

1. El mismo **dominio**: el conjunto de los **números reales**.
2. **Recorridos** iguales: los números **reales no negativos**.
3. Son **simétricas**, respecto al eje y; y por lo tanto, son funciones pares.
4. f **No** es **inyectiva** porque -1 y 1 tienen la misma imagen, 1, tampoco g es inyectiva ¿por qué?.
5. Si las consideramos funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ no son sobreyectivas, por lo tanto **no tienen inversa**.

Conteste lo siguiente:

1. Las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9 pueden representarse como funciones por partes, encuentre las leyes de asignación que así lo muestre. Determine, si es posible, una preimagen del número real e y de -200 mediante cada una de estas funciones.
2. Grafique la función m definida por $m(x) = 3|x| + 5$. Observe que su gráfica la puede obtener a partir de la gráfica de g desplazándola 5 unidades hacia arriba.
3. Desplace la gráfica de m, 2 unidades hacia abajo y luego 4 unidades hacia la izquierda. ¿Cuál es la ley de asignación para la función resultante? ¿cuál es su dominio y recorrido? ¿en qué intervalos crece? ¿es una función par?

II. Cuando $0 < c < 1$ el efecto sobre la gráfica de $f(x) = |x|$ es una compresión vertical.

Ejemplo 10

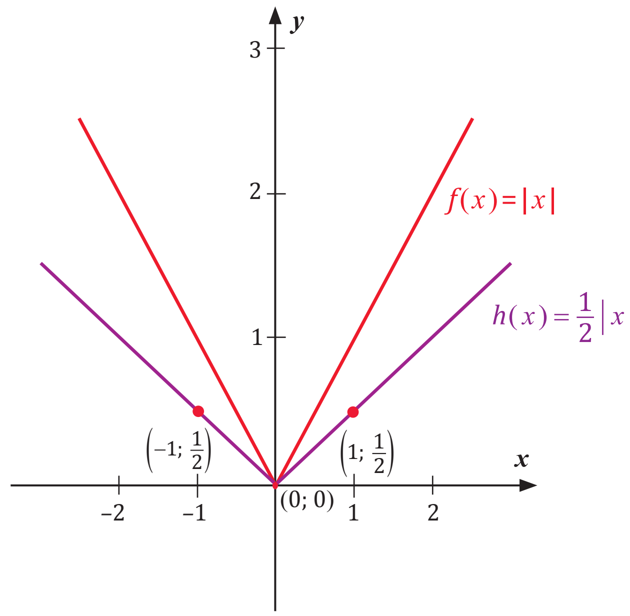
Trace la gráfica de la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{1}{2}|x|.$$

Solución

Al igual que en el ejemplo anterior, ubiquemos las gráficas de las funciones f y h en un mismo sistema de coordenadas; utilicemos los valores de la tabla que esta en la siguiente página de la izquierda para obtener la gráfica de h.

x	$h(x)=\frac{1}{2}\lvert x\rvert$
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$



¡Cuidado!

En general,

$|a+b| \neq |a|+|b|$.

Ejemplo,

$$|-2+3| = |1| = 1 \neq |-2|+|3| = 5.$$

Conteste lo siguiente:

1. Menciones 5 características comunes de f y h.
2. Dé ejemplo de 3 elementos de h cuyas coordenadas sean números naturales.
3. Traslade la gráfica de h, 2 unidades horizontalmente a la izquierda y 3 unidades verticalmente hacia arriba. ¿Cuál es la ley de asignación y el recorrido de la nueva función?¿es ésta una función par?¿se interseca su gráfica con el eje x y con el eje y?
4. Calcule $h(a+b)$, $h(a)+h(b)$ con $a, b \in D_h$ (Dominio de h).
5. Encuentre dos elementos a y b del dominio de h tal que $h(a+b) = h(a)+h(b)$. En general, ¿a qué conjunto deben pertenecer a y b para que la igualdad se cumpla?
6. h puede definirse con la ley de asignación

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Utilizando esta ley de asignación, trace la gráfica de h, y compárela con la obtenida en el ejemplo 10.

III. Analicemos con el siguiente ejemplo el caso cuando $c < 0$.

Ejemplo 11

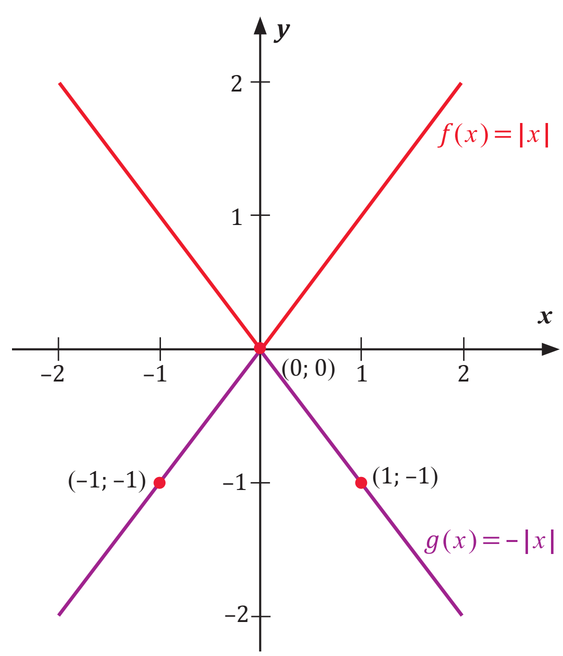
Trace la gráfica de g si $g(x) = -|x|$.

Solución

Una de las características de la función f, con ley de asignación $f(x) = |x|$, es su recorrido compuesto solamente por números reales, positivos o cero; todo lo contrario sucede con g, que asigna a cada número real x, el opuesto de su valor absoluto $-|x|$, de lo que resulta que su recorrido sea el conjunto de los números reales no positivos.

La gráfica de $g(x) = -|x|$ es una reflexión de la gráfica de $f(x) = |x|$ a través del eje x. En palabras sencillas, la gráfica de g se obtiene "volteando" alrededor del eje x la gráfica de f, así tenemos

x	$g(x) = -\|x\|$
-1	-1
0	0
1	-1



Conteste lo siguiente:

1. Calcule $g(\pi)$ y $g(-\pi)$. ¿Son iguales? ¿qué nos dice este resultado acerca de la función g?

2. ¿g tiene inversa?

3. ¿En qué intervalo g decrece? ¿en qué intervalo crece?

4. ¿Qué características comunes tienen f y g?

5. g puede representarse a trozos, dé la ley de asignación que así lo demuestre.

6. ¿Es g una función par?

En general, para gráficar $y = -c\,|x|,\ c > 0,$ solamente obtenga la gráfica de $y = c|x|$ y luego a la última gráfica aplíquele reflexión a través del eje x.

Para finalizar este tema hagamos un resumen de todo lo aprendido a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 12

Trace la gráfica de g definida por $g(x) = -2\left|x-3\right|+1$.

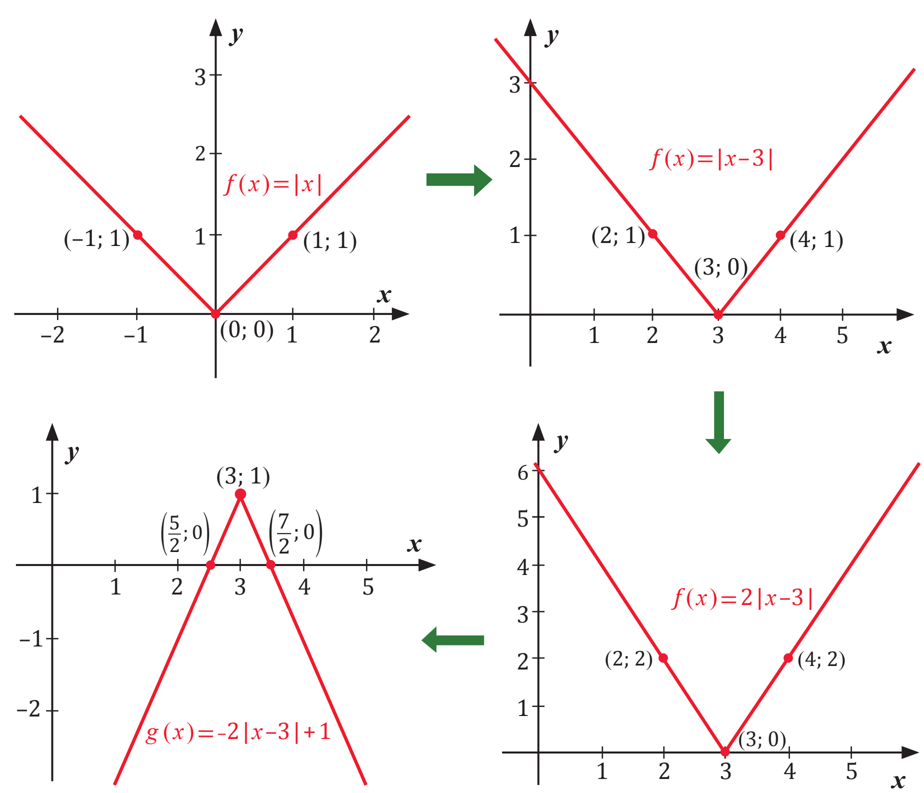
Solución

Podemos obtener la gráfica de g aplicando una traslación horizontal de 3 unidades a la derecha de la gráfica de $f(x) = |x|,$ luego un alargamiento en sentido vertical en el factor 2, y por último, una reflexión respecto al eje x y una traslación vertical de una unidad hacia arriba.

x	$f(x) = \|x-3\|$
2	1
3	0
4	1

x	$f(x) = 2\|x-3\|$
2	2
3	0
4	2

x	$g(x) = -2\|x-3\|+1$
$\frac{5}{2}$	0
3	1
$\frac{7}{2}$	0



Otra forma de trazar la gráfica de g, es análoga a la que usted utilizó para obtener la gráfica de $y=a(x-h)^2+k$, la parábola con vértice en $(h; k)$.

Dado que $g(x)=-2|x-3|+1$, $a=-2$, $h=3$ y $k=1$, luego $(h; k)=(3; 1)$.

De gran ayuda es calcular los intersectos con los ejes.

Para encontrar el intersectos con y hacemos $x=0$,

$y=-2|0-3|+1=-2|-3|+1=-2(3)+1=-5.$

Luego el intersecto con y es $(0; -5)$.

Ahora encontremos el intersecto con x, haciendo $y=0$, así

$$0=-2|x-3|+1 \rightarrow |x-3|=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

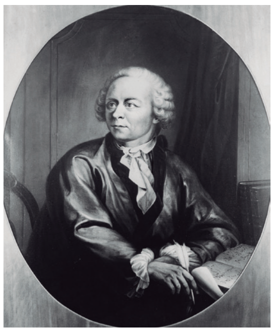
$$\rightarrow x-3=\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x-3=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x=\frac{1}{2}+3 \quad \text{o} \quad x=-\frac{1}{2}+3$$

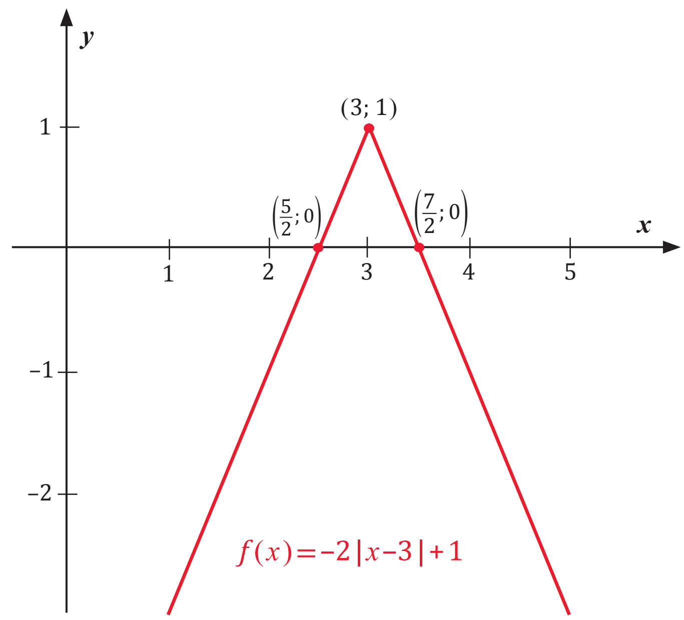
$$\rightarrow x=\frac{7}{2} \quad \text{o} \quad x=\frac{5}{2}.$$

Por tanto, los puntos de intercepción de la gráfica de g con el eje x son $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$ y $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Por último observemos que el parámetro a es negativo, lo cual significa que la gráfica de g abre hacia abajo. Ubiquemos en un plano cartesiano los puntos encontrados, seguidamente los unimos para obtener la gráfica siguiente:



Leonhard Euler
(1 707 – 1 783)
Además del uso de $f(x)$ para expresar el valor de una función dio la siguiente definición: “Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada por la cantidad variable y números o cantidades constantes”.



Función mayor entero

Otra función definida por partes es la mayor entero.

Si $x \in \mathbb{R}$, definimos $[x]$ así,

$[x] = n$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $x-1 < n \leq x$.

Ejemplo 13

$$\left[\frac{1}{2}\right]=0, \quad [2{,}6]=2, \quad \left[\sqrt{2}\right]=1, \quad [-2{,}3]=-3.$$

Conteste lo siguiente:

1. Encuentre

$$[-\pi], \quad [\pi], \quad \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right], \quad \left[-\sqrt{3}+\sqrt{5}\,\right], \quad [-14{,}07].$$

2. ¿ Es $[0{,}7]+\left[-\sqrt{7}\,\right]\cdot[3{,}85]$ es un número entero? ¿por qué?

¡Cuidado!

En general,

$[a+b] \neq [a] + [b]$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}[3{,}9+4{,}8] &= [8{,}7] \\ &= 8 \\ &\neq \\ [3{,}9]+[4{,}8] &= 3+4 \\ &= 7.\end{aligned}$$

La función **mayor entero** f (o parte entera de x) está definida por

$$f(x)=\left[x\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esta función hace corresponder a cada número real x el mayor entero menor o igual que x.

Tracemos la gráfica de esta función tomando en cuenta que para cualquier $x \in [a, a+1)$, a entero, $f(x) = a$.

Por ejemplo, para cualquier $x \in [-2, -1)$, $f(x) = -2$.

Algunos puntos de la gráfica los podemos obtener de la tabla siguiente.

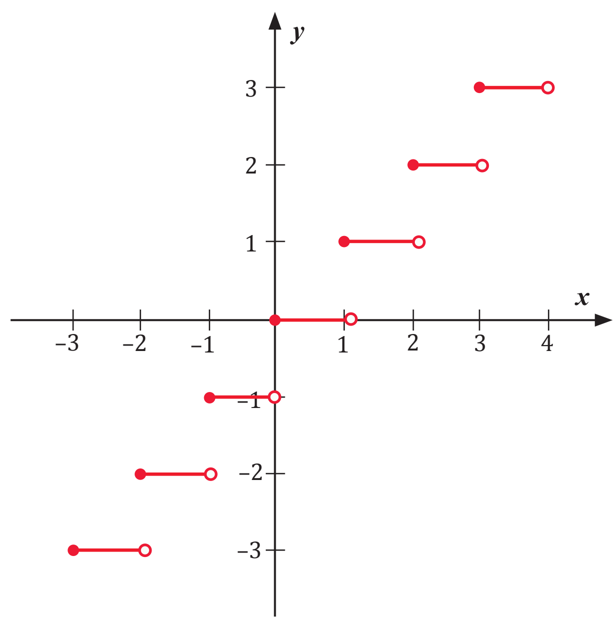
Intervalo	$f(x) = [x]$
$-3 \leq x < -2$	-3
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$3 \leq x < 4$	3

Nicole de Condorcet

$(1\,743 - 1\,794)$

Retoma la definición general de Euler. Señala: "Tengo un cierto número de cantidades x, y, z y para valor definido de x, y, z, f tiene uno o más valores definidos".

Así, una parte de la gráfica de f es:



Puesto que el dominio de f es $\mathbb{R}$, siguiendo el mismo patrón, la gráfica se extiende indefinidamente a izquierda y derecha.

Algunas características de esta función son:

1. Tiene como **recorrido** el conjunto de **los números enteros**.
2. Si la consideramos una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, no es **sobreyectiva** pues $\frac{1}{2}$ no tiene preimagen.

3. **No es inyectiva** ya que todos los números reales entre -1 y 0 tienen la misma imagen, -1.

4. **No es una función par** puesto que $f(-x) \neq f(x)$ para algún x real, por ejemplo $f(-1{,}5) = -1 \neq f(1{,}5) = 1$. Luego f no es simétrica respecto al eje y.

Conteste lo siguiente:

1. ¿Es f simétrica respecto al origen? ¿es f una función impar?

2. Encuentre un valor $x > \pi$ para el cual $[x] = [-x]$.

3. Encuentre un valor $x > 4$ tal que $[x]$ y $[-x]$ sean opuestos, esto es, $f(x) + f(-x) = 0$.

4. Verifique las propiedades de la suma de números reales.

$$\left[-\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{7}\right]=\left[\sqrt{7}\right]+\left[-\sqrt{2}\right]$$

$$\left(\left[-\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{7}\right]\right)+[6{,}04]=\left[-\sqrt{2}\right]+\left(\left[\sqrt{7}\right]+[6{,}04]\right)$$

$$\left[-\sqrt{2}\right]+\left(-\left[-\sqrt{2}\right]\right)=-\left[-\sqrt{2}\right]+\left[-\sqrt{2}\right]=0.$$

5. ¿Es f es una función escalonada?

6. ¿Qué característica deben cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que $[a+b] = [a] + [b]$?¿y para qué no se cumpla la igualdad?

7. Dé ejemplos de dos números irracionales $5 < a,\ b < 6,\ a \neq b$ que cumplan $[a+b] \neq [a] + [b]$. Encuentre otra pareja de irracionales en el mismo intervalo para la cual $[a+b] = [a] + [b]$. Halle para la primera pareja el opuesto de $[a+b]$ y el inverso de $[b]$, calcule $([a]-[b])^2$ y $([a])^2 - 2[a][b] + ([b])^2$. ¿Son iguales los resultados?

Al igual que en el caso de la función valor absoluto, utilizando la función mayor entero podemos obtener otras funciones con ley de asignación tal como: $g(x)=\left[x\right]+a,\quad a\in\mathbb{R},\quad a\neq 0,$ o bien $h(x)=c\left[x\right],\quad c\in\mathbb{R},\quad c\neq 0$.

Gustave Dirichlet
$(1\,805 - 1\,859)$

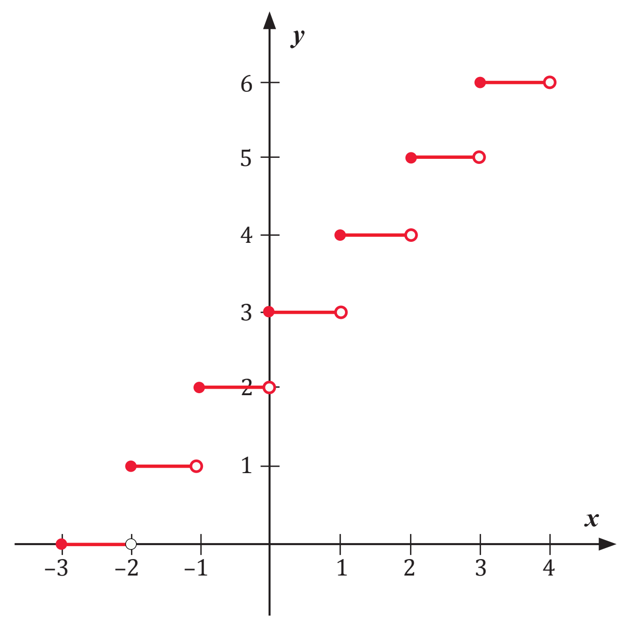
Es uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX. Desde muy joven demostró una aptitud excelente para las matemáticas. Además fijó el concepto general de función como correspondencia entre los elementos de dos conjuntos. Según él: dos variables x e y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla, se asigna automáticamente un valor a y, se dice que y es una función de x.

Ejemplo 14

Trace la gráfica de $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si $g(x)=[x]+3$.

Solución

Por lo hasta ahora discutido, la gráfica de g la podemos obtener a partir de la gráfica de $f(x)=[x]$ por un traslado vertical de 3 unidades hacia arriba. Por ser una función por partes, cada trozo de ésta se traslada 3 unidades hacia arriba.



Conteste lo siguiente:

1. Observe que cualquier $x\in[-3;\,-2)$ tiene como imagen al número 0.

2. Menciones 5 características comunes de f y g.

3. ¿Por qué f y g son dos funciones distintas?

4. Verifique las siguientes propiedades del producto de números reales

$$g(-4{,}18)\cdot g\left(-\sqrt{11}\right)=g\left(-\sqrt{11}\right)\cdot g(-4{,}18)$$

$$\left(g(0)\cdot g(2)\right)\cdot g(-6{,}5)=g(0)\cdot\left(g(2)\cdot g(-6{,}5)\right).$$

5. ¿ Tiene $g(x)$ inverso, $\forall x\in\mathbb{R}$?

6. ¿Existe $(x;\,y)\in g$, tal que $g(x)=\dfrac{1}{g(x)}$? Dé un ejemplo.

7. Dé ejemplo de un número de Fermat no primo y encuentre su imagen mediante g. En la actualidad, ¿cuántos números primos de Fermat existen? ¿cuáles son?

¿Sabía qué?

Un número de Fermat es un número natural de la forma $2^{2^n}+1$ para algún n natural. Si el número de Fermat es primo se llama número primo de Fermat.

Ejemplo:

3 y 5 son números primos de Fermat porque

$3=2^{2^0}+1$

$5=2^{2^1}+1.$

8. ¿Existe $(x;\ y) \in g$, tal que x e y sean diferentes múltiplos de 3? ¿hay algunas parejas $(x; y)$ de g tal que x e y sean números primos? En el caso que existan dé ejemplos.

9. ¿Cuántos valores de x hacen verdadera la expresión $[x] + 3 = 0$? Dé ejemplo de algunos.

10. Encuentre recorrido, intersectos con x e y, y bosqueje la gráfica de la función s definida por $s(x) = 2[x] + 3$. ¿Cuál es el opuesto y el inverso de $s(3)$?

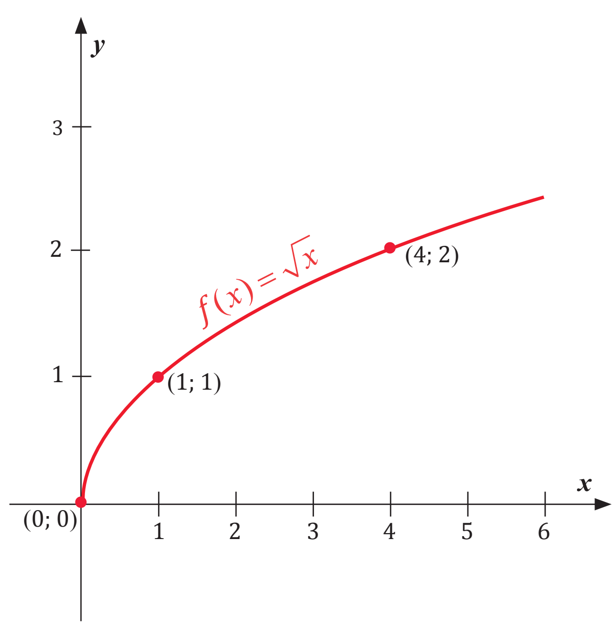
Función raíz cuadrada

Llamamos a f función raíz cuadrada si $f(x) = \sqrt{x}$.

Para hacer un bosquejo de la gráfica de esta función, primero observemos que x no puede ser negativo, esto es, el dominio de f es el intervalo $[0;\ +\infty)$. ¿Por qué?

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2

Ubiquemos los puntos que corresponden a los pares de la tabla de la izquierda y unámoslos con una curva suave.



¡Importante!

Una función es monótona creciente si ésta es creciente en todo su dominio y es monótona decreciente si es decreciente en todo su dominio.

Son características de la función raíz cuadrada las siguientes:

1. El **recorrido** de f es el intervalo $[0; +\infty)$.

2. Es una función **creciente** en todo su dominio. Luego es una función monótona creciente.

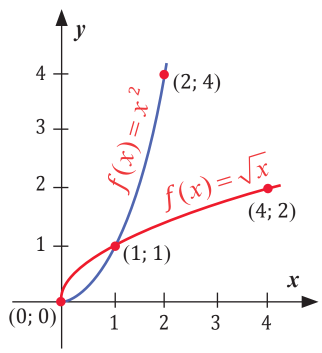


Figura 5

Recuerde

Para $a, b \in \mathbb{R}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

3. Es **inyectiva** porque si $x \neq y$, entonces $\sqrt{x} \neq \sqrt{y}$.
   Por ejemplo, $9 \neq 25$ y $\sqrt{9} = 3 \neq \sqrt{25} = 5$.

4. Considerada como una función de $[0; +\infty)$ a $[0; +\infty)$, f es **sobreyectiva**.

5. Por **3.** y **4.** f **tiene inversa**, $f^{-1}: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ definida por $f^{-1}(x) = x^2$ (figura 5). Compruébelo.

Conteste lo siguiente:

1. Calcule $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$. ¿Qué valor de x cumple que $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$?

2. Encuentre el inverso de $\sqrt{11}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{2\,014}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, y $\sqrt{144}$. ¿Cuáles son las preimágenes, mediante f, de los valores anteriores? ¿para cuáles de los números anteriores su inverso es un número entero? ¿para cuáles es un número racional no entero?

3. Verifique la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números reales.
$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{8}{27}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}}.$$

4. ¿El resultado anterior es un número natural?¿qué imagen tiene mediante f?

5. Utilice f para encontrar las preimágenes de $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $\sqrt{\frac{8}{27}}$.

A continuación, a partir de la función raíz cuadrada obtendremos 4 funciones y sus gráficas, para ello aplicaremos de manera consecutiva una traslación horizontal de 2 unidades a la derecha, una elongación por un factor de $\frac{3}{2}$, luego una reflexión a través del eje x y por último una traslación vertical de 3 unidades hacia arriba.

Ejemplo 15

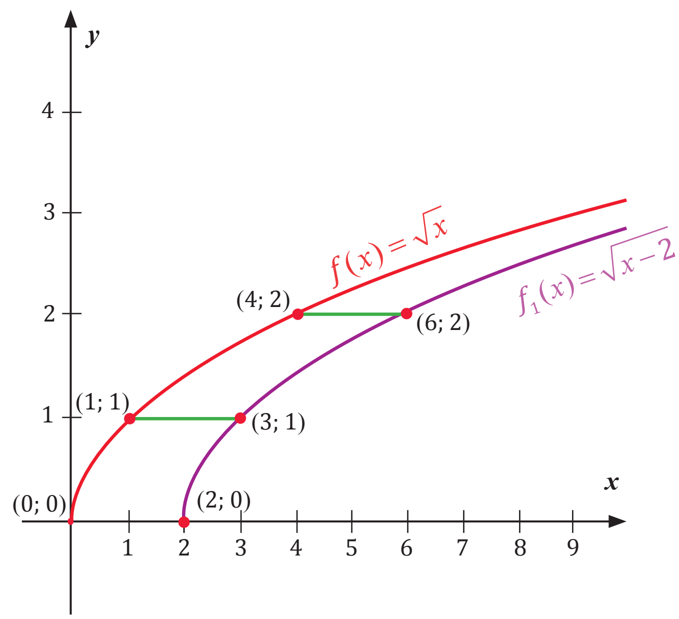
Grafique en forma consecutiva las siguientes ecuaciones

1. $f_1(x) = \sqrt{x-2}$,
2. $f_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-2}$
3. $f_3(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$,
4. $f_4(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x-2} + 3$.

Solución

1. $f_1(x)=\sqrt{x-2}$ es el resultado de aplicar a $f(x)=\sqrt{x}$ una traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha.

x	$f_1(x)=\sqrt{x-2}$
2	0
3	1
6	2



Puede apreciarse que los puntos que se ubican en la gráfica de f_1, difieren de los que corresponden a la gráfica de f solamente en las abscisas, se les ha sumado 2 unidades. Puede utilizar este hecho para hacer el bosquejo de la gráfica de f_1.

Complete

$(f_1+f)(4)=$ _____

$(f_1-f)\left(\frac{25}{9}\right)=$ _____

$(f_1\cdot f)(6)=$ _____

$\left(\frac{f_1}{f}\right)(16)=$ _____

$\left(\frac{f}{f_1}\right)(66)=$ _____

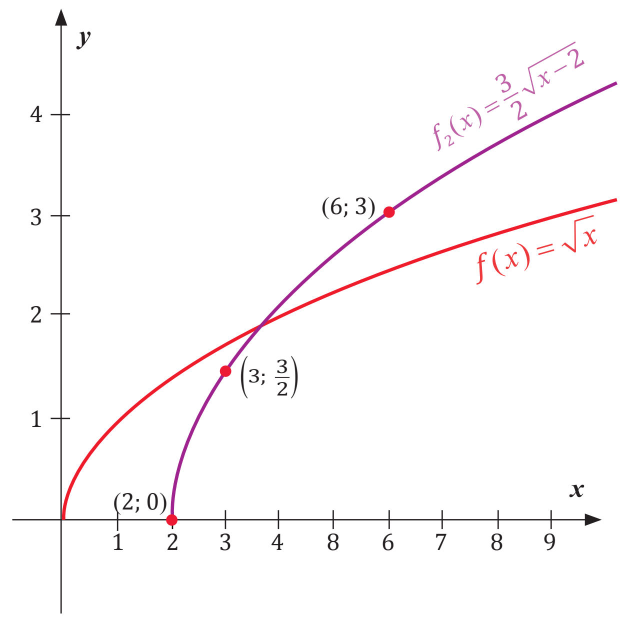
$(f-f_1)(11)=$ _____

Conteste lo siguiente:

1. ¿Cuál es el dominio de f_1? ¿cuál es su recorrido?
2. ¿f_1 es monótona? ¿tiene inversa? ¿cuál es?
3. Calcule $(f+f_1)(x)$, $(f-f_1)(x)$, $(f\cdot f_1)(x)$, $\left(\frac{f}{f_1}\right)(x)$
4. Determine dominio y recorrido de $f+f_1$, $f-f_1$, $f\cdot f_1$ y $\frac{f}{f_1}$.
5. ¿Para qué valores reales $\frac{f}{f_1}$ no está definida?

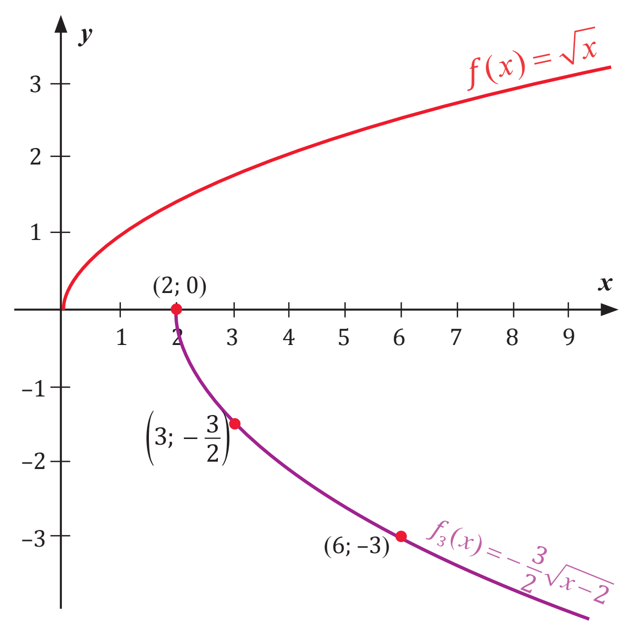
2. $f_2(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$ puede ser considerada como el resultado de aplicar a f una traslación horizontal de 2 unidades y luego una elongación por un factor de $\frac{3}{2}$. Como en **1.** la gráfica de f ya fue traslada verticalmente 2 unidades solo nos resta multiplicar por $\frac{3}{2}$ la ordenada de cada par de f_1 (tabla de la izquierda).

x	$f_2(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$
2	**0**
3	$\frac{3}{2}$
6	**3**



3. Bosquejar la gráfica de $f_3(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$ es relativamente fácil, porque se puede obtener a partir de la gráfica de f por traslado horizontal de ésta de 2 unidades (gráfica de f_1), luego una elongación por un factor de $\frac{3}{2}$ (gráfica de f_2) y por último aplicamos reflexión a través del eje x. Puesto que ya hemos realizado las dos primeras transformaciones, simplemente aplicamos reflexión a la gráfica de f_2. Así obtenemos.

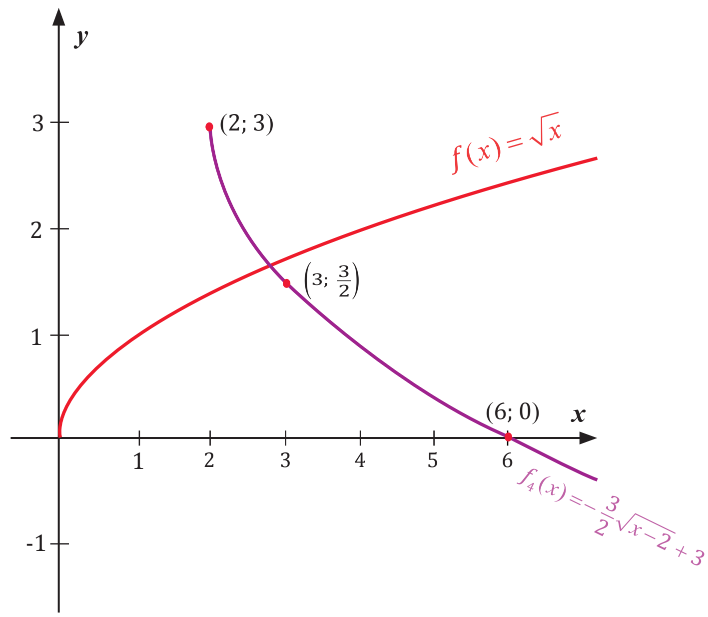
x	$f_3(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$
2	**0**
3	$-\frac{3}{2}$
6	**-3**



El efecto de la reflexión sobre f_2 es el cambio de signo de las ordenadas de sus pares.

4. La gráfica de $f_4(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{x-2}+3$ es inmediata, solamente trasladamos la gráfica de f_3, 3 unidades hacia arriba. Por tanto, la gráfica buscada es:

x	$f_4(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{x-2}+3$
2	3
3	$\frac{3}{2}$
6	0



Compruebe lo aprendido

I. Si

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & \text{si } x\geq 1 \\ -x^3, & \text{si } x<1 \end{cases}$$

determine $f(1)$, $f(0)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ y $f(-2)$. Trace la gráfica de f.

II. Si

$$f(x)=\begin{cases} -10 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 10 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

halle $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\sqrt{10}\right)$ y $f(-2)$. ¿Cuál es el recorrido y el dominio de la función? Trace la gráfica de f.

III. Encuentre el dominio de la función dada y trace su gráfica

a. $f(x)=\sqrt{2x+3}$

b. $f(x)=\sqrt{15-5x}$.

IV. Encuentre el dominio de f y bosqueje su gráfica

a. $f(x)=\sqrt{x-4}+5$

b. $f(x)=\sqrt{7-3x}-2.$

V. Encuentre dominio, recorrido y grafique

a. $y=|x|+2$
b. $y=-|x|+3$
c. $y=-|2x-1|$
d. $g(x)=|2x|-3$
e. $y=2[x]$
f. $f(x)=[x]+1.$

Henri León Lebesgue
(1875 - 1941)

Nació en Francia el 28 de junio de 1875 y murió el 26 de julio de 1941.

Sobre el concepto de función apunta: "Existe una función cuando hay correspondencia entre y, y los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia.

Aplique los conocimientos adquiridos

I. Dadas las funciones f y g con las siguientes leyes de asignación $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=[x]$.

a. Calcule $g(n)$ si $n=f(9)$.

b. Si $m=g(-0{,}001)$, ¿existe $f(m)$?

c. Calcule $f(3)$, $g(-5{,}03)$.

d. Encuentre valores x_1, x_2 tales que $f(x_1)\cdot g(x_2)$ sea:

- Un número irracional.
- Un número racional no entero.
- Un número natural.
- Un entero negativo.

e. ¿A qué tipo de intervalo de números reales debe pertenecer x_2 para que $f(x_1)+g(x_2)$ sea positivo, si $f(x_1)\neq 0$?

II. La tabla de la izquierda muestra algunos valores de una función f. Si f es una función valor babsoluto de la forma $f(x) = n|x| + s \quad n,\ s \in \mathbb{R}$.

x	$f(x)$
-2	**8**
-1	a
0	**1**
1	b
2	c

a. ¿Cuál es el valor de C^3, $f(0) + C^3$ y $(a + b)(a \cdot b)$ este último resultado en función de a?

b. Con la información dada en la tabla ¿puede encontrar $a + b + c$, $a + c$ y $b + c$?

c. ¿Son iguales $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$? ¿por qué?

d. Determine la ley de asignación para f, dominio y recorrido y esboce su gráfica.

III. Sean h y g definidas por $h(x) = [x]$ y $g(x) = \sqrt{x}$ respectivamente. Si la función f está definida por $f(x) = g(3x) + 1 + h(x)$, encuentre $f(x)$.

a. Encuentre la ley de asignación de $g + f$, dominio y recorrido de $g + h$.

b. ¿A qué es igual $(g + h)(5)$, $f(5)$, $(g + f)(5)$? ¿existe $(g + h)(-2)$, $f(2\,017)$, y $(g + f)(-7{,}33)$

Funciones racionales

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué es un número racional?

2. ¿Hay números no racionales que se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$, con a y b elementos de un conjunto numérico?

3. ¿Si $x = \frac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, podemos afirmar que x es un número racional?

4. ¿Son iguales las funciones f y g definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ y $g(x) = x + 3$?

5. ¿Dé 5 ejemplos de polinomios con coeficientes reales?

6. ¿Es $\frac{1}{2} + x^2 - 3$ un polinomio con coeficientes racionales?

7. Divida x^2+5x-6 entre $x+6$ usando división sintética.

8. Factorice la expresión $2x^2+9x+4$.

¿Sabía qué?

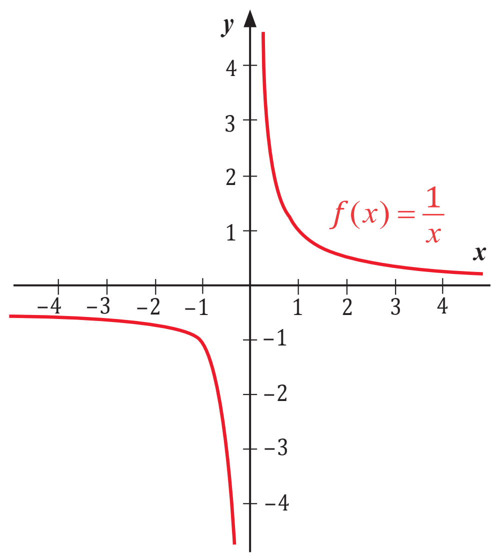
El término asíntota fue introducido por Apolonio de Perga.

Una asíntota de una curva es una recta tal que la distancia entre ésta y la curva tiende a cero cuando ellas tienden a infinito.

La recta $y=b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si $f(x)$ se aproxima cada vez más a b, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 1

$y=0$ es la asíntota horizontal de la función f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$ según podemos constatar en la gráfica que aparece a la derecha.



¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función f?

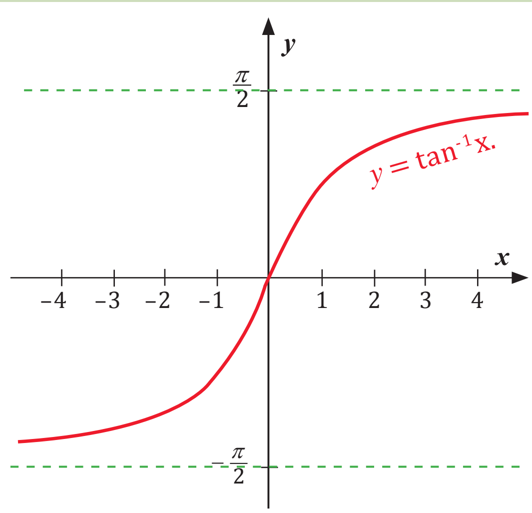
¡Importante!

El término asíntota proviene del griego ασυμτπωτος = que no coincide.

Dibuje la gráfica de $g(x)=-\dfrac{1}{x}$. ¿Tienen f y g el mismo dominio? ¿es g simétrica respecto al origen?

Ejemplo 2

En la unidad de trigonometría estudiamos funciones con dos asíntotas horizontales, por ejemplo, $f(x) = \arctan(x)$.



Ejemplo 3

Identifique las asíntotas horizontales de la función $g(x)=\dfrac{3x+1}{x}$, y describa su comportamiento cuando $|x|$ es muy grande.

Solución

Usando el algoritmo de la división polinomial, escribimos

$$g(x)=\frac{3x+1}{x}=3+\frac{1}{x}.$$

Observemos el comportamiento de la fracción $\dfrac{1}{x}$.

Si $x\to\infty$ (x crece mucho), entonces $\dfrac{1}{x}\to 0$ ($\dfrac{1}{x}$ tiende a cero), resultando que

$$\frac{3x+1}{x}=3+\frac{1}{x}\to 3 \quad \text{cuando } x\to\infty.$$

Si ahora $x\to-\infty$, entonces $\dfrac{1}{x}\to 0$, luego

$$\frac{3x+1}{x}=3+\frac{1}{x}\to 3 \quad \text{cuando } x\to-\infty,$$

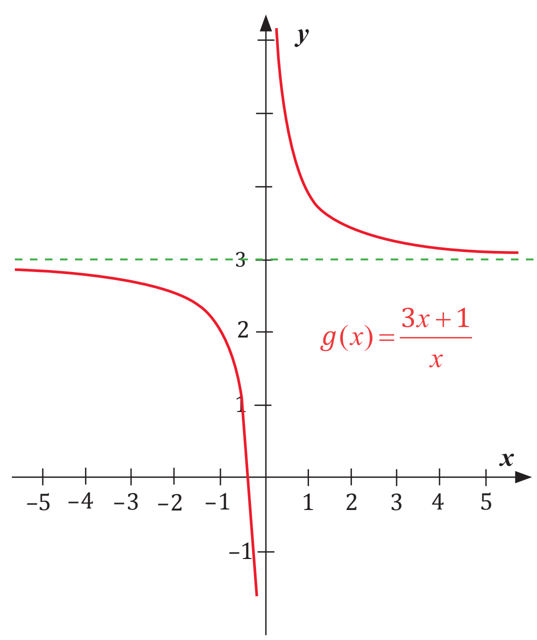
Combinando ambas consideraciones, encontramos que

$$\frac{3x+1}{x}=3+\frac{1}{x}\to 3 \quad \text{cuando } x\to\infty.$$

El análisis anterior puede ser trasladado a la gráfica de la derecha.

1. ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función g?

2. Dibuje la gráfica de la función h con ley de asignación $h(x)=\dfrac{3x-1}{x}$. ¿Tienen h y g el mismo dominio? ¿son h y g simétricas respecto al origen?



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig, Alemania.
Aunque la noción matemática de función estaba implícita en la trigonometría y las tablas logarítmicas, fue el primero, en emplearla explícitamente para denotar alguno de los varios conceptos geométricos derivados de una curva, tales como abscisa y ordenada.
Introduce el nombre "función", que fue utilizado para designar las cantidades cuyas variaciones están ligadas por una ley.

3. Dé la ley de asignación de una función cuya gráfica se obtenga por traslación vertical de la gráfica de g, 3 unidades hacia abajo. Identifique su asíntota, ¿con cuál función coincide?

Vale observar que la gráfica de $g(x)=\frac{3x+1}{x}=\frac{1}{x}+3$ representa una traslación vertical de 3 unidades hacia arriba de la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$, esto es, la gráfica de f se ha elevado 3 unidades hacia arriba.

La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función f si $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.

En el ejemplo 1 pudimos observar que $x=0$ es una asíntota de la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$. Además $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a cero por la izquierda y $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ por la derecha.

¡Importante!

La suma y el producto de polinomios es un polinomio, además estas operaciones cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y neutro. La existencia de opuesto vale solo para la suma.

Posiblemente usted ha notado que hemos usado la expresión $\frac{1}{x}$ para definir una función, a pesar de que no hemos dicho con qué tipo de ente matemático estamos trabajando. Necesitamos, sin embargo, puntualizar los conceptos de polinomio y función polinomial, antes de definir las funciones racionales.

¡Importante!

Todo número real a es un polinomio en la variable x porque se puede expresar en la forma ax^0.

Un **polinomio en una variable x** es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4

$2x^3-3x^2+30$, $8x^2+15$ y 24, son polinomios en la variable x.

¡Cuidado!

El cociente de dos polinomios no necesariamente es un polinomio.

Una **función polinomial** es simplemente, una función cuya regla de asignación está regida por un polinomio.

Ejemplo 5

Las funciones cúbicas, cuadráticas y lineales son funciones polinomiales.

Sean g y h funciones polinomiales con $h(x) \neq 0$. Entonces la función dada por

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}$$

es una función racional.

Sabemos que $g(x) = 1$ y $h(x) = x$, son funciones polinomiales, luego $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función racional, llamada función recíproca.

¡Importante!

$f(x) = \frac{1}{x}$ no es función polinomial, pero sí una función racional.

Carta de Identidad de la función recíproca

1. Regla de asignación: $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Dominio: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.
3. Recorrido: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.
4. La gráfica tiene trazo continuo para $x \neq 0$.
5. $f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$, función impar (simetría respecto al origen).
6. Decreciente en $(-\infty;\ 0)$ y en $(0;\ +\infty)$.
7. No tiene máximo ni mínimo.
8. Asíntota horizontal: $y = 0$.
9. Asíntota vertical: $x = 0$.
10. $f(x) \to -\infty$ cuando x tiende a 0 por la izquierda.
11. $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.
12. No tiene intersecto con los ejes coordenados.

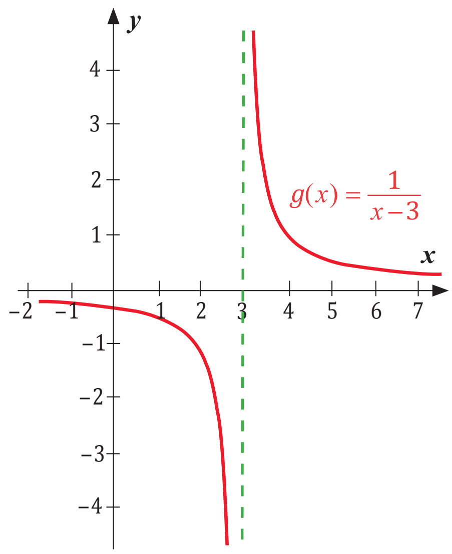
Veamos ahora el porqué de nuestra atención especial a la función recíproca y su variante, $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Ejemplo 6

Examine las características de la función g cuya ley de asignación es $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

Solución

Podemos ver que si $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=f(x-3)=\frac{1}{x-3}$, es decir, trasladamos la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ tres unidades a la derecha. Esto nos da idea acerca de la ubicación de la gráfica de g la cual aparece a la derecha.



Conteste lo siguiente:

1. ¿Cuál es la ecuación de la asíntota vertical y horizontal que aparece en la gráfica de g?
2. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de g?
3. ¿Es g creciente o decreciente? ¿ en qué intervalos?
4. ¿Tiene esta función valor máximo y mínimo?
5. ¿Para qué intervalos la función g tiene trazo continuo?

Ejemplo 7

Examine las características de la función definida por $h(x)=\frac{2}{x-3}$.

Solución

Debe observar que la única diferencia que hay entre esta función y la anterior es el factor 2, es decir,

$$h(x)=\frac{2}{x-3}=2\left(\frac{1}{x-3}\right)=2f(x-3).$$

La gráfica de $h(x)$ es el resultado de desplazar la función recíproca 3 unidades a la derecha y luego extenderla en el factor 2 (figura 6).

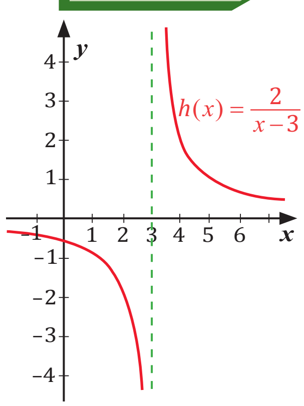


Figura 6

Carta de Identidad de la función h definida por $h(x)=\dfrac{2}{x-3}$.

1. Dominio: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. Recorrido: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. La gráfica tiene trazo continuo para $x \neq 3$.

4. $h(-x)=\dfrac{2}{-x-3} \neq -h(x) = -\dfrac{2}{x-3}$, no es una función impar (no es simétrica respecto al origen). ¿Es par?

5. Decreciente en $(-\infty; 3)$ y en $(3; +\infty)$.

6. No tiene máximo ni mínimo.

7. Asíntota horizontal: $y=0$.

8. Asíntota vertical: $x=3$.

9. $h(x) \to -\infty$ cuando x tiende a 3 por la izquierda.

10. $h(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

11. Intersecto con el eje y es el punto $\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Dé la ley de asignación de una función cuya gráfica se obtenga por traslación horizontal de la gráfica de h, 2 unidades hacia la izquierda. Identifique sus asíntotas.

Recuerde

Si $a \to \infty$ entonces $\dfrac{1}{a} \to 0$,

y si $a \to 0$, entonces $\dfrac{1}{a} \to \infty$.

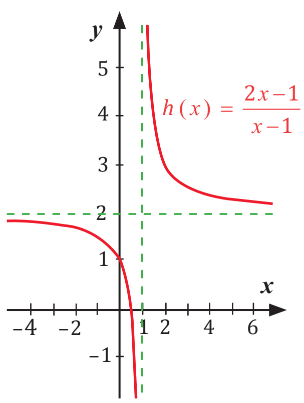


Figura 7

Ejemplo 8

Identifique la asíntota vertical de la función definida por $h(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$. Examine el comportamiento de la función h en las cercanías de su asíntota vertical.

Solución

Escribamos $h(x)=2+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Claramente, $x=1$ es una asíntota vertical.

Analicemos ahora el comportamiento de la función en las proximidades de la recta $x=1$:

Si $x \to 1^+$ (x se acerca a 1 por la derecha), $h(x) \to +\infty$

Si $x \to 1^-$ (x se acerca 1 por la izquierda), $h(x) \to -\infty$

La gráfica de esta función aparece en la figura 7 de la página anterior.

1. ¿Cuántos movimientos fueron necesarios para llegar a la gráfica de $h(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ a partir de la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$? Trace en su cuaderno la gráfica que resulta de cada movimiento geométrico, acompañándolo de su respectiva función expresada en forma algebraica.

2. Escriba la carta de identidad de la función anterior.

Recuerde

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no nulo, existen dos únicos polinomios $q(x)$ y $\gamma(x)$ tales que:

$P(x) = Q(x)q(x) + \gamma(x)$

y $\gamma(x) = 0$ o grado de $\gamma(x)$ es menor que grado de $q(x)$.

Ejemplo 9

Examine las características de la función definida por $h(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$.

Solución

En este caso realizamos primero la división entre los polinomios $3x-2$ y $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} 3x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -3x+3 & 3 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Luego, $\dfrac{3x-2}{x-1} = 3 + \dfrac{1}{x-1} = f(x-1) + 3$, siendo f la función recíproca.

De nuevo podemos observar que la gráfica de la función recíproca ha sido trasladada, en esta ocasión 1 unidad horizontalmente hacia la derecha y luego 3 unidades hacia arriba (figura 8).

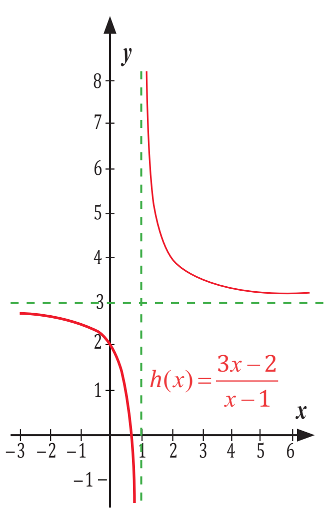


Figura 8

Conteste lo siguiente:

1. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de h?

2. ¿Dónde se encuentran ahora la asíntota horizontal y vertical? ¿cuales son sus ecuaciones?

3. ¿Qué le ocurre a $h(x)$ si x crece mucho $(x \to +\infty)$? ¿si decrece $(x \to -\infty)$?

4. ¿En qué intervalos h es decreciente?

5. ¿Tiene esta función valor máximo o mínimo?

6. ¿Para qué valores la función h tiene trazo continuo?

7. Calcule $h(0)$, $h(0{,}5)$, $h\left(\frac{11}{3}\right)$, $h(-10)$, $\frac{2\,015}{23}+2h\left(\frac{11}{3}\right)$,

$$-h\left(\frac{11}{3}\right),\ \frac{h(0{,}5)}{h\left(\frac{11}{3}\right)},\ \frac{h(0{,}7)}{h\left(\frac{241}{101}\right)},$$

$$\left[\frac{h(0{,}5)}{h\left(\frac{11}{3}\right)}+\left(\frac{h(0{,}5)}{h\left(\frac{11}{3}\right)}\cdot\frac{h(0{,}7)}{h\left(\frac{241}{101}\right)}\right)\right]+\left[\frac{h(52)}{h(17)}\right].$$

8. Encuentre los intersectos de la gráfica de h con los ejes coordenados. ¿Son números enteros? ¿son números primos?

Observe que $x=1$ anula el denominador de $\frac{3x-2}{x-1}$, pero no al numerador.

En general, para el caso de cocientes entre dos polinomios lineales podemos decir lo siguiente:

La gráfica de $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (con $c \neq 0$ y $x \neq \frac{c}{d}$) tiene dos asíntotas:

a) La asíntota vertical es la raíz del denominador $x=\frac{-d}{c}$.

b) La asíntota horizontal es la recta $y=\frac{a}{c}$.

Edouard Goursat
$(1\,858-1\,936)$

Nació en Francia el 21 de mayo $1\,858$. En $1\,923$ Edouard Goursat, da la definición de función que aparece en la mayoría de los libros de texto hoy en día: "Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y=f(x)$".

¡Importante!

En el ejemplo 9, la asíntota vertical es $x=1$ y la horizontal $y=3$ ¿Por qué?

Ejemplo 10

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+5}$.

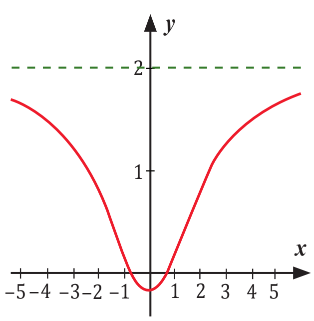
Solución

Igual que en el ejercicio anterior podemos usar la división para escribir a $f(x)$ como

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+5}=2-\frac{11}{x^2+5}.$$

Si observamos los valores permisibles para la variable x, vemos que el dominio es el conjunto de los números reales, sin excepción, luego $f(x)$ no tiene asíntotas verticales. Por otra parte, cuando x crece o decrece sin medida, x^2 crece positivamente, igual que x^2+5, de modo que $\dfrac{11}{x^2+5}$ se hace muy pequeño, prácticamente cero. Es decir $y=2$ funciona como asíntota horizontal.

Este razonamiento eminentemente analítico se ve confirmado por la gráfica de $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+5}$ (ver figura 9).



$f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+5}$

Figura 9

Los intersectos con el eje x son los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\,0\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\,0\right)$.

Conteste lo siguiente:

1. ¿Cuál el recorrido de f?
2. ¿La gráfica de f tiene asíntota vertical?
3. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ si x crece mucho? ¿si decrece?
4. ¿En qué intervalo f es decreciente o creciente?
5. ¿Tiene esta función valor máximo? ¿y mínimo?
6. ¿En qué intervalos la función f tiene trazo continuo?

7. Calcule

a) $f(0)$

b) $f(3{,}35)$

c) $f\left(\frac{101}{111}\right)$

d) $f(9{,}7)$

e) $\frac{2\,017}{23}+2f(0)$

f) $\frac{f(0{,}75)}{f\left(\frac{15}{7}\right)}$

g) $\frac{f(3{,}35)}{f\left(\frac{101}{111}\right)}$

h) $\frac{f(0{,}5)}{f\left(\frac{121}{13}\right)}+\frac{f(9{,}7)}{f\left(\frac{341}{101}\right)}$

i) $\left[\frac{f(5{,}5)}{f\left(\frac{61}{3}\right)}\cdot\frac{f(13{,}7)}{f\left(\frac{41}{101}\right)}\right]+\frac{f(196)}{f(17)}.$

8. ¿Es $\left[\frac{f(5{,}5)}{f\left(\frac{61}{3}\right)}+\frac{f(196)}{f(17)}\right]\cdot\left[\frac{f(13{,}7)}{f\left(\frac{41}{101}\right)}+\frac{f(196)}{f(17)}\right]$

igual a

$$\left[\frac{f(5{,}5)}{f\left(\frac{61}{3}\right)}\cdot\frac{f(13{,}7)}{f\left(\frac{41}{101}\right)}\right]+\frac{f(196)}{f(17)}?$$

9. ¿Cuál de los cálculos anteriores corresponde al intersecto de la gráfica de f con el eje y. ¿es un número racional? ¿y si es entero es compuesto?

Recuerde

Máximo común divisor de dos números enteros es el mayor de sus divisores comunes.

Seguramente usted habrá notado la semejanza en la escritura de un número racional y la ley de asignación de una función racional: ambas son expresiones que constan de numerador y denominador, y en ambas se habla de fracciones simples cuando el máximo común divisor entre numerador y denominador es ± 1. Además se puede utilizar la división entre dos números enteros o entre polinomios. Por ejemplo, la fracción $\frac{7}{2}$ puede escribirse como $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$, donde 3 es un entero; análogamente, la función racional $\frac{3x^2+1}{x+1}$ puede escribirse como $\frac{3x^2+1}{x+1}=3x-3+\frac{4}{x+1}$, donde $3x-3$ es un polinomio y $\frac{4}{x+1}$ es una fracción racional reducida.

En algunas ocasiones la función dada necesitará ser transformada a un cociente de dos polinomios veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

Verifique que la función dada por $f(x)=1+\dfrac{3}{x-\dfrac{2}{x}}$ es una función racional y encuentre su dominio.

Solución

Debemos realizar algunas operaciones algebraicas para expresar a f como el cociente de dos polinomios.

$$f(x)=1+\frac{3}{x-\dfrac{2}{x}}=1+\frac{3}{\dfrac{x^2-2}{x}}=1+\frac{3x}{x^2-2}=\frac{(x^2-2)+3x}{x^2-x}=\frac{x^2+3x-2}{x^2-2}.$$

En conclusión, f es una función racional.

La función f no está definida en su forma original para los valores $x=0,\ \pm\sqrt{2},$ los dos últimos se obtienen considerando la igualdad $x-\dfrac{2}{x}=0.$ Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, exceptuando $x=-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}.$

Auxiliándose de un computador trace la gráfica de

$$f(x)=1+\frac{3}{x-\dfrac{2}{x}} \quad \text{y} \quad f(x)=\frac{x^2+3x-2}{x^2-2}$$

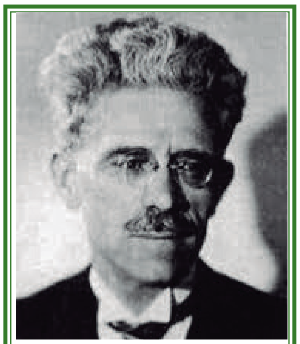
¿Son iguales o diferentes? Dé una justificación a su respuesta

En general decimos que:

El dominio de la función racional $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ es el conjunto de todos los números reales que no son raíces de $h(x)$.

Conteste lo siguiente:

1. ¿Cuál es el recorrido de f?
2. ¿Tiene asíntotas horizontales? ¿tiene asíntotas verticales?
3. ¿Qué le ocurre a $f(x)$ si x crece mucho? ¿si decrece?
4. ¿En qué intervalo f es decreciente o creciente?



Maurice René Fréchet

(1878 – 1973)

fue un matemático francés que generaliza la definición de función: “Vx es una función (operación funcional), uniforme en el conjunto E de elementos de C, si a todo elemento A de E le corresponde un número bien determinado Vx.

Nicolás Bourbaki

(1 930)

El proceso de ajustes a la definición de función continúa por varias décadas hasta que a finales del siglo XIX y principios del XX surge un nuevo concepto llamado “conjunto”. La más importante fue realizada por un grupo de matemáticos, que se hacían llamar Nicolás Bourbaki, quienes en 1 939 definieron el concepto función de la siguiente manera: “Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto”.

5. ¿Tiene esta función valor máximo? ¿tiene mínimo?

6. ¿En qué intervalos la función f tiene trazo continuo?

7. Calcule $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f(3{,}35)$, $f\left(\frac{101}{111}\right)$, $f(9{,}7)$, $\frac{2\,015}{23}+2f\left(\sqrt{3}\right)$,

$$f(9{,}7)-f\left(\sqrt{3}\right),\ \frac{f(0{,}75)}{f\left(\frac{15}{7}\right)},\ \frac{f(3{,}35)}{f\left(\frac{101}{111}\right)},\ \frac{f(0{,}5)}{f\left(\frac{121}{13}\right)}+\frac{f(9{,}7)}{f\left(\frac{341}{101}\right)},$$

$$\left[\frac{f(5{,}5)}{f\left(\frac{61}{3}\right)}\cdot\frac{f(13{,}7)}{f\left(\frac{41}{101}\right)}\right]+\frac{f(196)}{f(17)}.$$

8. ¿Existe la preimagen mediante f del número que corresponde al año en curso y de la que corresponde al día de su cumpleaños? Obtenga, si existen, el doble producto de los dos números anteriores disminuido en un número primo de tres cifras terminado en 7.

Un asunto de interés en la graficación de funciones racionales es el de encontrar los intersectos con los ejes coordenados. Recordemos que en general, el intersecto de la gráfica de una función f, con el eje y sucede en $f(0)$, asumiendo que éste es un valor definido. Para encontrar los intersectos con el eje x, debemos encontrar números reales c que cumplan $f(c)=0$. En el caso de una función racional se tiene:

Los intersectos de la gráfica de la función racional definida por $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ con el eje x son todas las raíces del numerador $g(x)$ que no lo son del denominador $h(x)$.

El intersecto con el eje y sucede con $f(0)$, cuando esté definido.

1. Dé ejemplo de una función racional definida por $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ con $g(x)$ y $h(x)$ polinomios lineales y encuentre los intersectos con los ejes, además examine otras características de f.

2. Dé ejemplo de una función racional definida por $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ con $g(x)$ y $h(x)$ polinomios no lineales y encuentre los intersectos con los ejes, además examine otras características de f.

Veamos los criterios generales para encontrar asíntotas horizontales:

Sea $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{a_n x^n+\cdots+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_0}$ una función racional cuyo numerador tiene grado n y cuyo denominador tiene grado m.

Si $n=m$, la recta $y=\dfrac{a_n}{b_m}$ es una asíntota horizontal.

Si $n<m$, entonces $y=0$ es una asíntota horizontal.

Si $n>m$, entonces no hay asíntota horizontal.

La función $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ tiene una asíntota vertical para $x = c$, donde c es una raíz de $h(x)$, pero no de $g(x)$.

El ejemplo siguiente es una muestra del cálculo de asíntotas horizontales y verticales.

Ejemplo 12

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x(x-1)(x-3)}$

b) $f(x)=\dfrac{5x^2}{(x-2)(x-3)}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^3+5}{x+3}$

Solución

a) Dado que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el eje x es una asíntota horizontal. Por otro lado, las raíces del denominador son $x = 0,\ 1,\ 3$; de las cuales descartamos la primera porque es raíz del numerador. Por tanto las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

b) En este caso el numerador y el denominador tienen el mismo grado, luego $y = \frac{5}{1} = 5$ es la asíntota horizontal de la gráfica de la función. Las asíntotas verticales son $x = 2$ y $x = 3$.

c) Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, la gráfica no tiene asíntotas horizontales. La única asíntota vertical es $x = -3$

Compruebe lo aprendido

Para las funciones dadas calcule los valores indicados

1) $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2},\ 3\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{2}{2x^2 - x - 6}$ $\qquad f(5),\quad 4f(0),\quad f(0),\quad f(12),\quad \dfrac{f(4) - f(6)}{f(4)}$

2) $h : \mathbb{R} - \left\{5,\ \frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{1}{(x-5)(3x-2)}$ $\qquad h(1),\quad h\left(\frac{1}{3}\right),\quad h(6),\quad \dfrac{h(0) - h(1)}{3h(-4)}$

3) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{-5}{2x^2 + 2}$ $\qquad \frac{1}{2}k(1),\quad \frac{1}{3}k(-2),\quad \frac{1}{5}k(-1),\quad k(12)$

$-2k(3) - 3k(2)$

Ejercicios finales de la Unidad

1. Encuentre dominio y recorrido y trace la gráfica de cada una de las funciones definida por

a. $f(x)=1+\sqrt{x}$

b. $g(x)=-2|x|+6$

c. $r(x)=[x]-3$

d. $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

e. $t(x)=2\sqrt{x}$.

2. Dada las funciones f y g con las siguientes leyes de asignación $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=[x]+2$.

I. Calcule

1. $f(t)$ si $t=g(13{,}7)+6{,}003$
2. Si $m=g(-8{,}079)$ ¿existe $f(m)$?
3. Calcule $f(,033)\cdot g(-15{,}41)$.

II. Encuentre valores x_1, x_2 tal que $f(x_1)\cdot g(x_2)$ sea un número entero negativo.

3. Dé ejemplo de un intervalo de número reales al que pertenezca x_2 para que $f(x_1)+g(x_2)$ sea positivo y con $f(x_1)\neq 0$. Considere las funciones dadas por $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=[x]$.

4. Escriba en la raya la letra que corresponde a la gráfica de cada ecuación.

1. ______ $s(x)=\dfrac{4x}{2+x^2}$

2. ______ $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$

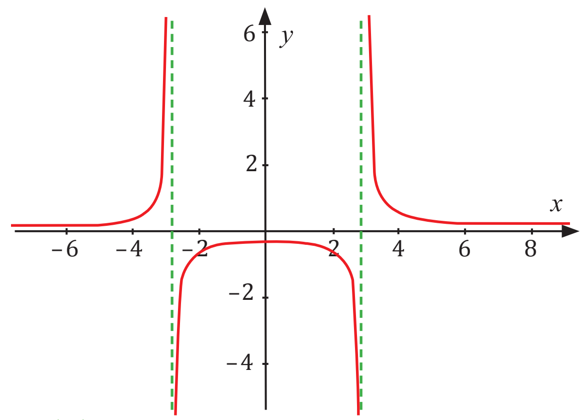
3. ______ $r(x)=\dfrac{7x}{x+2}$

4. ______ $f(x)=-\dfrac{3}{x^2}+5$

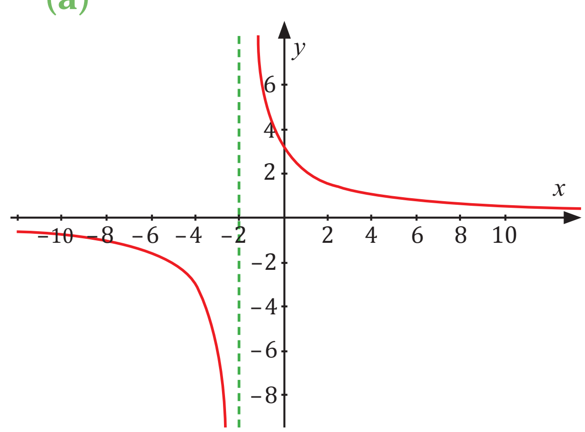
5. ______ $h(x)=\dfrac{5x}{1-x^3}$

6. ______ $t(x)=\dfrac{6}{x+2}$

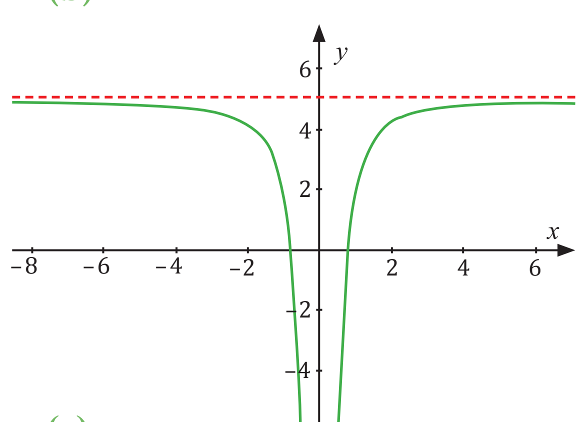
7. ______ $n(x)=\dfrac{-2}{8-x^2}$



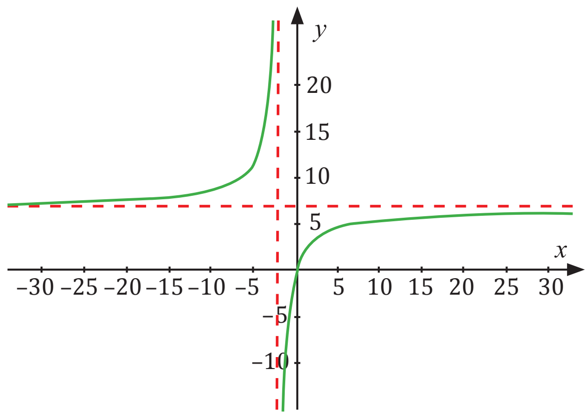
(a)



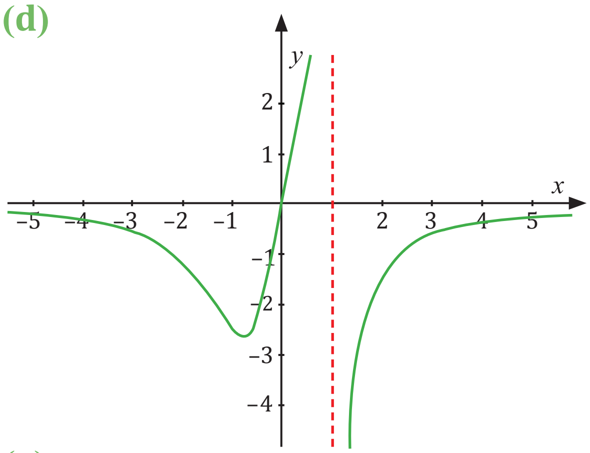
(b)



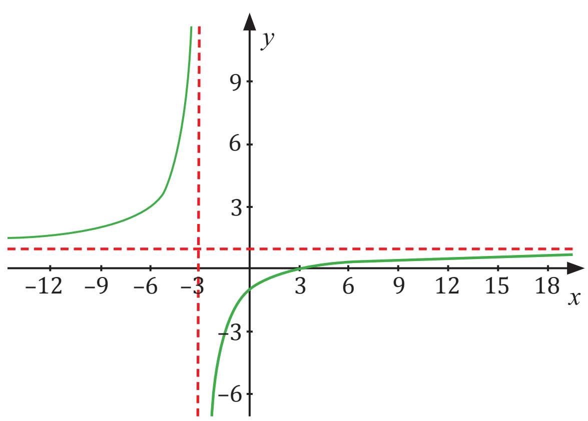
(c)



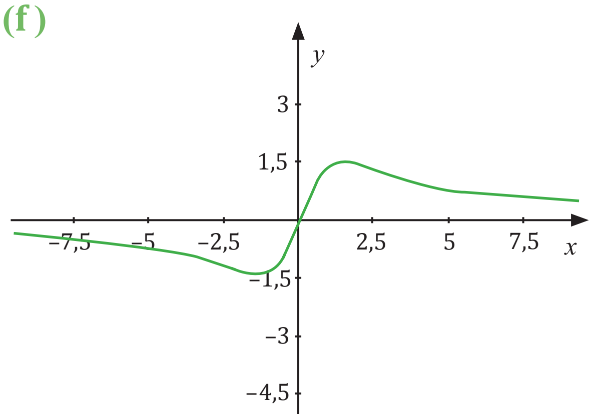
(d)



(e)



(f)



(g)

5. Para los ejercicios del 1 al 7 encuentre las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales si existen y compare con la gráfica correspondiente para cada ecuación.

6. Grafique la función h dada por

$$\begin{cases} |x| & \text{si} \quad x < -4 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -4 \leq x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a. Realice la prueba de la recta vertical para asegurarse de que trazó correctamente la gráfica.

b. ¿Cuáles son los intersectos de la gráfica de h con los ejes coordenados? ¿cuál es el dominio y recorrido de h?

c. Calcule

$$\frac{h(x+t)-h(x)}{t}, \qquad t \neq 0$$

$$\frac{h(x)-h(-3)}{x+3}, \qquad -4 < x < 0$$

7. Sea g la función definida por $g(x) = \sqrt{x+5}$. Trace la gráfica y encuentre dominio y recorrido de g.

a. Determine, mediante g, las preimágenes de $3, 11, 20$ y 31.

b. Clasifique los resultados obtenidos en el ejercicio anterior en números racionales e irracionales.

c. ¿Existe $g(-6)$? Justifique su respuesta.

d. A partir de la gráfica de g trace las de $h(x) = -\sqrt{x+5}$ y $f(x) = -\sqrt{x+5}+3$.

e. Encuentre la ley de asignación para las funciones $g+f$, $h+g$, $f-h$ y $h-g$. ¿Cuáles de estas funciones coinciden? Trace sus gráficas.

f. Calcule

$$\frac{(h+g)(2\,014)}{(g+f)(2\,015)}, \quad \frac{(g+f)(2\,016)}{(f+h)((2\,020)},$$

$$\left[\frac{(g+h)(2\,017)}{(f-h)(2\,050)}\right]^2.$$

f. ¿Coincide la función $g+f$ con la definida por $s(t)=3,\ \forall t \in \mathbb{R}$? Justifique su respuesta.

8. La función $sign\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, está definida por

$$sign\,(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

a. ¿Cuál es el recorrido de $sign$? ¿es una función escalonada? Trace la gráfica.

b. ¿Son iguales las funciones $f:\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|}$ y $sign$? Bosqueje la gráfica de f.

c. Calcule $sign\left(\frac{2}{f(5)}\right)$, $sign\,[f(-4)]$, $f(sign\,(-4))$.¿En general se cumple que $sign[f(x)] = f[sign(x)]$?

9. Sea g una función tal que $g(x+y) = g(x)+g(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

a. Pruebe que

- **a.** $g(0)=0$
- **b.** $g(\pi x) = \pi g(x)$
- **c.** $g(-x) = -g(x)$

b. Utilice los resultados anteriores para calcular

- **a.** $\dfrac{g(x+2)-g(x)}{2}$,
- **b.** $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, h un número real no nulo.

10. Para las funciones dadas calcule los valores indicados.

a. $\ell:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2 - [x]$

$\ell(0)$, $\quad \ell(-4{,}5)$,

$\ell(1)$, $\ell(53)$, $\dfrac{\ell(0)+\ell(-45)}{\ell(53)}$

b. $s:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x} - sign(x)$

$s(1)$, $\ -2s(3{,}5)$, $\dfrac{s(16)-s(3)}{[s(4)]^2}$,

$-\dfrac{2}{3}\,s(30)$.

c. $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to x^3 - |x|,$$

$$t(-6), \quad \frac{1}{2}t(1), \quad \frac{2t(-6)+t(1)}{5t(2)-4t(8)},$$

$$t(-6) - \frac{1}{2}t(1), \quad \sqrt{t(6)} + \frac{1}{2}t(1),$$

$$\frac{4}{5}t(-15).$$

11. Encuentre dominio, recorrido, valor mínimo y/o máximo, si existe y 5 características de cada una de las funciones dadas por las leyes de asignación siguientes.

a. $f(x) = |x+1|$

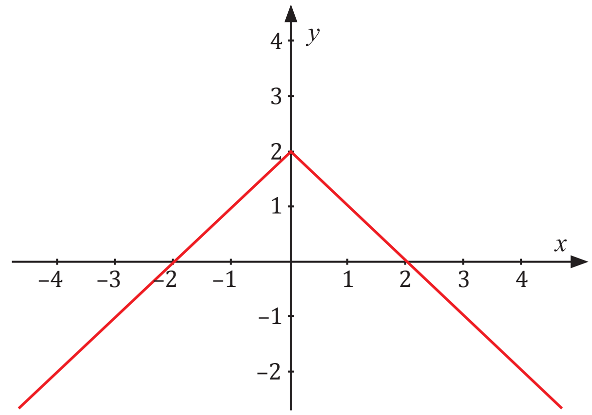
b. $g(x) = [x] - 5$

c. $h(x) \begin{cases} [x]-5 & \text{si} \quad x>0 \\ |x+1| & \text{si} \quad x=0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0. \end{cases}$

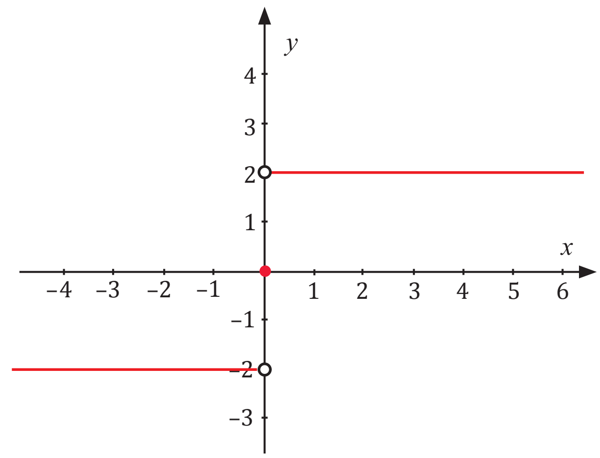
12. Si el dominio de una función tiene 4 elementos ¿Cuál es el máximo número de elementos que puede tener el recorrido? ¿cuál es el mínimo? Dé ejemplo de dos funciones con estas características.

13. Coloque en el paréntesis el número de la ecuación que corresponde a cada gráfica.

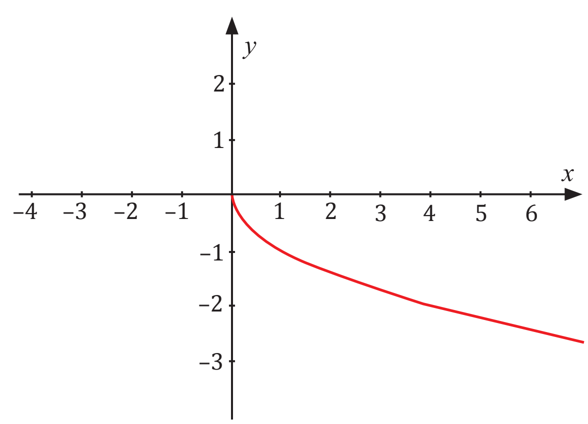
1. $y = [x] + 3$
2. $y = -|x| + 2$
3. $y = 2\,sign(x)$
4. $y = \frac{1}{x} - 1$
5. $y = \frac{3}{2}\sqrt{x-2} + 6$
6. $y = -\sqrt{x}$



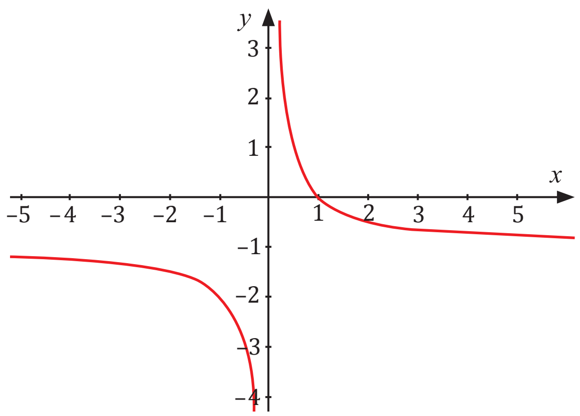
(   )



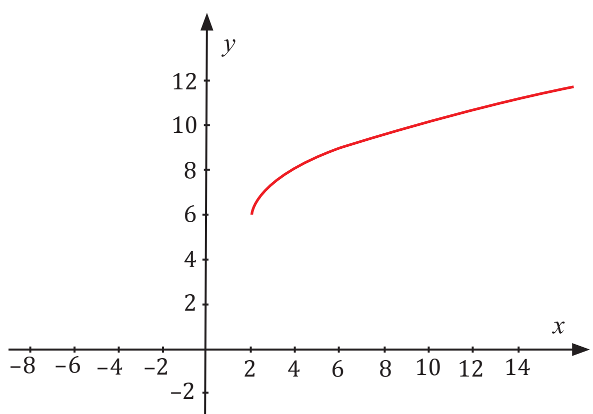
(   )



(   )



(   )



(   )

14. Conteste verdadero o falso, justificando.

a. Toda función polinomial es racional.

b. El dominio de las funciones racionales es siempre $\mathbb{R}$.

c. Toda función creciente es monótona creciente.

d. Si f está definida por $f(x)=2\sqrt{x}$ entonces la gráfica de $g(x)=2\sqrt{x+5}$ se obtiene por un traslado vertical de la gráfica de f de 5 unidades hacia arriba.

e. La suma de una función lineal y una racional es una función racional.

f. Una asíntota de la gráfica de una función no corta a ésta.

g. Una función inyectiva es siempre sobreyectiva.

h. El dominio de f con ley de asignación $f(x)=\sqrt{-x}$ es el conjunto de los números reales positivos.

i. Las gráficas de $g(x)=|-x|$ y $f(x)=|x|$ son iguales.

j. Si $f(x)=\dfrac{2x^2}{4x^2+7}$, entonces $f(-x)=f(x)$.

k. Si $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $f(a)$ pertenece al recorrido de f, entonces $f(a+5)$ también está en el recorrido de f.

l. Las funciones $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y $g:\ \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=2|x|+5$, y $g(x)=2|x|+5$ son iguales.

m. Toda función es un conjunto.

15. Sea la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} -2[x]+5 & \text{si} \quad x<0 \\ \sqrt{x}-3 & \text{si} \quad 0\le x<6 \\ \dfrac{x}{x-5} & \text{si} \quad 6\le x \end{cases}$$

Trace su gráfica, determine los intervalos donde f crece o decrece.¿Existen intervalos donde la función es constante? Encuentre recorrido y los intersectos con los ejes, si existen.

16. Complete

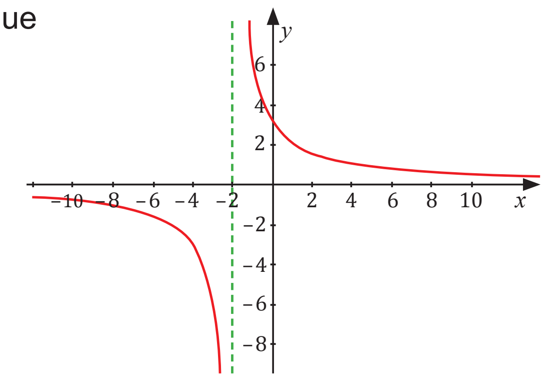
a. La gráfica de $y = af(x)$ se obtiene por ________________ de la gráfica de $y = f(x)$ por un factor a, si $a > 1$.

b. La gráfica de $f(x) = \frac{2}{3}|x|$ es ______________________ respecto al eje y.

c. Si la gráfica de g se obtiene de la gráfica de f, con ley de asignación

$f(x) = \frac{2}{3}|x+2|$, por una reflexión a través del eje x, entonces $g(x) =$ _________.

d. De acuerdo con la gráfica de la función f que aparece a la derecha tenemos que si:



$x \to -\infty$, $\quad f(x) \to$ ____

$x \to \infty$, $\quad f(x) \to$ ____

$x \to -2^{+}$, $\quad f(x) \to$ ____

$x \to -2^{-}$, $\quad f(x) \to$ ____.

____ es una asíntota ____________.

17. Dé ejemplo de:

a. Una función racional f que cumpla lo siguiente:

Asíntota vertical $x = 2$.

Asíntota horizontal $y = -3$.

$f(x) = 0$ y $f(2) = -\frac{3}{2}$.

b. Una función h con ley de asignación del tipo $f(x) = a\sqrt{x+b} + c$, siendo a un número feliz, b un número primo de Fermat mayor que 3 y c un número racional no entero y que sea una fracción propia.

¿Cuál es el dominio y recorrido de h? Encuentre, si existen, los intersectos de la gráfica de h con el eje x e y.

c. Una función g por partes con dominio los números reales y compuesta por restricciones de una función racional, una cuadrática creciente y una lineal decreciente.

Trace la gráfica de g y encuentre el recorrido.

¿Tiene la gráfica de g intersectos con los ejes coordenados?

18. Dadas las funciones con leyes de asignación

$f(x) = [x] - 2$, $\; g(x) = -\sqrt{x} + 1$ y

$h(x) = \frac{2x}{x+3}$

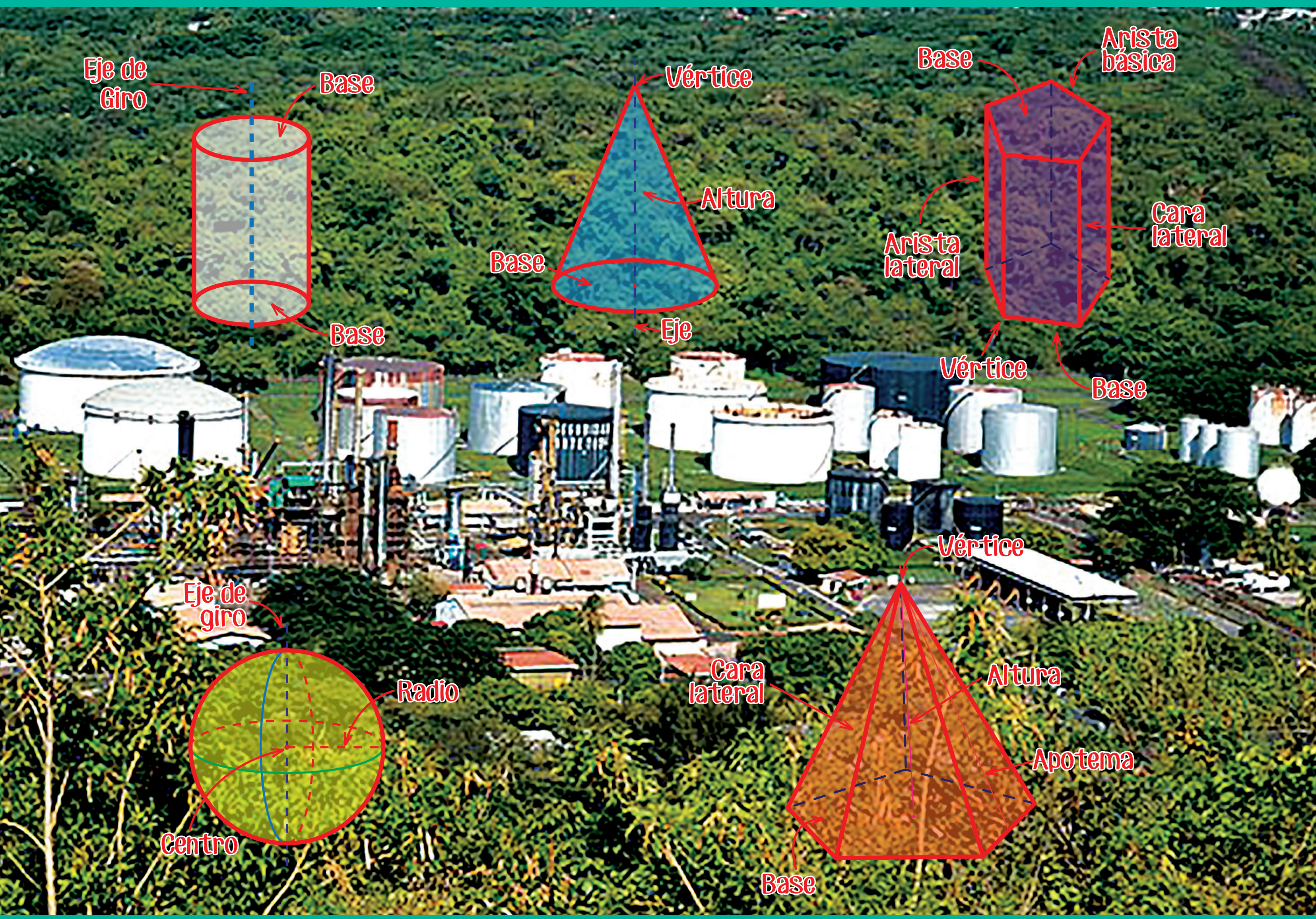
Calcule

$f(0{,}05)$, $f(2{,}15)$, $g(0{,}16)$, $\mathrm{h}(2)$.

Utilice las leyes de asignaciones anteriores y construya una función t, por partes, con dominio $\mathbb{R}$, trace su gráfica, encuentre el recorrido, los intervalos donde crece o decrece e intersectos con los ejes.

Sólidos

Unidad 6



Para Nicaragua, con la VIII Cumbre de Petrocaribe con sede en Managua, se ratificaron los acuerdos sobre cooperación energética, programas sociales y productivos; en especial, la construcción de la Refinería en Nicaragua; la inyección financiera para impulsar la agricultura, mejorar la producción de arroz y café; y el desarrollo de mataderos industriales y plantas procesadoras de leche y maíz.

Fuente: 19 digital.
02 de Julio 2 013.

Unidad 6

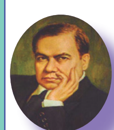
Sólidos

Introducción

Esta unidad tiene un sesgo muy platónico: se estudian los conceptos más importantes como poliedros, poliedros regulares y convexos (sólidos platónicos) prismas y pirámides, cuerpos geométricos generados por rotación, dentro de los cuales destacan por su perfecta simetría el cilindro y la esfera. Estos conceptos, cuya belleza sería razón suficiente para declararlos patrimonios eternos de la humanidad, ofrecen también la perspectiva del cálculo de áreas y volúmenes uniendo así la perfección estética con la utilidad práctica.

Las pirámides de Egipto construidas hace más de $4\,000$ años, sirvieron posiblemente como tumbas para faraones, cuyos cuerpos momificados eran rodeados por tesoros y objetos personales.

Poliedros



Recuerde, reflexione y concluya

Recordemos un poco la geometría ya estudiada que nos servirá de base para el desarrollo de la unidad:

1. ¿Qué es una figura geométrica plana?
2. ¿Qué es un polígono?
3. ¿Cuándo un polígono es convexo? ¿cuándo no?
4. ¿Qué es el perímetro de un polígono?
5. ¿Cuándo a un polígono se le llama triángulo? ¿cuáles son sus elementos? En su cuaderno transcriba el triángulo de la izquierda y trace los elementos del mismo.
6. ¿Qué establece el teorema de la desigualdad del triángulo? Dé un ejemplo particular.
7. Si un triángulo tiene todos sus lados congruentes, ¿cómo se le llama? ¿qué nombre recibe un triángulo con dos lados congruentes ? ¿si no tiene lados congruentes? Dé ejemplo de cada caso y señale sus elementos.
8. ¿Cómo se clasifican los triángulos según la medida de sus ángulos internos? Dé ejemplo.

Figura 1

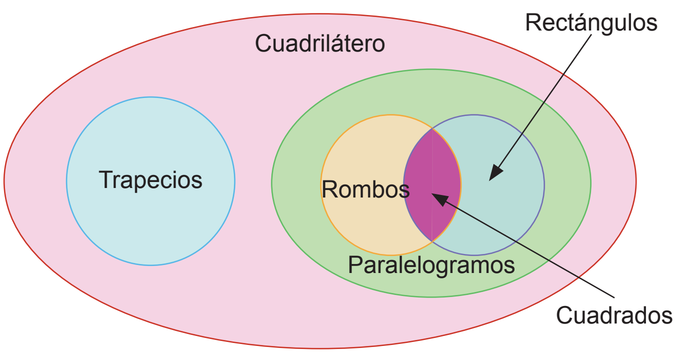
9. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo?

10. Si el área de un paralelogramo $MNOP$ es 25, ¿cuánto vale el área del triángulo MNO? Dibuje ambos polígonos.

11. ¿Qué es un cuadrilátero?

12. ¿Cuándo un cuadrilátero es un trapecio? ¿cuándo es un paralelogramo? ¿cuándo es un cuadrado?

Observe el siguiente diagrama:



Recuerde
El área se mide en unidades cuadradas.

Formule frases similares a:

“todo cuadrado es un rombo”, “no todo rombo es cuadrado”, “ningún trapecio es paralelogramo”, “todo trapecio es cuadrilátero”.

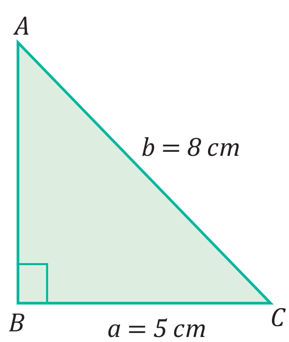
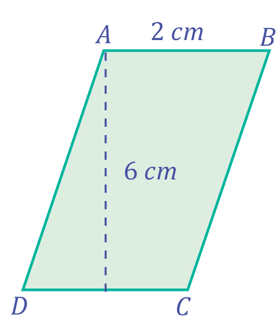
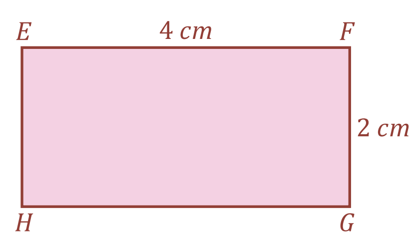


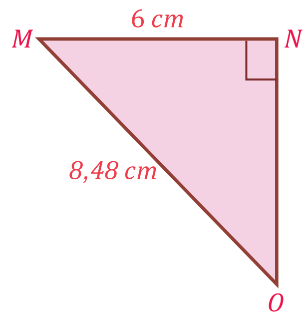
Figura 2

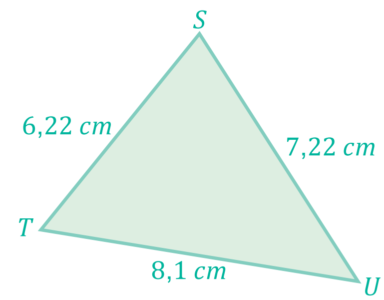
1. ¿Cuál es la fórmula para encontrar el área de un triángulo? Use esta fórmula para encontrar el área del triángulo de la figura 2.

2. Calcule el área de las figuras siguientes (las figuras no están necesariamente a escala):





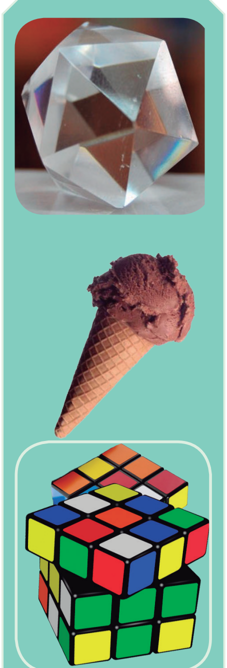




3. Un establecimiento de renta de vídeos colocó un anuncio de madera que tiene forma rectangular, con el objetivo de anunciar su inventario de películas de ciencia-ficción, su largo es 25 pulgadas más que el ancho y el perímetro igual a 176 pulgadas. ¿Cuáles son las dimensiones del anuncio? Encuentre su área.

4. Un lote de terreno tiene forma triangular. Un lado es 200 metros más largo que el lado más corto, mientras que el tercer lado es 400 metros más largo que el lado más corto. El perímetro del lote es de $2\,000$ metros. Encuentre las longitudes de los lados y el área del terreno.

5. Un campesino tiene un cultivo en un terreno hexagonal regular y quiere comprar urea. ¿Qué necesita encontrar, área o perímetro, para saber cuánto comprar? Si la apotema del polígono es 58 metros y el área $34\,994{,}8m^2$, ¿cuál es la medida de uno de sus lados? Convierta los metros cuadrados a manzanas. ¿Cuánto fertilizante necesita si se debe aplicar 9 kilogramos cada $1\,000m^2$? Investigue el precio de 1 kilogramo de urea y los costos por aplicación.



Sólidos en la vida cotidiana

Figura 3

Si observamos, hasta el momento se han estudiado solamente figuras que están en un solo plano. Sin embargo, el mundo a nuestro alrededor no es plano, necesitamos las 3 dimensiones del espacio para representar lo que nos rodea. Tanto en la naturaleza como en los objetos construidos por el hombre, se pueden reconocer algunos cuerpos geométricos especiales llamados sólidos, los cuales serán el objeto de estudio de esta unidad.

Así, podemos establecer que:

Un **sólido o cuerpo geométrico** es una región del espacio tridimensional limitada por regiones poligonales que llamaremos caras.

Para el estudio de los sólidos, los dividiremos en dos grandes grupos:

- Poliedros
- Cuerpos geométricos generados por rotación.

Algunos términos geométricos con los que debemos familiarizarnos son:

- **Cara**: región poligonal que limita a un cuerpo geométrico.
- **Arista**: es el segmento de recta donde se intersecan dos caras de un sólido.
- **Vértice**: es un punto extremo de una arista y en donde concurren tres o más caras. En palabras sencillas, es una esquina (punto) de un cuerpo geométrico (o sólido).

Definamos ahora, lo que es un poliedro.

Llamaremos **poliedro** a toda región del espacio tridimensional limitada por 4 o más regiones poligonales, es decir aquellos sólidos cuyas caras son regiones poligonales.

En palabras sencillas, un poliedro es un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito.

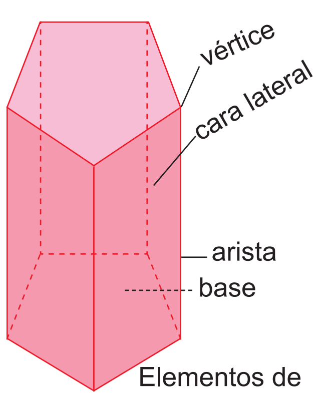
En todo poliedro se distinguen los siguientes elementos: caras (laterales y bases), aristas y vértices (figura 4). Además se cumplen las siguientes condiciones.

1. Tres o más caras de un poliedro coinciden en un mismo vértice.
2. Dos caras que tienen una arista en común forman un **ángulo diedro** o simplemente diedro (figura 5).

¿Sabía qué?

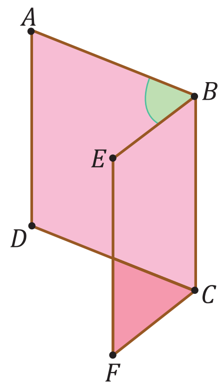
Etimológicamente la palabra poliedro ($\Pi o\lambda\nu\varepsilon\delta\rho o$) deriva de los términos griegos $\Pi o\lambda\nu s$ (mucho) y $\varepsilon\delta\rho\alpha$ (caras).

Observaciones



Elementos de un poliedro

Figura 4



Ángulo diedro

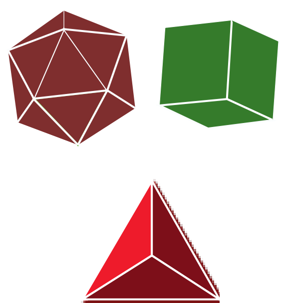
Figura 5

3. Un **ángulo poliédrico** está formado por 3 o más caras del poliedro que tienen un vértice común.

Dibuje en su cuaderno

a) Tres ángulos diedros, uno cuyas caras sean regiones limitadas por cuadrados, otro que sean rectángulos y el último con triángulos equiláteros limitando sus caras. Haga uso adecuado de colores.

b) Tres ángulos poliédricos. Hágalo con aseo y estética, demostrando creatividad e imaginación.



Poliedros convexos

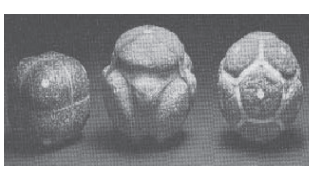
Figura 6

En un poliedro, también podemos formar diagonales, ¿cómo?, uniendo con una línea dos vértices no pertenecientes a la misma cara, al segmento así formado le llamaremos **diagonal** del poliedro.

Podemos, pues, definir poliedro convexo.

Un **poliedro** es **convexo** si una recta sólo puede cortar a su superficie en dos puntos.

Identifique en su entorno objetos que sean poliedros convexos y algunos que no sean convexos, a estos últimos les llamamos **poliedros no convexos**.



Restos neolíticos ($2\,000$ A. C.) de algunos poliedros regulares hallados en Escocia.

Figura 7

Poliedros Regulares: construcción, área y volumen

Sabemos que los polígonos pueden ser regulares o irregulares. De igual manera podemos clasificar los poliedros. Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son regiones limitadas por polígonos regulares congruentes.

Solamente existen cinco poliedros regulares convexos (llamados sólidos platónicos), a saber:

1. **Tetraedro**: tiene 4 caras que son regiones limitadas por triángulos equiláteros.

2. **Hexaedro (cubo)**: tiene 6 caras que son regiones limitadas por cuadrados.

3. **Octaedro**: tiene 8 caras que son regiones limitadas por triángulos equiláteros.

4. **Dodecaedro**: tiene 12 caras que son regiones limitadas por pentágonos regulares.

5. **Icosaedro**: tiene 20 caras que son regiones limitadas por triángulos equiláteros.

¡Importante!

Las caras de un ángulo poliedro están determinadas por el ángulo formado por el vértice del ángulo del poliedro y dos vértices consecutivos del poliedro.

I. Con la información anterior dibuje en su cuaderno los cinco poliedros regulares. Hágalo con orden y aseo.

II. Investigue si existen poliedros regulares no convexos. ¿Cuáles son?

Puesto que hemos exigido que para que un poliedro sea regular sus caras deben ser regiones poligonales regulares iguales, cada uno de los ángulos internos de los polígonos son iguales, de aquí que todos los ángulos diedros son iguales entre sí y todos los ángulos poliédricos también lo son. Además, la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras es menor que $360°$.

Observaciones

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Gauss descubrió a los 17 años de edad cómo construir el polígono regular de 17 lados.

a) Si fijamos una región limitada por un triángulo equilátero como las caras de un poliedro, en la construcción de éste se presentan tres casos de acuerdo al número de caras que concurren en un vértice, a saber:

3 caras concurrentes en un vértice

$$(3)(60°) = 180° < 360°,$$

4 caras concurrentes en un vértice

$$(4)(60°) = 240° < 360°,$$

5 caras concurrentes en un vértice

$$(5)(60°) = 300° < 360°.$$

Los poliedros convexos así formados son el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, respectivamente.

Si tomáramos 6 triángulos equiláteros como caras, no podríamos formar un poliedro puesto que uno de sus ángulos poliédricos valdría $6 \cdot 60° = 360°$.

b) Si fijamos ahora una región limitada por un cuadrado sólo podemos construir un único poliedro, el hexaedro:

3 caras concurrentes en un vértice

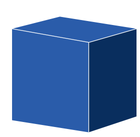
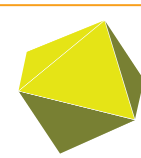
$$3 \cdot 90° = 270° < 360°.$$

Verifique que con pentágonos regulares, cuyos ángulos miden $108°$ sólo se puede construir un poliedro convexo: el dodecaedro.

c) Con hexágonos regulares cuyos ángulos miden $120°$ no se puede construir ningún poliedro, porque con 3 caras concurrentes en un vértice tenemos $120° \cdot 3 = 360°$ y como mínimo necesitaría 4 caras. Lo mismo ocurrirá si tomamos polígonos regulares de más de 6 lados.

De las observaciones anteriores podemos confirmar que solamente existen 5 poliedros regulares convexos.

I. Observe el cuadro 1. ¿Qué relación guarda la suma del número de caras y vértices con el número de aristas de un mismo poliedro? ¿se cumplirá esta relación para otros poliedros? ¿puede expresar esta relación mediante una ecuación matemática?

			
Número de caras	6	8	4
Número de vértices	8	6	4
Número de aristas	12	12	6

Cuadro 1

II. A la ecuación matemática que encontró en el ejercicio anterior se le conoce como fórmula de Euler.

III. Investigue si la fórmula de Euler se cumple cuando el poliedro regular consta de 12 y 20 caras.

¿Sabía qué?

A los poliedros regulares se les conoce como Sólidos Platónicos en honor al filósofo griego Platón, a quien se atribuye haberlos estudiado en primera instancia.

Ortoedro: Prisma de seis caras rectangulares que tiene todos los ángulos rectos.

Actividad en grupo

Construyan con cartulinas de diferentes colores los cinco poliedros regulares estudiados usando las redes (o desarrollos) dadas. Solamente en el caso del cubo aparece la red junto con las “pestañas” y damos instrucciones para armarlo, éstas son similares para la construcción del resto de poliedros.

¡Importante!

Entenderemos por **red** a la figura plana de un poliedro.

Construcción del cubo:

1. Dibujen en una cartulina una red como la que aparece en la figura 8 con $2\,cm$ de lado para cada cuadrado, asegúrese de añadir las pestañas, y luego recórtenla, siguiendo su borde exterior. Este trabajo deben hacerlo con mucha precisión y estética.
2. Doblen las pestañas y las aristas.
3. Armen el cubo pegando las pestañas a las caras correspondientes.

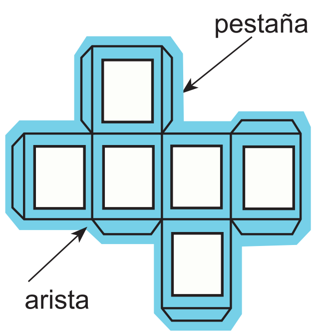
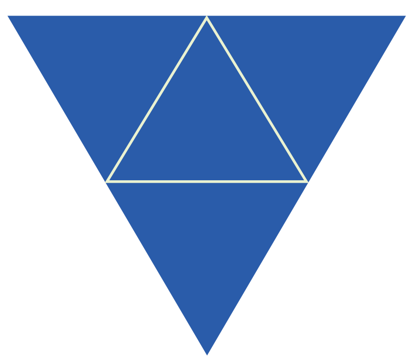


Figura 8

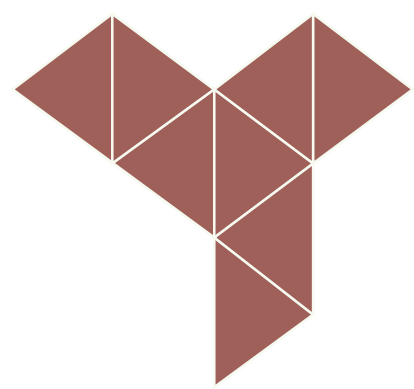
Redes de los poliedros regulares a construir:

Recuerde

Para la construcción de cada poliedro debe añadir adecuadamente las pestañas a la red que aparece a la derecha.



Tetraedro



Octaedro

¡Importante!

Área de un triángulo equilátero de lado l:

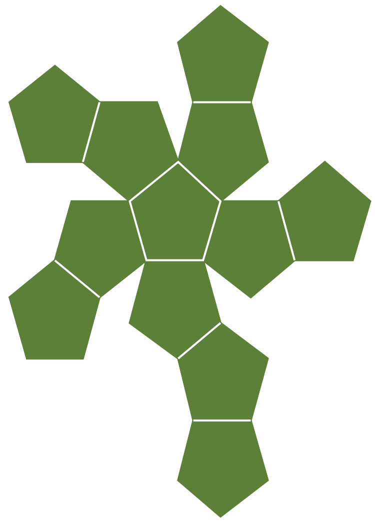
$$A = \frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}.$$

Área de un cuadrado de lado l:

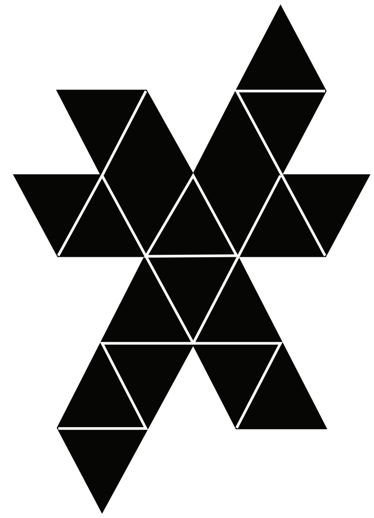
$$A = l^2.$$

Área de un polígono regular cualquiera de perímetro P y apotema a:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}.$$



Dodecaedro



Icosaedro

Área de un Poliedro Regular

El área de un poliedro regular se define de la siguiente manera:

Sea n el número de caras de un poliedro regular y S el área de una de sus caras. Entonces, el área del poliedro regular es igual a

$$A = n \cdot S.$$

Ejemplo 1

Encuentre el área total de un cubo de $3\ cm$ de arista.

Solución

Encontremos el área S de una de sus caras. Como son cuadrados de $3\ cm$ de lado, tenemos:

$$S = l^2 = (3\ cm)^2 = 9\ cm^2.$$

Luego, el área total del cubo es

$$\begin{aligned} A &= n \cdot S \\ &= 6 \cdot 9\ cm^2 \\ &= 54\ cm^2. \end{aligned}$$

En conclusión, $A = 54\ cm^2$.

Compruebe lo aprendido

1. Determine el área total de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro de $5{,}78\ cm$, $7\ cm$ y $\sqrt{3}\ cm$ de arista, respectivamente.

2. Si el área total de un dodecaedro es $540\ cm^2$ y apotema igual a $3\ cm$, ¿cuánto mide una de sus aristas?

3. Halle el área de una cara de un octaedro cuya arista vale $4\ cm$.

4. Encuentre la arista de un cubo sabiendo que su área total es $300\ cm^2$.

5. Un poliedro regular tiene como área total $384\ cm^2$ y el área de una de sus caras es $64\ cm^2$. Encuentre el número de caras del poliedro. ¿Qué nombre recibe éste?

Aplique lo aprendido

1. Óscar desea hacerle un regalo a su amiga Judith. Ya lo compró, es una cajita musical en forma de un hexaedro con arista de $15\ cm$. Si cada m^2 de papel cuesta C\$ 7,5. ¿Cuánto dinero gastará en la compra del papel de regalo?

2. Uno de los tres famosos problemas de construcción de los matemáticos griegos consistía en obtener la arista de un cubo con el doble de volumen de otro cubo dado. Si la longitud de cada lado del cubo dado es l, ¿cuál sería la longitud de cada lado del cubo con el doble del volumen original? Calcule el volumen del cubo dado si $l = 6\ cm$. ¿Cuál es el volumen del otro cubo?

¡Importante!
Diremos, en general, que dos figuras son congruentes cuando al colocar una sobre la otra coinciden en todos sus elementos.
En particular, polígonos congruentes son aquellos que tienen congruentes todos los lados y ángulos correspondientes.

Poliedros Irregulares: Prismas y Pirámides

A los poliedros que no son regulares los llamamos **poliedros irregulares**, es decir, aquellos poliedros cuyas caras no son todas iguales. Los principales poliedros irregulares y en los que centraremos nuestra atención serán los prismas y las pirámides, que son poliedros irregulares convexos.

Los poliedros que poseen al menos dos caras congruentes y paralelas se llaman **prismas**. A estas caras congruentes y paralelas las denominaremos **bases** y al resto **caras laterales**.

Por ejemplo, en el prisma de la figura 9 sus bases han sido sombreadas, el resto de caras son las laterales.

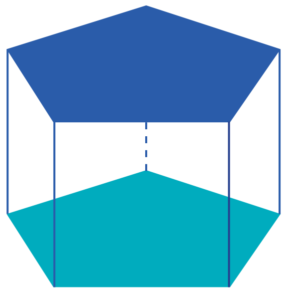


Figura 9

Un **prisma** es **recto** si sus caras laterales son rectángulos como el prisma de la figura 9. Si sus caras laterales son romboides, se llama **prisma oblicuo**.

1. ¿Cuántas caras congruentes tiene un cubo?

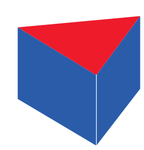
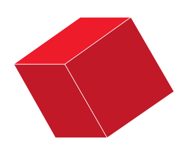
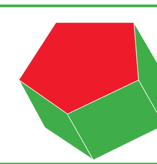
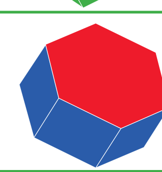
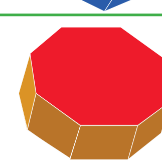
2. ¿Por qué el cubo es un prisma? ¿cuántas bases tiene? ¿cuántas caras laterales? ¿toda cara lateral de un cubo es base?

3. ¿Hay contradicción en el hecho de que un cubo sea poliedro regular y se pueda considerar prisma?

4. ¿Por qué el cubo es un prisma recto?

5. Tomando en cuenta la tabla de abajo conteste: ¿un cubo es un prisma rectangular?

También podemos nombrar a los prismas de acuerdo a sus bases:

Nombre	Forma de las bases	Números de caras laterales	Dibujo
Prisma triangular	**Triángulo**	3	
Prisma rectangular	**Rectángulo**	4	
Prisma pentagonal	**Pentágono**	5	
Prisma hexagonal	**Hexágono**	6	
Prisma octagonal	**Octágono**	8	

¡Importante!

Por simplificación del lenguaje en lugar de decir la base o cara de un sólido es una región poligonal diremos es un polígono.

¡Importante!

Un **paralelepípedo** es un prisma cuya base es un paralelogramo.

¡Importante!

Un **cubo** es un paralelepípedo y además puede considerarse un prisma recto con bases cuadradas.

Observaciones

- En un prisma recto, su altura coincide con cualquiera de sus aristas. En un oblicuo, no.

- Cuando las bases de un prisma son polígonos regulares, el prisma se llama **prisma regular**.

Prisma pentagonal

Figura 10

Al desarmar el prisma de la figura 10, se obtiene una figura plana llamada **red** o **desarrollo del prisma** (figura 11). Por ejemplo, para este caso, la red del prisma pentagonal está formada por:

- Dos pentágonos congruentes.

- 5 rectángulos cuyas bases miden igual a los lados del pentágono y cuyas alturas son iguales a la altura del prisma.

Dibuje el desarrollo de un prisma hexagonal y de un triangular.

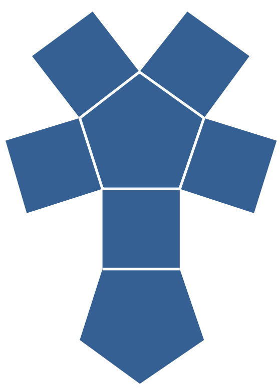


Figura 11

Para encontrar el área de un poliedro irregular, primero se encuentra el área de una de sus caras y el área de una de sus bases.

Llamaremos **área de una cara de un poliedro** al área del polígono que constituye la cara.

La suma de las áreas de las caras laterales del poliedro le denominaremos **área lateral del poliedro**. Así,

El **área** (total) **de un poliedro** será la suma del área lateral y el área de sus bases.

¡Importante!

En el cálculo de áreas de prismas nos limitaremos a aquellos que tienen dos bases.

Área de un Prisma

Calculemos ahora el área de un prisma. El área total A_T de este sólido es igual a la suma de las áreas de sus caras y sus bases. A la suma de las áreas de sus caras laterales le llamaremos **área lateral** A_L **del prisma**.

Para encontrar el área total de un prisma A_T que tiene dos bases determinamos el área de una de las bases A_B, como ambas son congruentes tendríamos que el área de las dos bases será 2 veces A_B a esto le sumamos el área lateral A_L del prisma, así

$$A_T = 2A_B + A_L.$$

Ejemplo 2

Juan necesita pintar una serie de bloques cuya forma se muestra en la figura 12. En la ferretería le dirán cuanta pintura debe comprar, pero tiene que darles dos datos: el número de bloques y el área total de uno de ellos. ¿Cuál es el área total de este bloque triangular?

Solución

Usemos la fórmula

$$A_T = 2A_B + A_L.$$

Las bases de este poliedro son triángulos, entonces

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}(8\ cm)(3\ cm) \\ &= 12\ cm^2. \end{aligned}$$

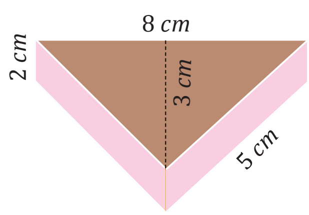


Figura 12

Así,

$$\begin{aligned} 2A_B &= 2(12\ cm^2) \\ &= 24\ cm^2. \end{aligned}$$

Desdobladas las caras laterales de este poliedro forman un rectángulo de base $18\ cm$ y de altura $2\ cm$ (figura 13), entonces si l es el largo y a el ancho tenemos

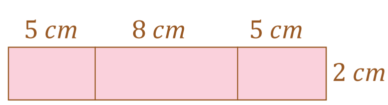


Figura 13

$$\begin{aligned} A_L &= la \\ &= (5\ cm + 8\ cm + 5\ cm)2cm \\ &= 36cm^2. \end{aligned}$$

Entonces el área lateral del prisma es $36\ cm^2$.

Luego,

$$\begin{aligned} A_T &= 2A_B + A_L \\ &= 24cm^2 + 36cm^2 \\ &= 60\ cm^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área total del prisma es $60\ cm^2$.

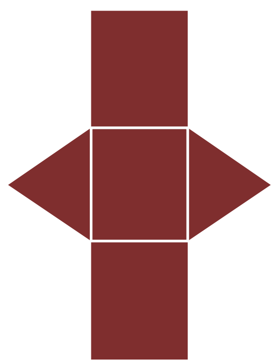
1. Tomando en cuenta la forma de la base, ¿qué nombre recibe el prisma del ejemplo anterior?

2. Si se duplica la altura del polígono de la base del prisma, ¿se duplica el área lateral? ¿y el área total?

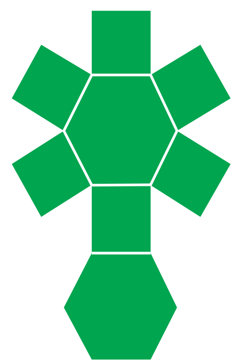
3. Aumente una de las dimensiones de los polígonos que forman las caras laterales del prisma de tal forma que el área total de éste sea un número impar.

Actividad en grupo

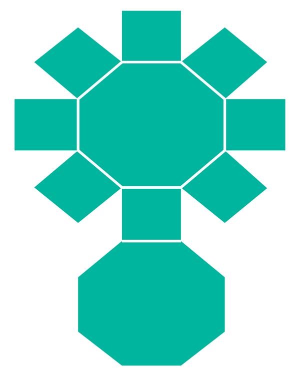
I. Siguiendo las mismas instrucciones que fueron dadas para la construcción de los poliedros regulares, construyan los prismas que corresponden a los desarrollos siguientes:



Prisma Triangular



Prisma Hexagonal



Prisma Octagonal

II. Identifica caras, aristas, vértices, ángulos diedros, ángulos poliédricos y diagonales de los poliedros construidos.

Volumen de un prisma

Recuerde

La altura de un prisma es la distancia entre sus bases.

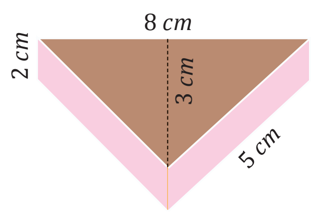
Podemos intuir al volumen de un prisma como la cantidad de espacio que hay dentro del prisma. El volumen se mide en unidades cúbicas. Estas unidades nos dicen cuántos cubos de determinado tamaño se necesitan para llenar el prisma.

Para hallar el **volumen de un prisma**, se multiplica el área de la base A_B por la altura h. Es decir,

$$V = A_B \cdot h.$$

Ejemplo 3 Encuentre el volumen del prisma del ejemplo 2.

Solución Como $A_B = 12\ cm^2$ y $h = 2\ cm$, tenemos que



$$\begin{aligned} V &= A_B \cdot h \\ &= \left(12\ cm^2\right)\left(2\ cm\right) \\ &= 24\ cm^3. \end{aligned}$$

Luego, el volumen del prisma es $24\ cm^3$.

Compruebe lo aprendido

1. Halle el área total de un prisma cuya base es un triángulo equilátero, si el lado de la base mide $8\ cm$ y la arista lateral es $12\ cm$.

2. Encuentre el área total, en m^2, de un prisma octagonal cuyo lado de la base mide $5\ cm$, el apotema $7\ cm$ y de arista $13\ cm$.

3. Determine el área lateral y total de un prisma recto cuyas bases son hexágonos regulares de $8\ cm$ de lado y $7{,}2\ cm$ de apotema. Dé su respuesta en dm^2.

4. Encuentre el volumen de un prisma triangular si el triángulo de la base tiene una altura de $6\ cm$ y base de $7\ cm$, además, la altura del prisma es de $13\ cm$.

5. Calcule el volumen de un prisma hexagonal cuya altura es $75\ cm$ y el área de la base es $65\ cm^2$.

Aplique lo aprendido

I. Calcule el volumen en cm^3 de la sala de una casa que tiene $7\ m$ de largo, $50\ dm$ de ancho y $2\,900\ mm$ de alto. Dé la respuesta en m^3, mm^3 y dm^3.

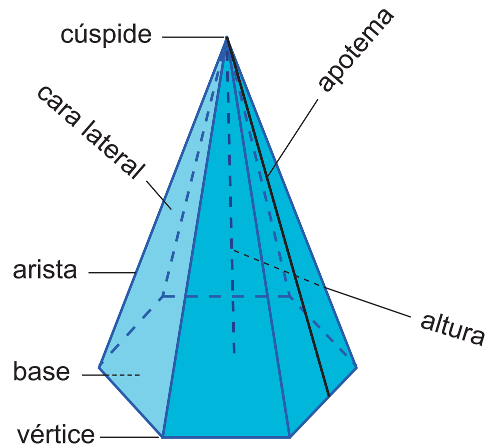
II. Las áreas de los lados de una caja rectangular son de 27, 117 y 39 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es el volumen de la caja? Exprese el resultado en cm^3 y en m^3.

III. Construya un prisma de base cuadrada de $5\,cm$ de lado y altura de $8\,cm$. Divida el prisma en dos partes congruentes de tal forma que la base de los nuevos prismas sean triángulos rectángulos. Además, encuentre el volumen del prisma de base cuadrada y el de base triangular.

Estudiemos ahora otro tipo de poliedro irregular, la pirámide.

Una **pirámide** es un poliedro definido por un polígono como base y triángulos como caras laterales que poseen un vértice común que no está contenido en el plano base.

Elementos de una pirámide:



¡Importante!

Para dibujar una pirámide, primero empiece por la base, luego conecte los vértices de la base con el de la pirámide.

1. La **base** es la cara en la que se apoya la pirámide.

2. Las **caras laterales** son las caras que comparten uno de sus lados con la base. La suma de sus áreas es el área lateral de la pirámide.

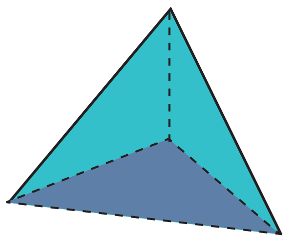
3. Las **aristas** son los lados de la base y de las caras laterales.

4. Los **vértices** son los puntos en donde concurren cada par de aristas.

5. Las **apotemas** son las alturas de las caras laterales de la pirámide.

La recta que pasa por el vértice de la pirámide y el centro geométrico de la base se denomina **eje** o **altura** de la pirámide. Cuando este eje no es perpendicular a la base, a la pirámide se le conoce como **pirámide oblicua**.

Al igual que los prismas las pirámides reciben un nombre según la forma de su base.



Pirámide triangular

Figura 14

Una **pirámide** es **triangular** (figura 14) si su base es un triángulo y **pentagonal** (figura 16) si su base es un pentágono, y así sucesivamente.

El área total de una pirámide se obtiene sumando su área lateral con el área de su base. Esto es,

$$A_T = A_B + A_L.$$

Ejemplo 4

Halle el área total de una pirámide cuadrangular cuyo lado de la base es $6\ cm$ y apotema $7\ cm$.

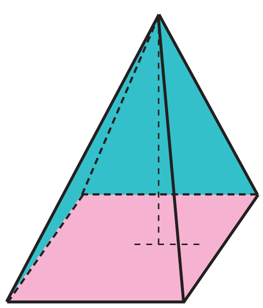
Solución

La base es un cuadrado, entonces

$$A_B = l^2 = (6\ cm)^2 = 36\ cm^2.$$

Hay cuatro caras laterales triangulares congruentes. Hallemos la suma de las áreas de estos triángulos A_L:

$$\begin{aligned} A_L &= \left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot h\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot h\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot h\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot h\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot h\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\cdot 6\ cm\cdot 7\ cm\right) \\ &= 84\ cm^2. \end{aligned}$$

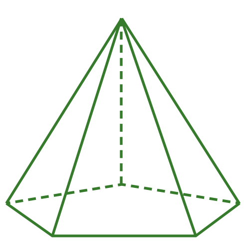


Pirámide cuadrada

Figura 15

Así,

$$\begin{aligned} A_T &= A_B + A_L \\ A_T &= 36 cm^2 + 84 cm^2 \\ &= 120\ cm^2. \end{aligned}$$



Pirámide pentagonal

Figura 16

Ahora, veamos como se obtiene el volumen de una pirámide.

El **volumen de una pirámide** es $\frac{1}{3}$ del producto del área de su base A_B por su altura h. Así,

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_B \cdot h.$$

Ejemplo 5 Si la altura de la pirámide del ejemplo anterior es $16\ cm$, encuentre su volumen.

Solución Sustituyendo en la fórmula para el volumen resulta

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 cm^2 \cdot 16\ cm = 192\ cm^3.$$

Así, el volumen de la pirámide es $192\ cm^3$.

Actividad en grupo

1. La red o el desarrollo de una pirámide está formado por el polígono de la base y tantos triángulos como lados tiene la base. Dibujen el desarrollo de una pirámide hexagonal y una cuadrada, tomen como ejemplo el desarrollo de una pirámide triangular que aparece en la figura 17.

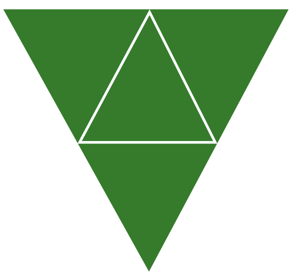


Figura 17

2. Dibujen todas las redes de las pirámides estudiadas, en cartulinas de distintos colores, recórtenlas y construyan las pirámides. Practiquen el respeto, la democracia, tolerancia y convivencia pacífica.

3. Dibujen pirámides triangulares, cuadradas, hexagonales y octagonales de diferentes tamaños.

4. Identifiquen caras, aristas, vértices, apotema y altura de las pirámides construidas anteriormente.

Compruebe lo aprendido

1. Encuentre el área total de una pirámide regular de base heptagonal sabiendo que el lado de la base mide $6\ cm$, el eje $3{,}5\ cm$ y la apotema $5{,}5\ cm$.

2. Determine el área lateral y total de una pirámide regular que tiene una altura de $20\ m$ y de base un triángulo equilátero sabiendo que el lado de la base mide $10\ m$.

3. Calcule el volumen de las pirámides de los ejercicios **1.** y **2.**

4. Halle el volumen de las siguientes pirámides:

   a. Base rectangular de $9\ cm \times 8\ cm$ y altura $h = 7\ cm.$
   b. Base cuadrada con $\sqrt{7}\ \ dm$ de lado y altura $h = 6\ cm.$

Cuerpos Geométricos generados por Rotación

Recuerde, reflexione y concluya

1. ¿Qué es un rectángulo? ¿cuál es la fórmula para calcular su área?

2. ¿Cuál es el área de un rectángulo si es igual a 3 veces la de un cuadrado de lado $l = 5\ cm$? Dé algunas posibles dimensiones de este polígono.

3. ¿Cuándo un triángulo es rectángulo?

4. ¿Qué nombre reciben los lados de un triángulo rectángulo?

Recuerde

Los términos hipotenusa y cateto sólo se usan en los triángulos rectángulos.

5. ¿Cómo se llama el teorema que establece una relación entre los lados de un triángulo rectángulo? ¿cuál es esa relación? Use este teorema para investigar si se puede construir un triángulo rectángulo cuyos lados midan $3{,}1\ cm$, $2{,}3\ cm$ y $\sqrt{14{,}9}\ cm$.

6. ¿Qué relación guardan los lados de dos triángulos con ángulos internos de $30°$, $60°$ y $90°$?

7. Dibuje un triángulo con ángulos internos de $45°$, $45°$ y $90°$. ¿Es un triángulo isósceles? ¿y rectángulo? Mida los lados y luego calcule su área.

8. ¿Qué es una circunferencia?

9. ¿Cuáles son los elementos de una circunferencia?

10. ¿Cuáles son las rectas notables de una circunferencia?

11. ¿Cuál es la fórmula para obtener la longitud de una circunferencia de radio r?

12. ¿Qué ángulos se pueden trazar en una circunferencia?

13. ¿Qué es un círculo?

14. ¿Cuál es la fórmula del área de un círculo? ¿qué es un sector circular? ¿cuál es la fórmula del área de un sector circular?

Actividad en grupo

1. Calculen el área de los siguientes triángulos.

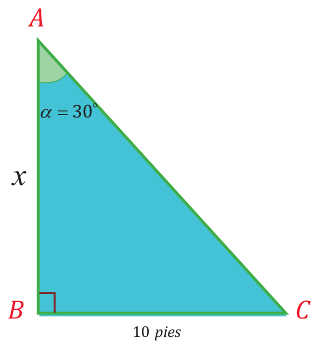
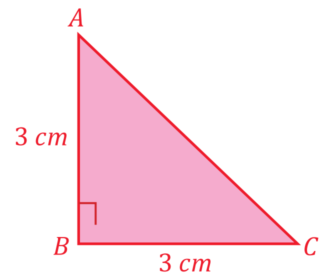
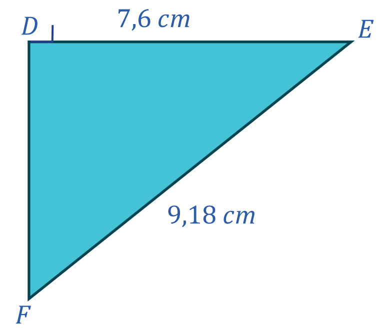


Figura 18





2. ¿Se puede formar un triángulo rectángulo de lados $6\,m$, $8\,m$ y $12\,m$? Justifique su respuesta.

3. Observen la figura 18:

   Sin aplicar el teorema de Pitágoras obtengan el cateto faltante del triángulo, ¿cuál es el valor del otro ángulo no recto? Calculen el área del triángulo.

4. En los juegos olímpicos, el disco que lanzan los hombres tiene un diámetro de $22\,cm$. Hallen la longitud de la circunferencia del disco.

5. Determinen la longitud de las circunferencias y el área de los círculos de la figura 19.

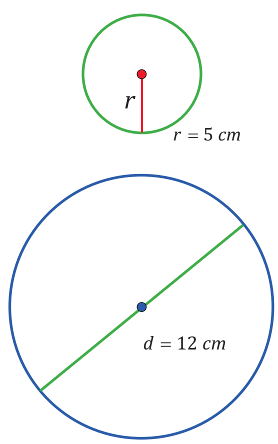


Figura 19

El Cilindro: construcción, área y volumen

¿Sabía qué?

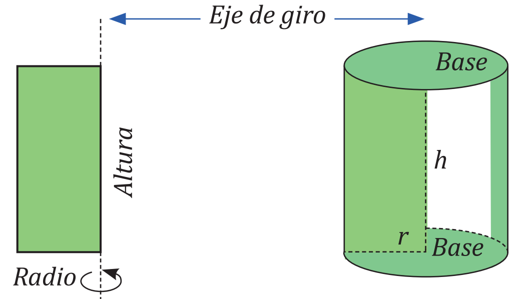
A los sólidos generados por rotación se les conoce como cuerpos redondos.

Continuando con el estudio de los sólidos, ahora veremos los cuerpos geométricos generados por la rotación de cierto tipo de polígono. Observaremos posteriormente que los cuerpos geométricos generados por rotación son todos aquellos sólidos limitados por caras curvas (es decir, caras curvas o por caras curvas y planas).

Los 3 **tipos de cuerpos redondos** que estudiaremos son: **Cilindro**, **Cono** y **Esfera**.

Un **cilindro** es el cuerpo geométrico generado por la rotación de un rectángulo entorno a uno de sus lados.

El cilindro es un sólido limitado por una cara curva y dos caras planas circulares, congruentes y paralelas entre sí, llamadas bases del cilindro.



El desarrollo (o red) de un cilindro nos muestra sus dos bases y su cara curva cuya forma plana es un rectángulo (figura 20).

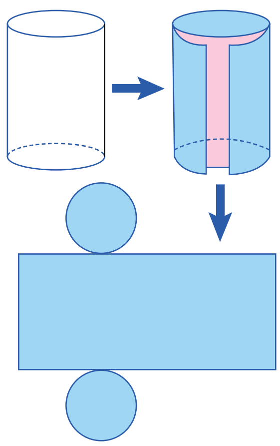


Figura 20

Para hallar el área total de un cilindro es necesario identificar en él las siguientes medidas:

1. Radio (r): radio del círculo de la base.
2. Altura (h): distancia entre las dos bases.

El **área lateral** A_L de un cilindro es el área del rectángulo de su red. El **área total** de un cilindro es igual a la suma de las áreas de sus dos bases circulares A_B y el área lateral A_L.

Es decir,

$$A_T = 2A_B + A_L$$
$$= 2\left(\pi r^2\right) + \underbrace{\left(2\pi r\right)}h.$$

La altura del cilindro es el ancho del rectángulo

Área de un círculo

Longitud de una circunferencia y base del rectángulo de la red.

Así tenemos

$$A_T = 2\pi r\left(r+h\right).$$

Ejemplo 1

Una lata de atún tiene $7{,}6\ cm$ de altura y el radio de su base es $5\ cm$. ¿Cuánto metal se necesita para hacer una de estas latas?

Solución

El área total de la lata es:

$$\begin{aligned}&= 2\pi(5\ cm)(5\ cm + 7{,}6\ cm)\\ &= 2\pi(5\ cm\,(12{,}6\ cm))\\ &= 2\pi(63\ cm^2)\\ &\approx 2\,(3{,}14)(63\ cm^2)\\ &= 395{,}64\ cm^2.\end{aligned}$$

¡Importante!

Como $3{,}14$ es una aproximación racional de π usaremos el símbolo $\approx$ en lugar de $=$.

Por consiguiente, el metal que se necesita para hacer una de estas latas es $395{,}64\ cm^3$.

1. Calcule la cantidad de metal necesaria para la fabricación de 351 latas.

2. ¿Cuál es el costo de 437 latas si cada una tiene un valor de $4{,}95$ córdobas?

El volumen de un cilindro es la cantidad de espacio que hay dentro del cilindro.

El **volumen de un cilindro** es igual al producto del área de la base por la altura. En símbolos,

$$V = A_B \cdot h$$
$$V = (\pi \cdot r^2) \cdot h.$$

Ejemplo 2

Halle el volumen de la lata de atún del ejemplo anterior.

Solución

Usando la fórmula para el volumen de un cilindro

$$V = \pi r^2 h,$$

tenemos

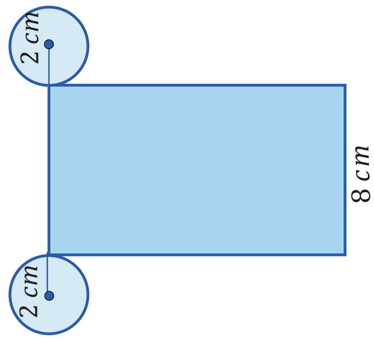
$$\begin{aligned}V &= \pi(5\ cm)^2(7{,}6\ cm)\\ &= \pi(25\ cm^2)(7{,}6\ cm)\\ &\approx (3{,}14)(25\ cm^2)(7{,}6\ cm)\\ &= 596{,}6\ cm^3.\end{aligned}$$

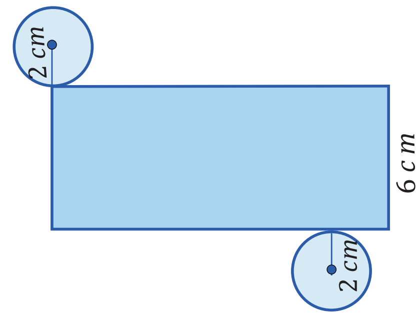
Luego, el volumen de la lata es aproximadamente $596{,}6\ cm^3$.

Convierta $596{,}6\ cm^3$ a gramos.

Compruebe lo aprendido

1. Determine el volumen de los cilindros que se generan con las redes siguientes:





2. Si se quisiera forrar los cilindros anteriores, ¿qué cantidad de papel se usaría en cada uno? Utilice las redes anteriores y construya los cilindros.

3. Construya dos cilindros oblicuos y dos rectos utilizando la experiencia obtenida anteriormente, primero investigue sus redes.

4. Halle el área lateral de un cilindro recto si el radio de la base mide $4\ cm$ y su altura $12\ cm$. ¿Cuál es el área total en dm^2 y el volumen en cm^3?

Aplique lo aprendido

1. Calcule el volumen de una lata de gaseosa de radio $7{,}6\ cm$ y altura $15{,}7\ cm$. Exprese su respuesta en mililitros y en onzas.

2. Calcule el volumen de un tarro de leche de diámetro $22\ cm$ y altura $17\ cm$. Transforme los cm^3 a mililitros.

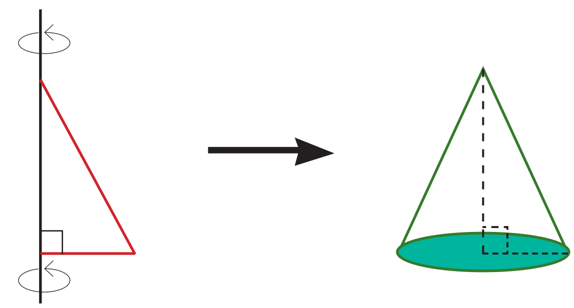
3. Encuentre la altura de un cilindro cuya área total es $502{,}8\ cm^2$ y el radio de la base mide $8\ cm$.

4. El área total de un cilindro es $366\ cm^2$ y su altura es el triple del radio de su base. Halle la altura, el radio de la base y el volumen del cilindro.

5. Construya dos cilindros de diferentes dimensiones pero, que tengan el mismo volumen. ¿Tienen la misma área lateral y total?

El cono: construcción, área y volumen

Un **cono** es un cuerpo geométrico generado por la rotación de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.



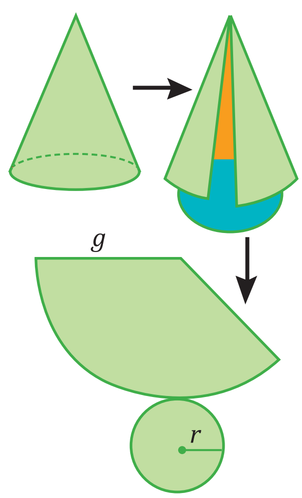
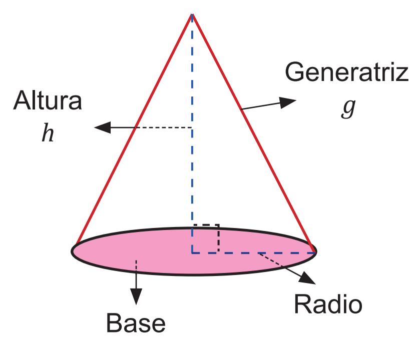


Figura 21

Los conos son figuras sólidas limitadas por una cara curva y una cara plana con forma circular llamada base. En la siguiente figura podemos distinguir los elementos de un cono:



Podemos, por decirlo así, desarrollar un cono (es decir mostrar su red) para determinar la fórmula del área total y volumen del cono.

La red de un cono está formada por:

Un círculo de radio r y circunferencia de longitud $2\pi r$.

Un sector circular de radio g (que llamaremos generatriz) y longitud de arco l igual a $2\pi r$ (Ver figura 21).

El **área lateral** A_L del cono es el área del sector circular de su desarrollo, así

$$A_L = \frac{1}{2} l\, g,$$

pero como l es igual a $2\pi r$:

$$A_L = \frac{1}{2}(2\pi r)g$$
$$A_L = \pi r g.$$

El **área total** del cono es la suma del área lateral y el área de la base, luego

$$A_T = A_L + A_B$$
$$A_T = \pi r g + \pi r^2$$
$$= \pi r(g + r).$$

Ejemplo 3

Ramón y Danelia van a celebrar el cumpleaños de su hijo Álvaro, y quieren comprar unos gorros de forma cónica para la fiesta. Si el diámetro de la abertura de un gorro es de $15\,cm$ y la generatriz es de $25\,cm$. Calcule el área de la superficie de un gorro.

Solución

En términos matemáticos, lo que queremos calcular, es el área lateral del cono que forma el gorro. Así, tenemos

$$A_L = \pi r g$$
$$= (\pi)(7{,}5\,cm)(25\,cm)$$
$$\approx (3{,}14)(7{,}5\,cm)(25\,cm)$$
$$= 588{,}75\,cm^2.$$

El área de la superficie del gorro es aproximadamente $588{,}75\,cm^2$.

¡Importante!

El volumen V de un cono es $\frac{1}{3}$ del volumen de un cilindro con la misma área de la base y la misma altura

$$V_{cil} = A_B h$$
$$= \underbrace{\pi r^2}_{\text{Área de la base circular}} \cdot h$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} V_{cil}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{Área de la base circular}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Altura del cono}}$$

El volumen V de un cono es $\frac{1}{3}$ del producto de su altura h por el área de la base A_B. Es decir,

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h.$$

La base de un cono de altura h es una circunferencia de radio r. Luego la fórmula anterior podemos explicitarla un poco más:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h.$$

Así, el volumen de un cono de altura h y radio de la base r está dado por la ecuación

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h.$$

Ejemplo 4

Halle el volumen de un cono de radio $r = 8\ cm$ y altura $h = 16\ cm$.

Solución

Sustituyendo los valores dados en la fórmula anterior se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(8\ cm)^2(16\ cm) \\ &= \frac{1}{3}\pi(64\ cm^2)(16\ cm) \\ &= \frac{1}{3}\pi(1\ 024\ cm^3) \\ &\approx \frac{1}{3}(3{,}14)(1\ 024\ cm^3) \\ &= 1\ 071{,}79\ cm^3. \end{aligned}$$

El cálculo del volumen nos da como resultado $1\ 071{,}79\ cm^3$.

Encuentre el área total del cono del ejemplo anterior.

Ejemplo 5

Calcule el área total de un cono con $r = 3\ m$ y $g = 6\ m$.

Solución

Usemos la fórmula

$$A_T = \pi r\,(g + r).$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} A_T &\approx (3{,}14)\,(3\ m)[6\ m + 3\ m] \\ &= (9{,}42\ m)\,[9\ m] \\ &= 84{,}78\ m^2. \end{aligned}$$

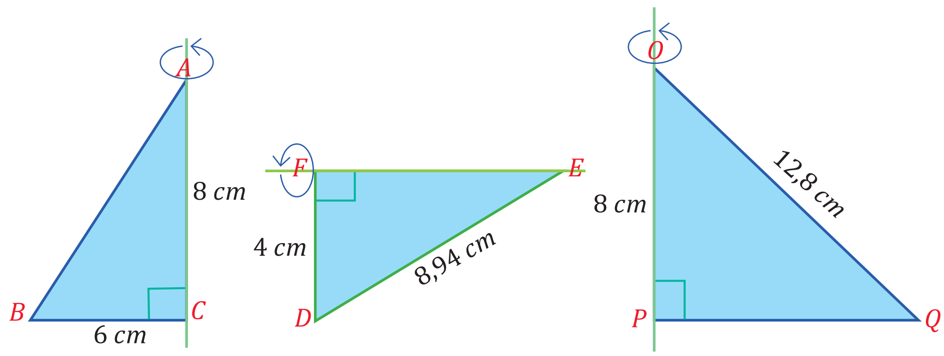
El área encontrada es $84{,}78\ m^2$.

Halle el volumen del cono del ejemplo anterior.

Compruebe lo aprendido

1. Halle el área lateral y total de un cono sabiendo que el radio de la base mide $15\ dm$ y la altura $33\ dm$. Exprese en m^2 y cm^2 las dos áreas encontradas.
2. Determine el área total de un cono sabiendo que el radio de la base mide $30\ cm$ y la altura $37 cm$. Dé el resultado en mm^2.
3. Encuentre la altura de un cono sabiendo que el área lateral mide $118\sqrt{3}\ cm^2$ y el radio de la base $6\ cm$. ¿Cuál es la altura del cono en metros y en pulgadas?

4. Halle el área total del cono que se forma al hacer girar el triángulo rectángulo sobre el cateto indicado:



5. Calcule el volumen de los conos anteriores.

6. ¿Un cono y un cilindro pueden tener igual volumen? Si es así, ¿es posible establecer alguna relación entre sus dimensiones? ¿cuál?

Aplique lo aprendido

1. Determine el volumen de la porción cónica del sombrero de un disfraz para un carnaval, con altura de $18\ cm$ y radio de la base $10\ cm$.

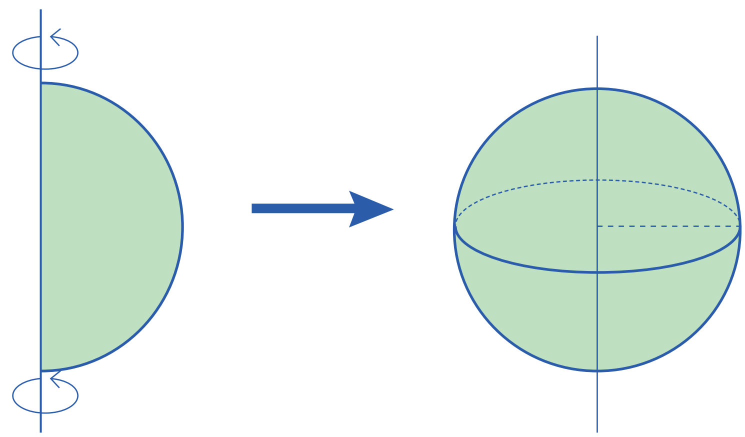
2. Dos conos tienen igual volumen. ¿Tienen las mismas dimensiones (altura y radio)? Justifique su respuesta.

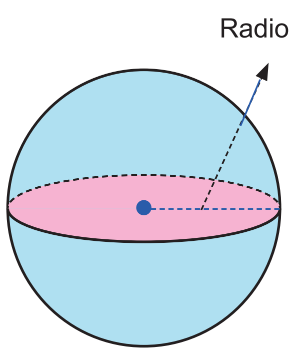
3. Halle el volumen de la porción cónica de un helado si la altura es de $7\,cm$ y el radio de la base $4\,cm$. Dé su respuesta en gramos.

4. Calcule el área lateral, total y volumen de un cono cuya generatriz mide $6\,m$ y el radio de la base $150\ cm$.

La Esfera: construcción, área y volumen

La **esfera** es el sólido generado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.





La parte sombreada es el círculo que contiene el centro de la esfera llamado **círculo máximo**.

Figura 22

Podemos también, considerar una esfera como un cuerpo redondo limitado por una cara curva. Todos los puntos de la superficie de la esfera están a la misma distancia del centro.

La distancia de un punto cualquiera de la superficie de la esfera al centro se llama **radio de la esfera**.

El área del círculo que contiene el centro de la esfera es πr^2 y se le denomina **círculo máximo** (figura 22). Se necesitarían exactamente 4 círculos máximos para envolver la esfera completamente.

Por tanto,

$$A_T = 4\pi r^2$$

Imaginémonos el círculo interior con área πr^2 como base del cilindro que contiene exactamente a la esfera.

El volumen de ese cilindro es igual al área de su base por su altura, es decir $\pi r^2 \cdot 2r$ ó $2\pi r^3$. La esfera no llena todo el cilindro, más aún, su volumen es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro:

$$\frac{2}{3}\left(2\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Entonces, para una esfera su volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ejemplo 6

Calcule el volumen de agua depositado en un recipiente de vidrio para plantas que tiene forma esférica y con un radio $r = 3\ cm$.

Solución

Usando la fórmula del volumen se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\cdot \pi \cdot (3\ cm)^3 \\ &\approx \frac{4}{3}\cdot 3{,}14 \cdot 27\ cm^3 \\ &\approx 113{,}04\ cm^3. \end{aligned}$$

El volumen del recipiente es $113{,}04\ cm^3$.

Compruebe lo aprendido

1. Encuentre el radio, el área y el volumen de las siguientes esferas, dada l la longitud de su circunferencia máxima:

   a. $l = 66{,}768\ cm$

   b. $l = 67\ cm$

   c. $l = 8{,}676\ cm$.

2. Halle el volumen de las siguientes esferas dada su área:

   a. $A = 642{,}254\ cm^2$

   b. $A = 99{,}999\ cm^2$

   c. $A = 10\ Dm^2$.

3. Dos esferas cuyos diámetros son $9\,cm$ y $13\,cm$ respectivamente, descansan tangentes sobre una tabla. Determine la distancia entre los dos puntos donde las esferas tocan la tabla.

4. Calcule el área total de la esfera del ejemplo 6.

Ejercicios finales de la unidad

1. Recolecte 10 envases de alimentos de distintos tamaños y que tengan forma de sólidos, anote en su cuaderno las dimensiones de cada uno de ellos. Clasifíquelos en poliedros regulares e irregulares y calcule área total y volumen.

2. Calcule el volumen de un tarro de café de $9\,cm$ de diámetro y $8\,cm$ de altura.

3. Para calcular la cantidad de cuero que se requiere para fabricar un balón de baloncesto ¿se necesita usar el volumen o el área total? Justifique.

4. Juana compró una pecera ortoédrica con las siguientes dimensiones: $60\,cm$ de largo, $30\,cm$ de ancho y $33{,}5\,cm$ de altura. ¿Cuántos litros de agua necesita para llenar $\frac{2}{3}$ del volumen total de la pecera?

5. Una naranja de $8\,cm$ de diámetro tiene una cáscara de $3\,mm$ de espesor. Calcule el volumen contenido en la cáscara.

6. Tomando en cuenta los resultados del ejercicio 1. y la cantidad de alimento que trae el envase, calcule el volumen sobrante. ¿En algún caso encontró que el volumen de un envase fuese menor que la cantidad de alimento señalado en la etiqueta?

7. Calcule en km^2 el área de la superficie terrestre si el radio de la Tierra es de $6\,370\,km$.

8. En el interior de una caja cúbica de volumen $84\,cm^3$ se coloca una pelota que toca a cada una de las caras de la caja en su punto medio. Calcular el volumen de la pelota.

10. En la tabla siguiente se da uno de los valores r(radio), d(diámetro), V(volumen) y A(área) para una esfera particular. Encuentre los 3 valores restantes. Deje el símbolo de π en sus respuestas.

r	d	A	V
$3{,}75\,cm$			
	$10^2\,m$		
		$\frac{32}{3}\pi\,cm^2$	
			$144\sqrt{3}\pi\,dm^3$

10. La gran pirámide (de Keops) tiene $137\,m$ de altura y una base cuadrada de $230\,m$ de lado. Calcule el área de la base y el área total de la pirámide. En algunas fuentes de información se dice que "el área de la base de la pirámide de Keops es $5\,300\,m^2$ con $230\,m$ de lado". ¿Hay alguna contradicción matemática en esta afirmación?

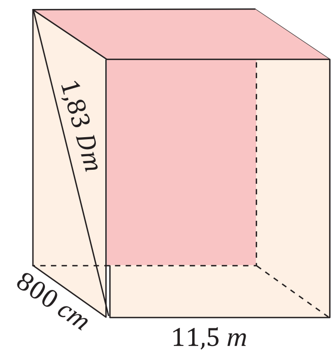
11. Una pelota de béisbol tiene las siguientes características: una circunferencia máxima de longitud $22{,}5\,cm$ y no mayor a $24\,cm$, un peso aproximado de $142\,g$ y una cubierta de piel en dos piezas que son cosidas juntas en 108 costuras de hilo rojo encerado de algodón. Encuentre su área y volumen para $22{,}5$, 23 y $23{,}5$ centímetros de longitud.

12. Investigue las dimensiones de una pelota de fútbol y encuentre su volumen.

13. La Luna es el único satélite natural que posee la Tierra, tiene un radio de $1\,734{,}4\ km$. Encuentre el valor de la superficie lunar y el volumen de dicho satélite.

14. El volumen de una pirámide es $2\,015\,cm^3$ y su base es un cuadrado de lado $0{,}06\,m$. Encuentre la altura de este poliedro en centímetros y en metros.

15. Para el depósito de agua de la figura, calcule la profundidad y la cantidad de agua necesaria para llenarlo. Dé la profundidad en decímetros.



16. Dé ejemplo, si es posible, de dos poliedros uno regular y otro irregular con el mismo número de vértices y aristas. ¿Tienen el mismo número de caras? ¿Por qué?. Dibuje dos de los poliedros que encontró y calcule su volumen.

17. Resuelva en orden los siguientes incisos para obtener una generalización acerca de los volúmenes de las esferas. Deje las las respuestas en términos de π.

a. Encuentre el volumen de una esfera que tiene radio $1\,m$.

b. Suponga que el radio se duplica. ¿Cuál es el nuevo volumen y cuántas veces se incrementó en relación con la anterior?

c. Triplique el radio de la esfera del inciso a. y calcule el nuevo volumen. ¿Cuántas veces se incrementa éste?

d. Tomando en cuenta los resultados anteriores ¿se puede afirmar que en general, si el radio de una esfera se multiplica por n, el volumen se multiplica por________?

18. Las dimensiones de una caja de jugo son $19{,}5\,cm$, $9{,}5\,cm$ y $6\,cm$. Calcule el área total y el volumen de la caja. Si una empresa fabrica $5\,000$ cajas diarias por 20 días al mes, determine la cantidad de cartón que se utiliza por año considerando que el año tiene 52 semanas.

19. ¿Cuántos metros cúbicos de mezcla de cemento y arena se necesitan para construir una escalera de tres peldaños cuya base es un rectángulo de $1{,}5\,m$ de largo por $50\,cm$ de ancho, con una altura de $30\,cm$ cada una?

20. Considere una zanahoria a la cual se le corta el tallo para formar así una figura cónica y $3\,cm$ de radio y $150\,cm^3$ de volumen aproximadamente. ¿Cuál es su largo?

21. Experimente con sus útiles escolares. Usando el tajador y lápiz de grafito, saque punta a éste. La figura que se forma se le puede considerar un cono. Suponiendo que la base es de $4\,mm$ y tiene una altura de $8\,mm$. Calcule cuántos milímetros cúbicos de grafito hay en la punta afilada.

22. Deduzca la fórmula del área lateral de la esfera a partir de la fórmula de su volumen y considere la esfera como un cuerpo forrado por pentágonos que serán bases de las pirámides con las cuales trabajará.

23. Escriba (V) verdadero o (F) falso a cada una de las siguientes proposiciones. Justifique sus respuestas.

a. Algunos prismas son paralelepípedos.

b. Todo cubo es un prisma.

c. Una condición necesaria y suficiente para que un ortoedro sea un cubo es que sus caras sean cuadradas.

d. Es posible que un paralelepípedo tenga como base un trapecio.

e. Si un sólido es un prisma entonces es un poliedro.

f. En una pirámide regular las caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

g. El volumen de un ortoedro es igual al producto de sus tres dimensiones.

Glosario

Área de un poliedro regular: sea n el número de caras de un poliedro regular y S el área de una de sus caras. Entonces, el área del poliedro regular es igual a

$$A = n \times S.$$

Arista: es el segmento de recta donde se intersecan dos caras de un sólido.

Azar: es la característica de algunos fenómenos cuyos resultados no son previsibles.

Cilindro: es el cuerpo geométrico generado por la rotación de un rectángulo entorno a uno de sus lados.

Cofactor: o adjunto del elemento a_{ij} de una matriz $A = (a_{ij})$ es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor de a_{ij}.

Combinación: dado un conjunto A de n elementos, una combinación de A, tomando r elementos a la vez, es todo subconjunto de A de r elementos. El total de combinaciones de los n elementos de A, tomando r a la vez se denota por $C(n; r)$.

Cono: es un cuerpo geométrico generado por la rotación de un triángulo rectángulo entorno a uno de sus catetos.

Determinante: el determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3 se define como

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Dodecaedro: poliedro que tiene 12 caras que son regiones limitadas por pentágonos regulares.

Ecuación lineal con tres variables: es una expresión de la forma

$$ax + by + cz = d$$

donde a, b, c y d son constantes reales no todas nulas.

Esfera: es el sólido generado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

Espacio muestral: se llama espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento.

Evento: es todo subconjunto del espacio muestral que resulta de un experimento aleatorio.

Evento imposible: es un evento que nunca ocurre, por lo tanto su probabilidad es 0.

Evento seguro: un evento es seguro si siempre ocurre, su probabilidad es 1.

Experimento aleatorio: es un experimento para el cual se conocen todos los resultados posibles pero no se puede predecir qué resultado particular se va a obtener.

Función definida por partes: una función se llama definida por partes (a trozos) si la regla que la define incluye más de una expresión (más de una fórmula).

Función mayor entero: la función mayor entero f (o parte entera de x) es la función definida por

$$f(x)=[x],\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Función valor absoluto: es la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=|x|$ con

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

Hexaedro: o cubo, es un poliedro que tiene 6 caras que son regiones limitadas por cuadrados.

Icosaedro: poliedro que tiene 20 caras que son regiones limitadas por triángulos equiláteros.

Matriz cuadrada: es una matriz que tiene igual número de filas y columnas.

Matriz diagonal: es una matriz que a la vez es triangular inferior y superior.

Matriz escalar: matriz que es diagonal y todos los elementos de su diagonal son iguales.

Matriz identidad: es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1.

Matriz nula: es la matriz que tiene todas sus componentes iguales a cero.

Matriz triangular superior: una matriz A es triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

Matriz triangular inferior: es una matriz cuyos elementos por encima de su diagonal principal son cero.

Matriz invertible: una matriz cuadrada A y de orden n, se dice que es invertible, o no singular, si existe otra matriz del mismo orden, llamada matriz inversa de A y denotada por A^{-1}, tal que

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$$

Menor complementario M_{ij}: dada una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ de orden n, el menor complementario M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.

Octaedro: poliedro que tiene 8 caras que son regiones limitadas por triángulos equiláteros.

Opuesta de una matriz: dada la matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m\times n$, la matriz $-A=(-a_{ij})$ también de orden $m\times n$ es la opuesta de A y verifica $A+(-A)=0$ y $-A+A=0$.

Pirámide: es un poliedro definido por un polígono como base y triángulos como caras laterales que poseen un vértice común que no está contenido en el plano base.

Pirámide triangular: es una pirámide que tiene por base un triángulo.

Pirámide pentagonal: es una pirámide cuya base es un pentágono.

Poliedro: es toda región del espacio tridimensional limitada por 4 o más regiones poligonales, es decir aquellos sólidos cuyas caras son regiones poligonales.

Poliedro convexo: un poliedro es convexo si una recta sólo puede cortar su superficie en dos puntos.

Poliedros irregulares: son aquellos poliedros cuyas caras no son todas iguales como los prismas y las pirámides.

Prisma recto: es un prisma que todas sus caras laterales son rectángulos.

Prismas: son poliedros que poseen al menos dos caras congruentes y paralelas.

Primas oblicuos: es un prisma con caras laterales que son romboides.

Resolver un triángulo: es encontrar la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos.

Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas: es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

donde d_1, d_2, d_3 y todos los coeficientes de las variables son números reales.

Sistemas equivalentes: dos sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Sólido: es una región del espacio tridimensional limitada por regiones poligonales que llamaremos caras.

Solución de una ecuación lineal con tres variables : una solución de la ecuación $ax + by + cz = d$ es una terna de número reales $(x_0; y_0; z_0)$ que cumple $ax_0 + by_0 + cz_0 = d.$

Tetraedro: poliedro que tiene 4 caras que son regiones limitadas por triángulos equiláteros.

Traza de una matriz cuadrada: traza de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de su diagonal principal y se denota por $tr(A)$.

Valor absoluto de un número real a: coincide con a si a es positivo o cero, o con su opuesto si es negativo. Esto es,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Vértice: es una esquina (punto) de un cuerpo geométrico (o sólido).

Volumen de una pirámide: es $\frac{1}{3}$ del producto del área de su base A_B por su altura h. Así,

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Volumen del cilindro: el volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base por la altura.

En símbolos:

$$V = A_B \cdot h$$
$$V = (\pi \cdot r^2) \cdot h.$$

Volumen del cono: el volumen V de un cono es $\frac{1}{3}$ del producto de su altura h por el área de la base A_B.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Bibliografía

1. Kolman, B. (2 000). *Algebra Lineal Elemental*. New Jersy: Prentice-Hall.
2. Blitzer, R; Gill, J. (1 992). *Algebra for College Students*. United States of America: Macmillan Publishing Company.
3. Domínguez J. (2 006). Estadística y Probabilidad. El mundo de los datos del azar. Oxford University Press.
4. Dugopolsky, M; Lial, M; Hornsby, J, Schneider, D. (2 006). *Trigonometría*. México: Pearson Educación.
5. Larson, R. (2 007). *Precálculo*. Books / Cole.
6. Sullivan, M. (1 997). *Precálculo*. México: Pearson Educación.
7. Swokowski, C (2 009). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. México: Wadsworth Pub co.
8. Walpole R; Myers R. (1 992). *Probabilidad y Estadística*. México: McGRAW-HILL.
9. Baldor Aurelio. Aritmética. México. Ed. Publicaciones Cultural S.A. de C.V., 1 983.
10. Baldor, Dr. Aurelio. Algebra. Madrid, Ed. y distribuciones Codice S. A., 1 963.
11. Bautista Ballén, Mauricio. Matemáticas 7. Bogotá. Ed. Santillana, 2 007.
12. Beltrán Luis, Rodríguez Benjamín y Dimaté Mónica. Matemáticas 7: con tecnología aplicad, Colombia, Ed. Prentice Hall, 1 999.
13. Beristain Eloísa y Campos Yolanda. Matemáticas 1 y 2. Bogotá, Colombia. Ed. Mc Graw-Hill Latinoamericana, S.A., 1 974.
14. Gobierno de Nicaragua. Ley 225. Norma sobre el sistema internacional de unidades. Recomendaciones para el uso correcto del S.I. Nicaragua.
15. Jurgensen Ray, Donnelly, Alfred y Dolciani, Mary. Geometría Moderna, 1ra. ed. en español, México D. F., 1 968.

16. Lipschutz Seymoour. Teoría de conjuntos y temas afines, teoría y problemas. México. Ed. Libros Mc Graw-Hill, 1 969.

17. Londoño Nelson y Bedoya Hernández. Serie Matemática progresiva 6-7-8, 7ma. ed. Bogotá, Colombia, 1 988.

18. Moise, E. y Downs, F. Geometría Moderna. Estados Unidos, Addison Wesley publishing company, 1 966.

19. Neira Marina y otros. Matemática en construcción 7. 2da. ed. Colombia, Oxford University Press, 1 996.

20. Rey Pastor y Babini José. Historia de la matemática, vol. 1 y 2. Barcelona. Ed. Gedisa S.A., 2 000.

21. Rich Barnett. Geometría 2da. ed. México. Ed. Mc Graw Hill, 1 991.

22. Saenz Luis, Gutierrez Luis y Sequeira Francisco. Matemática 1,2,3, educación secundaria SGS. Nicaragua. FARBEN grupo editorial NORMA, 1 997.

23. Ministerio de Educación, Compendio de los Documentos Curriculares con Enfoque de Competencia, Managua, Nicaragua 2005.

24. Programa de Estudio Educación Secundaria, Matemática 10, y 11º Grado, MINED, Nicaragua.