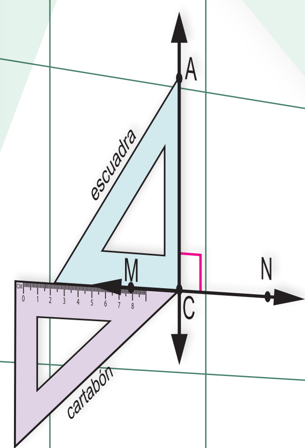
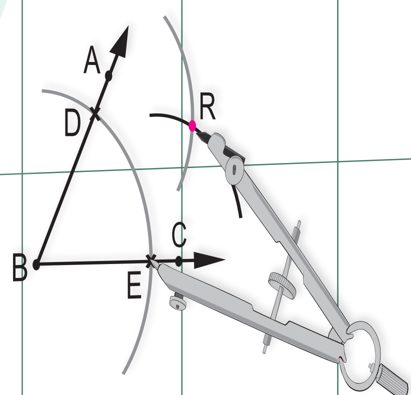
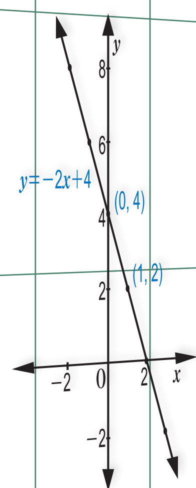
MATEMÁTICA 8

Octavo grado







Libro de Texto

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
¡El Pueblo, Presidente!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

8vo

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora María Elsa Guillén
Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Armando José Huete Fuentes
Humberto Antonio Jarquín López
Célfida del Rosario López Sánchez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

REVISIÓN Y ASESORÍA TÉCNICA CIENTÍFICA

Sociedad Matemática de Nicaragua
Profesora Gloria Parrilla Rivera
Profesor Jorge Alberto Velásquez Benavidez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega
Humberto Antonio Jarquín López
Juan Carlos Caballero López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández
Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

Lissette Margina Serrano Vallecillo • Maribel del Socorro Cuarezma López

Primera Edición, 2019

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

El texto que tienes en tus manos es un esfuerzo realizado en el marco del **“Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria” (NICAMATE)**, implementado por el Ministerio de Educación en coordinación con la UNAN – MANAGUA, UNAN – LEÓN, y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

La matemática es una herramienta potente en el desarrollo de cada una de nuestras vidas; nos ayuda a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Cada contenido de este libro, es abordado de manera que resulta fácil de comprender, y con el apoyo de tu docente lograrás adquirir conceptos y procedimientos matemáticos, necesarios para el desarrollo de conocimientos y habilidades que favorecen tu formación integral.

Tenemos la certeza que tu encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología amigable, retadora y exigente, con el propósito de que los conocimientos matemáticos te enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en tus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Mucho ánimo ya que contamos contigo para desarrollar una mejor Nicaragua.

Atentamente,

Ministra de Educación
Miriam Soledad Raudez

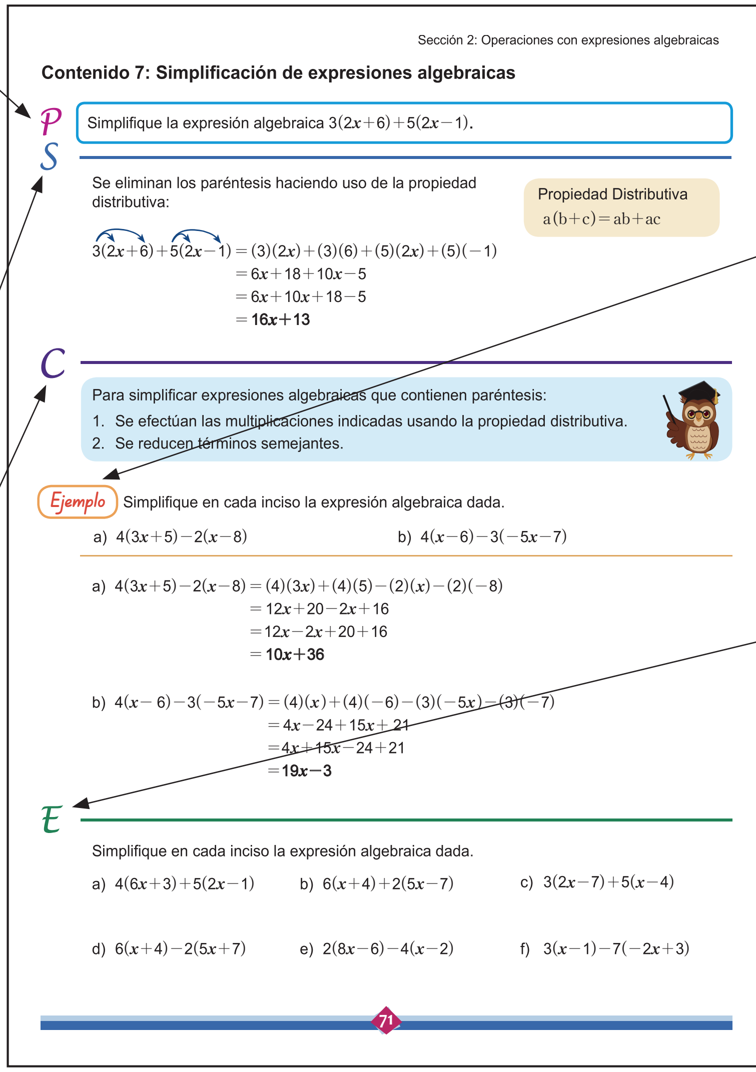
INTRODUCCIÓN

En cada página del libro de texto se presentan los momentos de una clase de 45 minutos:

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que intenten resolver los ejercicios por ustedes mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En **Desafío** se presentan casos especiales o contenidos de mayor complejidad.

Índice

Unidad 1

Operaciones con Polinomios

Sección 1 Adición y sustracción de polinomios

Sección 2 Multiplicación de polinomios

Sección 3 División de polinomios

Sección 1: Adición y sustracción de polinomios

Contenido 1: Clasificación de polinomios

P

Escriba en la casilla correspondiente de la tabla la información solicitada respecto de las expresiones algebraicas:

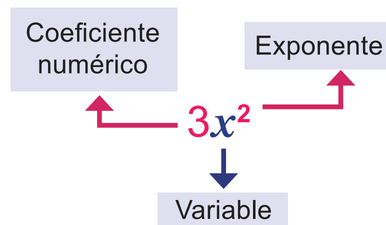
a) $3x$ b) x^2+5x+6 c) $4x^3+2x^2$

	Expresión algebraica	Número de términos	Grado
a)	$3x$		
b)	x^2+5x+6		
c)	$4x^3+2x^2$		

S

	Expresión algebraica	Número de términos	Grado
a)	$3x$	1	1
b)	x^2+5x+6	3	2
c)	$4x^3+2x^2$	2	3

Elementos de un monomio



La expresión algebraica $3x$, por tener un término se llama monomio, $4x^3+2x^2$, con dos términos, se llama binomio y x^2+5x+6 es un trinomio.

C

Monomio y **polinomio** son expresiones algebraicas. Un monomio tiene solo un término y un polinomio es una suma finita de términos. Si tiene dos o tres términos, se llama **binomio** y **trinomio** respectivamente.

El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las variables que contiene. Por ejemplo, el grado de x^2y^3 es $2+3=5$.

El **grado de un polinomio** es el mayor grado entre sus términos.

Término independiente es un término que no contiene variables, es decir, solamente aparece un número. Por ejemplo, el término independiente de x^2+5x+6 es 6.

Ejemplo Dados los siguientes polinomios, identifique el grado y clasifíquelos de acuerdo al número de términos:

a) x^4+3x^2 b) $xyz+xy+z$

a) $\underset{\substack{x\cdot x\cdot x\cdot x\\ 4}}{x^4} + \underset{\substack{x\cdot x\\ 2}}{3x^2}$, el grado del polinomio es **4** y **es un binomio**.

b) $\underset{\substack{x\cdot y\cdot z\\ 3}}{xyz} + \underset{\substack{x\cdot y\\ 2}}{xy} + \underset{\substack{z\\ 1}}{z}$, el grado del polinomio es **3** y **es un trinomio**.

Se observa que el exponente representa el número de veces que se multiplica una variable.

E

Dados los siguientes polinomios, identifique el grado y clasifíquelos de acuerdo al número de términos:

a) $4x^2$ b) $2a^2+5a$ c) x^3+x^2+x d) $xy+y+x$

Contenido 2: Simplificación de términos semejantes

P

Reduzca cada uno de los polinomio dados, sumando o restando los términos con las mismas variables elevadas al mismo exponente:

a) $3x+5y+8x+10y$ b) $6x^2+8x-12x^2-5x$

S

a) $3x + 5y + 8x + 10y$

Términos con las mismas variables y exponentes

$=3x+8x+5y+10y$ Se aplica la conmutatividad de la suma

$=(3+8)x+(5+10)y$ Se usa la distributividad

$=11x+15y$ Se efectúan las sumas indicadas

b) $6x^2 + 8x - 12x^2 - 5x$

Términos con las mismas variables y exponentes

$=6x^2-12x^2+8x-5x$ Se aplica la propiedad conmutativa

$=(6-12)x^2+(8-5)x$ Se usa la distributividad

$=-6x^2+3x$ Se efectúan las sustracciones indicadas

En a), $3x$ y $8x$ se pudieron simplificar en $11x$; igualmente, en b) $6x^2$ y $-12x^2$ se simplificaron en $-6x^2$. Se dice entonces que $3x$ y $8x$ son términos semejantes; lo mismo sucede con $6x^2$ y $-12x^2$ de b).

C

Términos semejantes son aquellos términos que tienen las mismas letras o variables elevadas a los mismos exponentes.

Simplificar términos semejantes significa sumar o restar sus coeficientes y escribir a continuación las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplo Simplifique la expresión $9a-8b+10a-9b$.

Se agrupan y simplifican términos semejantes:

$$\begin{aligned} 9a-8b+10a-9b &= 9a+10a-8b-9b \\ &= (9+10)a+(-8-9)b \\ &= 19a-17b \end{aligned}$$

E

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $4x+6y+10x+3y$ b) $9x+6y+7x+5y$ c) $3a-5b+10a+3b$

d) $2a-4b+8a-b$ e) $-4x^2-10x-4x-8x^2$ f) $7x^2-9x-2x+6x^2$

Contenido 3: Adición de polinomios

P

Efectúe la suma indicada $(3x+2y)+(5x+3y)$ de forma horizontal y vertical.

S

Forma horizontal:

$(3x+2y)+(5x+3y)=3x+2y+5x+3y$	Se eliminan paréntesis
$=3x+5x+2y+3y$	Se agrupan términos semejantes
$=\mathbf{8x+5y}$	Se simplifican términos semejantes

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 3x+2y \\ +) & 5x+3y \\ \hline & \mathbf{8x+5y} \end{array}$$

Se escribe un sumando

Se coloca el otro sumando

Se simplifican términos semejantes

C

Para sumar dos polinomios de forma horizontal, se agrupan los **términos semejantes** y se simplifican.

Para sumar dos polinomios de forma vertical se escribe uno de los sumandos y debajo de este el otro, colocando los términos semejantes, uno bajo el otro y se simplifican.

Ejemplo Efectúe la suma indicada $(4x^2+2x)+(10x^2-11x)$ de forma horizontal y vertical.

Forma horizontal:

$$\begin{aligned}(4x^2+2x)+(10x^2-11x)&=4x^2+2x+10x^2-11x\\&=4x^2+10x^2+2x-11x\\&=\mathbf{14x^2-9x}\end{aligned}$$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 4x^2+\ \ 2x \\ +) & 10x^2-11x \\ \hline & \mathbf{14x^2-\ \ 9x} \end{array}$$

E

Efectúe las siguientes sumas de forma horizontal y vertical:

a) $(3x+2y)+(5x+4y)$ b) $(4x+5y)+(6x-2y)$ c) $(8x-10y)+(7x+9y)$

d) $(-x-7y)+(x-8y)$ e) $(5y^2+2y)+(4y^2-8y)$ f) $(2x^2-6x)+(x^2-8x)$

Contenido 4: Sustracción de polinomios

P

Efectúe la sustracción indicada $(8x+7y)-(6x+3y)$ de forma horizontal y vertical.

S

Forma horizontal:

$(8x+7y)-(6x+3y)=(8x+7y)+(-6x-3y)$	Se cambian signos a los términos del sustraendo
$=8x+7y-6x-3y$	Se eliminan paréntesis
$=8x-6x+7y-3y$	Se agrupan términos semejantes
$=2x+4y$	Se simplifican términos semejantes

Forma vertical:

$8x+7y$	Se escribe el minuendo
$+)\ -6x-3y$	Se escribe el sustraendo con los signos de los términos cambiados
$2x+4y$	Se simplifican términos semejantes

C

En la **sustracción de polinomios** de forma horizontal, se escribe el minuendo y se le suma el **sustraendo** con los signos de sus términos cambiados, luego se simplifica.

Para efectuar la **sustracción de dos polinomios** en forma vertical, se escribe primero el minuendo y debajo de este el sustraendo, cambiando los signos a sus términos y haciendo corresponder verticalmente los términos semejantes, luego se simplifica.

Ejemplo Efectúe la sustracción indicada $(6x-5y)-(-8x+7y)$ de forma horizontal y vertical.

Forma horizontal:

$$(6x-5y)-(-8x+7y)=(6x-5y)+(8x-7y)$$
$$=6x-5y+8x-7y$$
$$=6x+8x-5y-7y$$
$$=14x-12y$$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{r} 6x-5y \\ +)\ \ 8x-7y \\ \hline 14x-12y \end{array}$$

E

Efectúe las siguientes sustracciones de forma horizontal y vertical:

a) $(7x+8y)-(2x+7y)$ b) $(9x-4y)-(5x-10y)$ c) $(3x+8y)-(-9x+5y)$

d) $(9x^2-y^2)-(-6x^2+3y^2)$ e) $(-12x-5y^2)-(5x+10y^2)$ f) $(6x^2-11y)-(-2x^2-6y)$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 1

1. Identifique el grado de cada uno de los siguientes polinomios y clasifíquelos de acuerdo al número de términos.

a) $4x-3$ b) $4ab+5c+1$ c) $5x^3+7x$ d) $-4x+5y^2-2$

2. Simplifique los siguientes polinomios:

a) $3x+2x^2+4x+6$ b) $4x^2+3y-2x^2+5y$

c) $-7xy-3x-5xy+4x$ d) $6xy-4x-3xy+10$

3. Efectúe en cada inciso las siguientes sumas indicadas de polinomios:

a) $(4x^2-6x)+(3x^2-12x)$ b) $(4x^3+6x)+(5x^3+x)$

c) $(8x-6y+2z)+(5x-4y-3z)$ d) $(-3x^3+5x+13)+(9x^3+3x-17)$

4. Efectúe las siguientes sustracciones indicadas de polinomios:

a) $(5x^2-9x)-(3x^2-8x)$ b) $(2x^3-6x)-(5x^3+2x)$

c) $(3x^2-7x+1)-(5x^2-7x-3)$ d) $(-2x^3-9x^2+3x)-(3x^3+2x+7)$

Sección 2: Multiplicación de polinomios

Contenido 1: Multiplicación de monomio por monomio

P

Efectúe la multiplicación indicada $(3x)(2y)$.

S

Para encontrar el producto de los monomios $3x$ y $2y$ se multiplican los coeficientes y las partes literales, haciendo uso de la conmutatividad y la asociatividad.

coeficiente

$5\,x^2y$

parte literal

$$\begin{aligned}(3x)(2y) &= (3)(x)(2)(y)\\ &= (3)(2)xy\\ &= \mathbf{6xy}\end{aligned}$$

C

Para multiplicar dos monomios, se multiplican sus coeficientes (tomando en cuenta el signo) y partes literales.

Ejemplo

Efectúe las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $(3x)(-4y)$ b) $(-6x)(-9x)$ c) $(-3x)^2$

Para efectuar las siguientes multiplicaciones se hace uso de la asociatividad, conmutatividad y por último se efectúan las operaciones indicadas.

a) $$\begin{aligned}(3x)(-4y) &= (3)(-4)xy\\ &= \mathbf{-12xy}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(-6x)(-9x) &= (-6)(-9)x\cdot x\\ &= \mathbf{54x^2}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(-3x)^2 &= (-3x)(-3x)\\ &= (-3)(-3)x\cdot x\\ &= \mathbf{9x^2}\end{aligned}$$

Observe que:

$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

$-3^2 = -(3)(3) = -9$

Luego, $(-3)^2 \neq -3^2$.

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $(7x)(6x)$ b) $(-8x)(9x)$ c) $(-3a)(-2b)$ d) $(-6x)^2$ e) $(2x)(3x^2)$

Contenido 2: Multiplicación de monomio por polinomio

P

Efectúe la multiplicación indicada $3(x+2)$.

S

Se efectúa la multiplicación utilizando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} 3(x+2) &= 3x+(3)(2) \\ &= \mathbf{3x+6} \end{aligned}$$

Se observa que se multiplica 3 por cada sumando del binomio $x+2$ y se efectúan las operaciones indicadas.

Propiedad distributiva

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a=ab+ac$$

C

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Ejemplo Efectúe las siguientes multiplicaciones indicadas:

a) $5(x-3)$ b) $a(-4a+b)$ c) $(2a-10)(-4b)$ d) $2(x+y+3)$

a) $$\begin{aligned} 5(x-3) &= 5x+(5)(-3) \\ &= \mathbf{5x-15} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} a(-4a+b) &= a(-4a)+ab \\ &= \mathbf{-4a^2+ab} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} (2a-10)(-4b) &= (2a)(-4b)+(-10)(-4b) \\ &= \mathbf{-8ab+40b} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2(x+y+3) &= 2x+2y+(2)(3) \\ &= \mathbf{2x+2y+6} \end{aligned}$$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $6(x+4)$ b) $3(y-5)$ c) $3x(x-2y)$ d) $(4a-2)(-6b)$ e) $5(x+y-7)$

Contenido 3: Multiplicación de dos binomios (1)

P

Efectúe el producto indicado $(x+2)(y+5)$.

S

Para efectuar el producto $(x+2)(y+5)$, se siguen los siguientes pasos:

1. Se usa la propiedad distributiva, multiplicando cada término de $x+2$ por el binomio $y+5$

$$(x+2)(y+5) = x(y+5) + 2(y+5)$$

2. Se aplica la multiplicación de un monomio por un binomio y se realizan los productos indicados

$$\begin{aligned}(x+2)(y+5) &= x(y+5) + 2(y+5)\\ &= xy + x(5) + 2y + (2)(5)\\ &= xy + 5x + 2y + 10\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{(x+2)(y+5) = xy + 5x + 2y + 10}$.

C

Para multiplicar dos binomios, se multiplica cada término de uno de los binomios por el otro binomio y se realizan los productos indicados.

$$(x+a)(y+b) = \underset{1}{xy} + \underset{2}{bx} + \underset{3}{ay} + \underset{4}{ab}$$

Ejemplo Efectúe el producto indicado $(x+2)(y-3)$.

$$\begin{aligned}(x+2)(y-3) &= x(y-3) + 2(y-3)\\ &= xy + x(-3) + 2y + 2(-3)\\ &= \mathbf{xy - 3x + 2y - 6}\end{aligned}$$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+5)(y+4)$ b) $(x+2)(y+4)$ c) $(x+6)(y+1)$

d) $(x+7)(y-6)$ e) $(x-3)(y+2)$ f) $(x-4)(y-3)$

Contenido 4: Multiplicación de dos binomios (2)

P

Efectúe la multiplicación indicada $(x+2)(x+3)$ de manera horizontal.

S

Para multiplicar $x+2$ por $x+3$ de manera horizontal se usa la propiedad distributiva. Es decir

$$
\begin{aligned}
(x+2)(x+3) &= \underset{1}{x\cdot x} + \underset{2}{x(3)} + \underset{3}{2x} + \underset{4}{(2)(3)}\\
&= x^2 + 3x + 2x + 6\\
&= x^2+(3+2)x+6\\
&= \mathbf{x^2+5x+6}
\end{aligned}
$$

Se observa que el producto de los binomios $x+2$ y $x+3$ que tienen en común el término x, es igual a este término elevado al cuadrado más la suma de los términos independientes 3 y 2 multiplicada por x, más el producto de los términos independientes 3 y 2.

C

Para multiplicar dos binomios de la forma $x+a$ y $x+b$ se usa la propiedad distributiva, siendo su producto igual al término común x elevado al cuadrado más la suma de los términos a y b multiplicada por el término común más el producto de los términos a y b. Es decir,

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplo Efectúe las siguientes multiplicaciones de binomios de forma horizontal:

a) $(x-9)(x+2)$ b) $(x+8)(x-4)$ c) $(x-7)(x-1)$

Se aplica la conclusión anterior:

a) $(x-9)(x+2)=x^2+(-9+2)x+(-9)(2)$
$=\mathbf{x^2-7x-18}$

b) $(x+8)(x-4)=x^2+(8-4)x+(8)(-4)$
$=\mathbf{x^2+4x-32}$

c) $(x-7)(x-1)=x^2+(-7-1)x+(-7)(-1)$
$=\mathbf{x^2-8x+7}$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones de binomios de forma horizontal:

a) $(x+2)(x+7)$ b) $(x-3)(x+7)$ c) $(x+3)(x-8)$ d) $(x-4)(x-9)$

Contenido 5: Multiplicación de dos binomios (3)

P

Efectúe la multiplicación indicada $(x+3)(x+5)$ de forma vertical.

S

Para multiplicar el binomio $x+3$ por $x+5$ de forma vertical, se siguen los siguientes pasos:

① Se escribe el binomio $x+5$ debajo del binomio $x+3$ y se traza una línea horizontal debajo del binomio $x+5$.

② Se multiplica la x del binomio $x+5$ por el binomio $x+3$, obteniéndose x^2+3x, resultado que se escribe debajo de la horizontal trazada.

③ Se multiplica el 5 del binomio $x+5$ por $x+3$, dando el resultado $5x+15$ que se coloca debajo de x^2+3x, pero respetando la semejanza de términos.

④ Se simplifican términos semejantes.

①
$$\begin{array}{rcccc} & x & + & 3 \\ \times & x & + & 5 \\ \hline \end{array}$$

②
$$\begin{array}{rcccc} & x & + & 3 \\ \times & x & + & 5 \\ \hline & x^2 & + & 3x \end{array}$$

③
$$\begin{array}{rcccccc} & x & + & 3 & & \\ \times & x & + & 5 & & \\ \hline & x^2 & + & 3x & & \\ & & + & 5x & + & 15 \\ \hline \end{array}$$

④
$$\begin{array}{rcccccc} & x & + & 3 & & \\ \times & x & + & 5 & & \\ \hline & x^2 & + & 3x & & \\ & & + & 5x & + & 15 \\ \hline & x^2 & + & 8x & + & 15 \end{array}$$

C

Procedimiento para multiplicar los binomios $x+a$ y $x+b$

1. Se escribe $x+b$ debajo de $x+a$ y se traza una línea horizontal debajo de $x+b$.
2. Se multiplica el primer término x de $x+b$ por los dos términos del binomio $x+a$. El resultado obtenido se coloca debajo de la horizontal trazada.
3. Se multiplica b por $x+a$. El resultado se coloca debajo del binomio encontrado en 2., pero respetando la semejanza de términos.
4. Se simplifican los términos semejantes.

Ejemplo Efectúe la multiplicación indicada $(x+9)(x-7)$ de forma vertical.

Para efectuar la multiplicación $(x+9)(x-7)$ se siguen los pasos de la conclusión anterior.

$$\begin{array}{rcccccc} & x & + & 9 & & \\ \times & x & - & 7 & & \\ \hline & x^2 & + & 9x & & \\ & & - & 7x & - & 63 \\ \hline & x^2 & + & 2x & - & 63 \end{array}$$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones de binomios de forma vertical:

a) $(x+3)(x+4)$ b) $(x-3)(x+2)$ c) $(x+5)(x-2)$ d) $(x-6)(x-7)$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 2

1. Efectúe las siguientes multiplicaciones indicadas de monomios:

a) $(3x)(7x)$ b) $(-8y)(4y)$ c) $(-5z)(-6z)$ d) $(3x)(-5x)$

e) $(3x^2)(6x)$ f) $(-x)(6x^3)$ g) $(-7y^2)(-8y)$ h) $(9x^2)(6y^3)$

2. Efectúe en cada inciso la multiplicación indicada:

a) $4(x+5)$ b) $x(x-2)$ c) $3a(4a-7)$

d) $4a(2a+3b)$ e) $x(3x-y)$ f) $-2x(4x-3y)$

3. Efectúe de forma horizontal los siguientes productos indicados:

a) $(x+4)(y+5)$ b) $(x-1)(y+5)$ c) $(x+6)(y-2)$ d) $(x-3)(y-10)$

e) $(x+3)(x+5)$ f) $(x+2)(x-6)$ g) $(x+8)(x-2)$ h) $(x-6)(x-1)$

4. Efectúe las siguientes multiplicaciones indicadas de forma vertical:

a) $(x+2)(x+5)$ b) $(x-3)(x+7)$ c) $(x-6)(x-7)$ d) $(x-1)(2x+1)$

Contenido 1: División de monomio por monomio

P

Efectúe la división indicada $24a^2b^2 \div 3ab$.

Recuerde:
$A \div B = \dfrac{A}{B}$
$a^2b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b$

S

$$24a^2b^2 \div 3ab = \frac{24a^2b^2}{3ab}$$
Se expresa la división como una fracción

$$= \frac{(8)(\cancel{3})\cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b}{(\cancel{3}) \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}}$$
Se descompone el 24 en (8)(3) y a^2 y b^2 en $a \cdot a$ y $b \cdot b$ respectivamente

$$= 8ab$$
Se simplifica numerador y denominador cancelando sus factores comunes

Por tanto $24a^2b^2 \div 3ab = \mathbf{8ab}$.

C

Para dividir un monomio entre otro:

1. Se expresa la división de monomios como una fracción.
2. Se descomponen los coeficientes del numerador y denominador de manera conveniente.
3. Se descomponen las partes literales del numerador y denominador en factores de exponente 1 si es necesario.
4. Se simplifican los factores comunes numéricos y literales que aparecen en el numerador y el denominador.

Ejemplo Efectúe las siguientes divisiones de monomios:

a) $20xy \div 5y$ b) $16a^2 \div 4a$ c) $-12a^2 \div 3a$ d) $15x^2 \div (-5x^2)$

a) $20xy \div 5y = \dfrac{20xy}{5y} = \dfrac{(4)(\cancel{5})x \cdot \cancel{y}}{\cancel{5}\cancel{y}} = 4x$

b) $16a^2 \div 4a = \dfrac{16a^2}{4a} = \dfrac{(4)(\cancel{4})\cancel{a} \cdot a}{\cancel{4}\cancel{a}} = 4a$

c) $-12a^2 \div 3a = \dfrac{-12a^2}{3a} = \dfrac{(-4)(\cancel{3})\cancel{a} \cdot a}{\cancel{3}\cancel{a}}$
$= -4a$

d) $15x^2 \div (-5x^2) = \dfrac{15x^2}{-5x^2} = \dfrac{(\cancel{5})(3)\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{-\cancel{5}\cancel{x} \cdot \cancel{x}}$
$= -3$

E

Efectúe las siguientes divisiones de monomios:

a) $10ab \div 2a$ b) $12x^2 \div 6x$ c) $50m^2 \div (-10m)$ d) $-15p^2 \div 3p^2$

Contenido 2: División de binomio por monomio

P

Efectúe las divisiones indicadas.

a) $(4x-12y)\div 4$ b) $(-15x+18xy)\div 3x$

Recuerde que:
$$\frac{x+y}{a}=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$$

S

a)
$$(4x-12y)\div 4=\frac{4x-12y}{4}$$ Se expresa la división como fracción

$$=\frac{4x}{4}-\frac{12y}{4}$$ Se divide cada término del numerador por el denominador común

$$=\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}-\frac{(\cancel{4})(3)y}{\cancel{4}}$$ Se descompone 12

$$=x-3y$$ Se simplifica

b)
$$(-15x+18xy)\div 3x=\frac{-15x+18xy}{3x}$$ Se expresa la división como fracción

$$=\frac{-15x}{3x}+\frac{18xy}{3x}$$ Se divide cada término del numerador por el denominador común

$$=\frac{(-\cancel{3})(5)\cancel{x}}{\cancel{3}\cancel{x}}+\frac{(\cancel{3})(6)\cancel{x}y}{\cancel{3}\cancel{x}}$$ Se descompone -15 y 18

$$=-5+6y$$ Se simplifica

C

Para dividir un binomio por un monomio:

1. Se expresa la división como una fracción, cuyo numerador es el binomio dado y denominador el monomio divisor.
2. Se expresa la fracción anterior como una suma o diferencia de fracciones con igual denominador.
3. En cada fracción se lleva acabo la división de un monomio por otro.
4. Se escribe la suma o diferencia de fracciones simplificadas.

Ejemplo Efectúe la división de binomio por monomio indicada $(9x^2y-18y)\div(-3y)$.

Para efectuar $(9x^2y-18y)\div(-3y)$ se siguen los pasos de la conclusión anterior.

$$(9x^2y-18y)\div(-3y)=\frac{9x^2y-18y}{-3y}=\frac{9x^2y}{-3y}-\frac{18y}{-3y}$$
$$=\frac{(\cancel{3})(3)x^2\cancel{y}}{-\cancel{3}\cancel{y}}-\frac{(6)(\cancel{3})\cancel{y}}{-\cancel{3}\cancel{y}}=-3x^2+6$$

E

Efectúe las siguientes divisiones de binomio por monomio:

a) $(16x-8y)\div 8$ b) $(20y^2+15y)\div(-10y)$

Contenido 3: División de trinomio por binomio

P

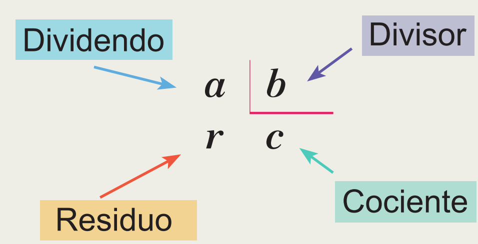
Efectúe la división indicada $(x^2+7x+12)\div(x+3)$.

S

La división se efectúa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
x^2 & + & 7x & + & 12 & x & + & 3 \\ \cline{6-8}
-x^2 & & -3x & & & x & + & 4 \\ \cline{1-5}
 & & 4x & + & 12 & & & \\
 & & -4x & - & 12 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Recuerde



Entonces, la división da como resultado **el cociente $x+4$ y residuo cero.**

C

Para dividir un trinomio entre un binomio se siguen los siguientes pasos:

1. Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor. El resultado es el primer término del cociente y se escribe debajo del divisor.
2. Se multiplica el término obtenido en el paso anterior por el divisor, se escribe el producto debajo del dividendo y se resta de este.
3. Se repiten los pasos 1 y 2 hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo Efectúe la división indicada $(x^2-9x+20)\div(x-4)$.

La división se realiza siguiendo los pasos de la conclusión.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
x^2 & - & 9x & + & 20 & x & - & 4 \\ \cline{6-8}
-x^2 & + & 4x & & & x & - & 5 \\ \cline{1-5}
 & & -5x & + & 20 & & & \\
 & & 5x & - & 20 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Entonces, la división da como resultado **el cociente $x-5$** y **residuo cero.**

E

Efectúe las siguientes divisiones de trinomio por binomio:

a) $(x^2+13x+30)\div(x+3)$ b) $(6x^2-7x-20)\div(2x-5)$ c) $(12x^2-x-6)\div(3x+2)$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 3

1. Efectúe las siguientes divisiones de monomios:

a) $25xy \div 5x$ b) $-24y^2 \div 6y$ c) $6x^2 \div (-3x)$ d) $-15y^2 \div (-3y^2)$

e) $30xy \div 10y$ f) $-32x^2 \div 8x$ g) $14y^2 \div (-7y)$ h) $-20x^2 \div 5x^2$

2. Efectúe las siguientes divisiones de binomio por monomio:

a) $(18x^2 - 10x) \div 2$ b) $(21x^2 + 15x) \div (-3x)$ c) $(-12x^2 - 8x) \div (-2x)$

3. Efectúe las siguientes divisiones de trinomio por binomio:

a) $(x^2 + 7x + 10) \div (x + 2)$ b) $(14x^2 - 34x + 12) \div (2x - 4)$

Unidad 2

Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Sección 1: Ecuaciones de primer grado

Contenido 1: Ecuaciones de la forma $x+b=c$ y $ax=c$

P1

Dadas las ecuaciones

a) $x+7=13$ b) $3x=6$ c) $x-5=3$

Encuentre por simple inspección el respectivo valor de x que las satisface.

A $ax+b=c$, $a\neq 0$, se le llama **ecuación de primer grado en la variable x.**

S1

a) $6+7=13$, por tanto $x=6$

b) $(3)(2)=6$, por tanto $x=2$

c) $8-5=3$, por tanto $x=8$

Solución de una ecuación de primer grado es el valor de x que satisface la igualdad.

P2

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+5=7$

b) $x-4=3$

c) $4x=12$

Resolver una ecuación de primer grado significa encontrar su solución.

S2

a) Transponiendo el 5 se obtiene:

$x+5=7$

$x=7-5$

$\boldsymbol{x=2}$

b) Transponiendo el -4 se obtiene:

$x-4=3$

$x=3+4$

$\boldsymbol{x=7}$

c) Se divide por 4:

$4x=12$

$\dfrac{4x}{4}=\dfrac{12}{4}$

$\boldsymbol{x=3}$

C

Para resolver una ecuación de primer grado:

- Si es de la forma $x+b=c$ se transpone el término sin variable al lado derecho. El valor de x resultará de la reducción numérica hecha en el lado derecho.
- Si es de la forma $ax=b$, con $a\neq 0$, se dividen ambos lados de la ecuación por a, obteniendo el valor de la variable.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+6=10$ b) $x-3=2$ c) $4x=24$ d) $x-2=8$

e) $10x=50$ f) $x+9=4$ g) $x-8=-1$ h) $-2x=6$

Contenido 2: Ecuaciones de la forma $ax+b=c$ con $a\neq 0$, 1

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $3x+2=14$ b) $4x-3=17$ c) $-3x+5=8$ d) $-5x-8=-13$

S

a) Se transpone 2, y luego se divide por 3:

$$3x+2=14$$
$$3x=14-2$$
$$3x=12$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$$
$$\boldsymbol{x=4}$$

b) Se transpone -3, y luego se divide por 4:

$$4x-3=17$$
$$4x=17+3$$
$$4x=20$$
$$\frac{4x}{4}=\frac{20}{4}$$
$$\boldsymbol{x=5}$$

c) Se transpone 5, y luego se divide por -3:

$$-3x+5=8$$
$$-3x=8-5$$
$$-3x=3$$
$$\frac{-3x}{-3}=\frac{3}{-3}$$
$$\boldsymbol{x=-1}$$

d) Se transpone -8, y luego se divide por -5:

$$-5x-8=-13$$
$$-5x=-13+8$$
$$-5x=-5$$
$$\frac{-5x}{-5}=\frac{-5}{-5}$$
$$\boldsymbol{x=1}$$

C

Una ecuación de la forma $ax+b=c$ con $a\neq 0$, 1, se resuelve de la siguiente manera:

1. Se transpone b al lado derecho de la ecuación teniendo $ax=c-b$.
2. Se divide ambos lados de la ecuación $ax=c-b$ por a resultando el valor de la variable $x=\dfrac{c-b}{a}$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $2x+5=11$ b) $5x-3=12$ c) $-4x+1=9$ d) $-3x-2=-8$

e) $6x+1=7$ f) $3x-5=10$ g) $-7x+8=22$ h) $-5x-6=9$

Contenido 3: Ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Marcos tiene en su refrigeradora 10 frutas entre bananos y naranjas.

a) ¿Qué cantidades son desconocidas?, ¿Cómo se representan?

b) Escriba la igualdad que representa la expresión:

La suma de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas es igual a 10.

Una **cantidad desconocida** se representa con una letra.

S

a) Se desconoce cuántos bananos y cuántas naranjas hay en la refrigeradora.

Se pueden representar estas cantidades desconocidas utilizando las letras x y y:
Cantidad de bananos: x
Cantidad de naranjas: y

b) La igualdad que representa el enunciado "la suma de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas es igual a 10", es: $x+y=10$.

Este tipo de igualdad se llama **ecuación de primer grado con dos variables.**

C

La igualdad $ax+by=c$ donde a, b y c son constantes y a, b no son cero simultáneamente y las letras x y y representan cantidades desconocidas, se llama **ecuación de primer grado con dos variables**.

Ejemplo

Siguiendo la misma idea del problema anterior: si el doble de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas suman 12 frutas, ¿Cuál es la ecuación que representa esta expresión?

Doble cantidad de bananos: $2x$
Cantidad de naranjas: y
La ecuación que representa la expresión es:

$$2x+y=12.$$

E

Exprese los siguientes enunciados mediante una ecuación de primer grado con las variables x y y.

a) Julio tiene 13 frutas entre melones y sandías.

b) La suma de la edad de Luis con la de Francis es 18 años.

c) El triple de la cantidad de lapiceros más la cantidad de cuadernos que tiene Juan es 20.

d) Carlos pagó C$ 700 por la compra de dos camisas y un pantalón.

e) El costo de tres lapiceros y dos cuadernos es C$ 70.

Contenido 4: Solución de ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Complete la tabla sabiendo que $2x+y=12$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

S

Al sustituir cada valor de x en la ecuación, se obtiene el valor respectivo de y:

Para $x=0$

$$\begin{aligned}(2)(0)+y&=12\\ 0+y&=12\\ y&=12\end{aligned}$$

Para $x=1$

$$\begin{aligned}(2)(1)+y&=12\\ 2+y&=12\\ y&=10\end{aligned}$$

⋯

Para $x=6$

$$\begin{aligned}(2)(6)+y&=12\\ 12+y&=12\\ y&=0\end{aligned}$$

La tabla completa es:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	**12**	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**	**0**

Cada par de números (0, 12), (1, 10), (2, 8), etc., satisface la ecuación $2x+y=12$, por ejemplo (6, 0), es solución de esta porque $(2)(6)+0=12$.

C

Se llama **solución de la ecuación** $ax+by=c$ a todo par ordenado de números (x, y) que satisface dicha ecuación.

Ejemplo

Verifique que el par ordenado $(5, 2)$ es solución de $2x+y=12$.

Al sustituir $x=5$ y $y=2$ en $2x+y$, resulta

$$(2)(5)+2=10+2=12$$

En consecuencia, el par ordenado $\mathbf{(5, 2)}$ **es solución** de $2x+y=12$.

E

a) Complete la tabla sabiendo que $x+y=10$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

b) Muestre que un par ordenado de la tabla completada es solución de la ecuación dada.

Contenido 5: Concepto y solución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Encuentre la solución que tienen en común las ecuaciones $x+y=10$ y $2x+y=12$, haciendo uso de las tablas del contenido anterior.

S

Tabla de $x+y=10$

x	0	1	**2**	3	4	5	6
y	10	9	**8**	7	6	5	4

Tabla de $2x+y=12$

x	0	1	**2**	3	4	5	6
y	12	10	**8**	6	4	2	0

Puede verse que el par ordenado **(2, 8)** es la solución que tienen en común las dos ecuaciones.

C

Una colección de dos ecuaciones de primer grado con dos variables se llama **sistema de ecuaciones de primer grado**, y el par ordenado de números que satisface a ambas ecuaciones recibe el nombre de **solución del sistema.**

Representación de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$$

Ejemplo Verifique que el par ordenado $(2,\ 8)$ es la solución del sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

Al sustituir $x=2$ y $y=8$, en los lados izquierdos de las ecuaciones, se obtiene:

$$x+y=2+8=10$$

$$2x+y=(2)(2)+8=4+8=12$$

El par ordenado $\mathbf{(2,\ 8)}$ es la solución.

E

Verifique cuál de los siguientes pares ordenados $(4,\ 3)$, $(-1,\ 4)$ y $(2,\ 1)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+3=10$

b) $2x-3=5$

c) $3x+2=8$

2. Complete la tabla sabiendo que $3x+y=12$.

x	0	1	2	3	4
y					

3. Verifique que el par ordenado a la derecha de cada sistema de ecuaciones es su solución.

a) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+2y=0 \end{cases}$ $(12, -6)$

b) $\begin{cases} 3x+7y=16 \\ 11x-7y=12 \end{cases}$ $\left(2, \frac{10}{7}\right)$

Sección 2: Método de sustitución

Contenido 1: Sistemas con una variable despejada en una de las ecuaciones

P

El doble de la edad de Luis más la edad de Carlos es 11 años. Si Carlos es dos años mayor que Luis, encuentre las edades de Luis y Carlos respectivamente.

S

Edad de Luis: x años
Edad de Carlos: y años

Se forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y=11 & ① \\ y=x+2 & ② \end{cases}$

Una variable que está aislada en un lado de la igualdad, se dirá que está despejada.

1. Se sustituye $y=x+2$ en ①, y se resuelve la ecuación de primer grado obtenida:

$$\begin{aligned} 2x+(x+2)&=11 \\ 3x+2&=11 \\ 3x&=11-2 \\ \frac{3x}{3}&=\frac{9}{3} \\ x&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+y&=11 \\ y&=x+2 \\ 2x+(x+2)&=11 \end{aligned}$$

2. Se sustituye $x=3$ en ② para encontrar el valor de y:

$$y=3+2=5$$

Edad de Luis: 3 años Edad de Carlos: 5 años

C

La solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables en las que una de ellas aparece despejada, se encuentra así:

1. Se sustituye la expresión de la variable despejada en la otra ecuación, y se resuelve esta en la otra variable.
2. Se sustituye el valor encontrado en el paso 1., en la ecuación con la variable despejada y se efectúan las operaciones indicadas. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

Este método se conoce como **método de sustitución**.

Ejemplo Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x+y=20 & ① \\ x=y+4 & ② \end{cases}$

1. Se sustituye $x=y+4$ en ① y se encuentra la solución de la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} 3(y+4)+y&=20 \\ 3y+12+y&=20 \\ 4y&=8 \\ \frac{4y}{4}&=\frac{8}{4} \\ y&=2 \end{aligned}$$

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar su solución.

2. Se sustituye $y=2$ en ②:

$$x=2+4=6$$

El par ordenado **(6, 2)** es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+y=13 \\ y=x+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=13 \\ x=y+2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+5y=18 \\ x=y-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=x-3 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$

Contenido 2: Sistemas de dos ecuaciones sin ninguna variable despejada

P

Resuelva el sistema despejando la variable y en una de las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x+y=20 & ① \\ x-y=4 & ② \end{cases}$$

S

1. Se transpone $2x$ en la ecuación ①:

$$y=20-2x \qquad ③$$

2. Se sustituye $y=20-2x$ en ② y se resuelve la ecuación resultante:

$$2x+y=20$$
$$y=20-2x$$

$$\begin{aligned} x-(20-2x)&=4 \\ x-20+2x&=4 \\ x+2x&=4+20 \\ 3x&=24 \\ \frac{3x}{3}&=\frac{24}{3} \\ x&=8 \end{aligned}$$

3. Se sustituye $x=8$ en ③:

$$y=20-(2)(8)=20-16=4$$

El par ordenado **(8, 4)** es la solución del sistema.

C

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables donde ninguna de estas aparece despejada se resuelve de la siguiente manera:

1. Se despeja una de las variables en la ecuación más conveniente.
2. Se sustituye la expresión de la variable despejada en la otra ecuación y se resuelve la ecuación obtenida.
3. Se sustituye el valor encontrado en el paso 2., en la ecuación con la variable despejada y se efectúan las operaciones indicadas. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

Este es un método más general de sustitución.

E

Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-7y=20 \\ x-3y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

Sección 3: Método de reducción

Contenido 1: Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes opuestos

P

Resuelva el sistema sin utilizar el método de sustitución.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 & ① \\ x - y = 4 & ② \end{cases}$$

S

1. Se suman las ecuaciones ① y ②, para eliminar la variable y y se resuelve la ecuación en x.

$$\begin{array}{rrcl} & 2x + y &=& 20 \quad ① \\ +) & x - y &=& 4 \quad ② \\ \hline & 3x &=& 24 \end{array}$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

$$x = 8$$

2. Se sustituye $x = 8$ en ① y se resuelve para y:

$$\begin{aligned} (2)(8) + y &= 20 \\ 16 + y &= 20 \\ y &= 20 - 16 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

El par ordenado **(8, 4)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, donde una de estas aparece con coeficientes opuestos, se procede así:

1. Se suman las ecuaciones lado a lado para eliminar una variable y se resuelve la ecuación que resulta en la otra variable.
2. Se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema el valor encontrado en 1., y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

Este procedimiento se conoce como **método de reducción.**

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = 20 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ -5x + 3y = 0 \end{cases}$

Contenido 2: Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes iguales

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+5y=12 & ① \\ 2x+\ \ y=\ 4 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por -1 ambos lados de la ecuación ② para que los coeficientes de x sean opuestos.

$$-2x-y=-4 \qquad ③$$

$(-1)(2x+y)=(-1)(4)$
$-2x-y=-4$

2. Se suman las ecuaciones ① y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+5y &=& 12 \quad ① \\ +) & -2x-\ \ y &=& -4 \quad ③ \\ \hline & 4y &=& 8 \end{array}$$

$$\frac{4y}{4}=\frac{8}{4}$$

$$y=2$$

3. Se sustituye $y=2$ en la ecuación ②:

$$2x+2=4$$

$$2x=4-2$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$$

$$x=1$$

También se puede sustituir $y=2$ en la ecuación ①.

El par ordenado **(1, 2)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, donde una de estas tiene coeficientes iguales, se efectúan los siguientes pasos:

1. Se multiplican por -1 los lados de una de las ecuaciones para lograr que una variable en ambas ecuaciones tenga coeficientes opuestos.
2. Se suma la ecuación que resulta en 1., con la que no se ha transformado y se resuelve la ecuación obtenida.
3. Se sustituye el valor encontrado en 2., en cualquiera de las ecuaciones del sistema original y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+4y=19 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$

Contenido 3: Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente -1

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} 4x+3y=15 & ① \\ 2x-\ \ y=\ 5 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por 3 ambos lados de la ecuación ② para tener un sistema de ecuaciones donde la variable y tenga coeficientes opuestos.

$$(3)(2x-y)=(3)(5)$$
$$6x-3y=15 \qquad ③$$

2. Se suman las ecuaciones ① y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrl} & 4x+3y=15 & ① \\ +) & 6x-3y=15 & ③ \\ \hline & 10x \qquad =30 & \end{array}$$
$$\frac{10x}{10}=\frac{30}{10}$$
$$x=3$$

3. Se sustituye $x=3$ en ① y se resuelve la ecuación resultante:

$$(4)(3)+3y=15$$
$$12+3y=15$$
$$3y=15-12$$
$$3y=3$$
$$y=1$$

El par ordenado **(3,1)** es la solución del sistema.

C

Un sistema de dos ecuaciones donde el coeficiente de una de las variables en una de las ecuaciones es -1, se resuelve así:

1. Se multiplica la ecuación que tiene la variable con coeficiente -1 por el coeficiente de la misma variable en la otra ecuación, para obtener un nuevo sistema de ecuaciones donde una misma variable tiene coeficientes opuestos.
2. Se suman las dos ecuaciones del nuevo sistema y se resuelve la ecuación resultante.
3. Se sustituye el valor encontrado en 2., en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y=17 \\ 2x-\ \ y=\ 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-\ \ y=\ 1 \\ 5x+3y=25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ -x+2y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x-4y=8 \\ 2x-\ \ y=5 \end{cases}$

Contenido 4: Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente 1

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} x+3y=9 & ① \\ 2x+9y=24 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por -2 ambos lados de la ecuación ① para tener un sistema de ecuaciones donde la variable x tenga coeficientes opuestos.

$$(-2)(x+3y)=(-2)(9)$$
$$-2x-6y=-18 \qquad ③$$

2. Se suman ③ y ② y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rr} & -2x-6y=-18 \quad ③ \\ +) & 2x+9y=\ \ 24 \quad ② \\ \hline & 3y=6 \\ & y=2 \end{array}$$

3. Se sustituye $y=2$ en ①:

$$\begin{aligned} x+(3)(2)&=9 \\ x+6&=9 \\ x&=9-6 \\ x&=3 \end{aligned}$$

El par ordenado **(3, 2)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones donde el coeficiente de una de las variables en una de las ecuaciones es 1, se concretan los pasos siguientes:

1. Se multiplica la ecuación que tiene la variable con coeficiente 1 por el opuesto del coeficiente de la misma variable en la otra ecuación, para obtener un nuevo sistema de ecuaciones donde una misma variable tiene coeficientes opuestos.
2. Se suman las dos ecuaciones del nuevo sistema y se resuelve la ecuación resultante.
3. Se sustituye el valor encontrado en 2., en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x+8y=27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x+2y=26 \\ 3x+y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x+3y=-8 \\ x-5y=-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 7x-4y=5 \end{cases}$

Contenido 5: Sistemas de dos ecuaciones donde todos los coeficientes de las variables no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ±1

P

Resuelva el sistema eliminando la variable y.

$$\begin{cases} 2x+3y=13 & ① \\ 5x-2y=4 & ② \end{cases}$$

S

1. Se multiplica por 2 ambos lados de la ecuación ①:

$$(2)(2x+3y)=(2)(13)$$
$$4x+6y=26 \qquad ③$$

2. Se multiplica por 3 la ecuación ②:

$$(3)(5x-2y)=(3)(4)$$
$$15x-6y=12 \qquad ④$$

3. Se suman las ecuaciones ③ y ④ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrcl} & 4x+6y & = & 26 \quad ③ \\ +) & 15x-6y & = & 12 \quad ④ \\ \hline & 19x & = & 38 \\ & x & = & 2 \end{array}$$

4. Se sustituye $x=2$ en ①:

$$(2)(2)+3y=13$$
$$4+3y=13$$
$$3y=13-4$$
$$y=3$$

Por lo tanto, el par ordenado **(2, 3)** es la solución del sistema.

Otra manera

$$\begin{array}{rrcll} & 10x+15y & = & 65 & 5\times ① \\ +) & -10x+4y & = & -8 & (-2)\times ② \\ \hline & 19y & = & 57 & \\ & y & = & 3 & \end{array}$$

C

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, donde todos los coeficientes de estas no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ±1, se resuelve de la siguiente manera:

1. Se multiplica una ecuación por el opuesto del coeficiente que acompaña a la variable a eliminar en la otra ecuación.
2. Se multiplica la ecuación que no fue transformada, por el coeficiente que acompañaba a la variable a eliminar en la ecuación que se transformó en 1.
3. Se suman las ecuaciones obtenidas en los pasos 1. y 2., y se resuelve la ecuación resultante.
4. Se sustituye el valor encontrado en 3., en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-4y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x+3y=0 \\ 5x-4y=7 \end{cases}$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 2

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} y = x + 7 \\ x + 2y = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 8 - y \\ 3x + 7y = 36 \end{cases}$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + 5y = 50 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 9y = 29 \\ 2x + 9y = 19 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x + 3y = 9 \\ 4x - 5y = -8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 8x + 3y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 10y = 22 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

Sección 4: Sistemas de dos ecuaciones con paréntesis, fracciones y decimales

Contenido 1: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado que contienen paréntesis

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} 7x - 3y = 5 & ① \\ 4x + 3(y-1) = 14 & ② \end{cases}$

S

1. Se aplica la propiedad distributiva en ② y luego se transponen términos:

$$\begin{aligned} 4x + 3(y-1) &= 14 \\ 4x + 3y - 3 &= 14 \\ 4x + 3y &= 17 \quad ③ \end{aligned}$$

2. Se suman las ecuaciones ① y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrcl} & 7x - 3y & = & 5 \quad ① \\ +) & 4x + 3y & = & 17 \quad ③ \\ \hline & 11x \quad\quad & = & 22 \\ & x & = & 2 \end{array}$$

Se sustituye $x = 2$ en ③ para encontrar el valor de y:

$$\begin{aligned} (4)(2) + 3y &= 17 \\ 8 + 3y &= 17 \\ 3y &= 17 - 8 \\ 3y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

El par ordenado **(2, 3)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en el cual una de ellas contiene paréntesis se procede así:

1. Se eliminan los paréntesis en esta ecuación utilizando la propiedad distributiva y luego se transponen términos.
2. Se resuelve el sistema formado por la ecuación obtenida en el paso 1., y la ecuación sin paréntesis del sistema inicial.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 5x + 2(y+4) = 30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x + 2y = -1 \\ 5(x+2) + 3y = 46 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 3(x+y) - 2y = 9 \end{cases}$

Contenido 2: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 7 & ① \\ 3x - 2y = 4 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica la ecuación ① por el mínimo común múltiplo de 2 y 4, es decir por 4, para eliminar denominadores:

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)(4) = (7)(4)$$

$$x + 2y = 28 \qquad ③$$

2	4		2
1	2		2
	1		

$mcm\,(2,\ 4) = (2)(2) = 4$

2. Se suman las ecuaciones ② y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrl} & 3x - 2y = 4 & ② \\ +) & x + 2y = 28 & ③ \\ \hline & 4x \qquad = 32 & \\ & x = 8 & \end{array}$$

Se sustituye $x = 8$ en ③ para encontrar el valor de y:

$$8 + 2y = 28$$
$$2y = 20$$
$$y = 10$$

El par ordenado **(8, 10)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en el que una de ellas tiene coeficientes fraccionarios, se procede así:

1. Se multiplica esta ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes para obtener una ecuación con coeficientes enteros.
2. Se resuelve el sistema formado por la ecuación obtenida en el paso 1., y la ecuación con coeficientes enteros del sistema inicial.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado:

a) $\begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \\ 3x - 2y = 22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ x + 9y = 42 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 3 \\ x = y - 2 \end{cases}$

Contenido 3: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 & ① \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}9 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por 10 la ecuación ② para obtener otra con coeficientes enteros:

$$(10)(0{,}2x + 0{,}5y) = (10)(0{,}9)$$

$$2x + 5y = 9 \qquad ③$$

2. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones ① y ③.

   Se multiplica por -2 la ecuación ①:

$$-2x - 4y = -8 \qquad ④$$

3. Se suman las ecuaciones ③ y ④:

$$\begin{array}{rrl} & 2x + 5y = 9 & ③ \\ +) & -2x - 4y = -8 & ④ \\ \hline & y = 1 & \end{array}$$

4. Se sustituye $y = 1$ en ① y se resuelve para x:

$$x + (2)(1) = 4$$
$$x + 2 = 4$$
$$x = 2$$

La solución del sistema es el par ordenado **(2, 1)**.

C

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado en el que una ecuación tiene coeficientes decimales, se resuelve así:

1. Se multiplica esta ecuación por 10 si el mayor número de cifras decimales de los coeficientes es uno, por 100 si el mayor número de cifras decimales es dos, y así sucesivamente.
2. Se resuelve el sistema formado por la ecuación obtenida en el paso 1., y la ecuación del sistema inicial que no tiene coeficientes decimales.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 0{,}4x + 0{,}3y = 1{,}8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}2y = 2{,}9 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0{,}5x + 0{,}2y = 0{,}3 \end{cases}$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 3

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+5(y+1)=39 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x+2y=-3 \\ -7(x+2)+3y=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-2y=14 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=10 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0{,}3x-0{,}2y=1{,}9 \\ x-2y=-7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0{,}4x-0{,}5y=0{,}2 \\ x+5y=13 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2(x+2)+5y=60 \\ x=y+7 \end{cases}$

Sección 5: Aplicaciones de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado

Contenido 1: Aplicación de los sistemas de ecuaciones de primer grado (1)

P

Por la compra de dos pantalones y tres camisas se pagan C$ 1 200. Sabiendo que el costo de un pantalón excede en C$ 100 al de una camisa, ¿cuál es el costo de cada artículo?

S

Costo de un pantalón: x
Costo de una camisa: y

Se forma el sistema $\begin{cases} 2x+3y=1\,200 & ① \\ x-y=100 & ② \end{cases}$

y se resuelve aplicando el método de reducción, para eso se multiplica por 3 ambos lados de la ecuación ②

$$(3)(x-y)=(3)(100)$$
$$3x-3y=300 \qquad ③$$

Se suman las ecuaciones ① y ③:

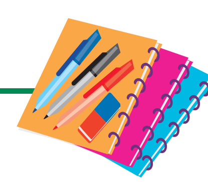
$$\begin{array}{rrcl} & 2x+3y & = & 1\,200 \quad ① \\ +) & 3x-3y & = & 300 \quad ③ \\ \hline & 5x & = & 1\,500 \\ & x & = & 300 \end{array}$$

Se sustituye $x=300$ en ② para encontrar el valor de y:

$$\begin{aligned} 300-y &= 100 \\ -y &= 100-300 \\ -y &= -200 \\ y &= 200 \end{aligned}$$

El costo de un pantalón es **C$ 300** y el de una camisa es **C$ 200**.

E



Resuelva los siguientes problemas:

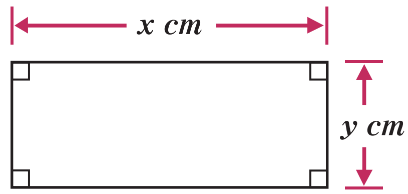
a) Por la compra de tres marcadores y un borrador se pagaría C$ 78, pero si se compraran dos marcadores y un borrador se tendría que pagar C$ 58. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

b) Un estudiante paga C$ 100 por la compra de dos artículos escolares. Sabiendo que el costo de un artículo excede en C$ 60 al otro, ¿Cuál es el valor de cada uno?

Contenido 2: Aplicación de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado (2)

P

En un rectángulo cuyo perímetro es 70 cm, el doble de la base excede en 20 cm al triple de la altura. ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura?



S

Medida de la base: x cm
Medida de la altura: y cm

El sistema es $\begin{cases} 2x+2y=70 & ① \\ 2x-3y=20 & ② \end{cases}$

Para resolverlo se utiliza el método de reducción.

Se multiplica por -1 la ecuación ②, y luego se suma a esta la ecuación ①:

$$\begin{array}{rrl} & 2x+2y=\ \ \ 70 & ① \\ +) & -2x+3y=-20 & (-1)\times ② \\ \hline & 5y=\ \ 50 & \\ & y=\ \ 10 & \end{array}$$

Se sustituye $y=10$ en ② para encontrar el valor de x:

$$\begin{aligned} 2x-(3)(10)&=20 \\ 2x-30&=20 \\ 2x&=30+20 \\ 2x&=50 \\ x&=25 \end{aligned}$$

La base del rectángulo mide **25 cm** y la altura **10 cm**.

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) El perímetro de un rectángulo es 14 cm. Si la base excede en 1 cm a la altura, ¿cuáles son las medidas de la base y la altura?

b) El perímetro de un terreno rectangular es 60 m. Si el triple de la base es el doble de la altura, ¿cuáles son las medidas de la base y la altura?

Desafío

Método de reducción de sistemas de tres ecuaciones con tres variables (1)

P1

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=27 & ① \\ y+z=30 & ② \\ x+z=33 & ③ \end{cases}$

S1

Para eliminar z se resta a la ecuación ③ la ecuación ②.

Al restar al lado izquierdo de ③ el lado izquierdo de ② se obtiene: $(x+z)-(y+z)=x-y$, mientras que la diferencia entre los lados derechos respectivos es $33-30=3$.

De lo anterior se obtiene la ecuación

$$x-y=3 \qquad ④$$

Con las ecuaciones ① y ④ se forma el sistema:

$$\begin{cases} x+y=27 & ① \\ x-y=\ \ 3 & ④ \end{cases}$$

Se suman las ecuaciones ① y ④ y se obtiene:

$$2x=30$$
$$x=15$$

Se sustituye este valor en ① y ③, resultando que:

$$15+y=27 \qquad \text{y} \qquad 15+z=33$$
$$y=12 \qquad\qquad\qquad z=18$$

Por lo tanto, la solución del sistema es **(15, 12, 18)**.

C

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables, este se reduce a un sistema de dos ecuaciones con dos variables, eliminando alguna de las tres variables. Se resuelve este sistema y los valores obtenidos se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones del sistema original, para obtener el valor de la variable restante.

Desafío

Método de reducción de sistemas de tres ecuaciones con tres variables (2)

P_2

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=6 & ① \\ 3x-2y+z=2 & ② \\ 2x+2y-2z=0 & ③ \end{cases}$

S_2

Eliminando la variable z se tiene:

$$\begin{array}{rrcrl} & x+y+z & = & 6 & ① \\ (-1)\times ② & -3x+2y-z & = & -2 & ④ \\ \hline ①+④ & -2x+3y & = & 4 & ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrl} 2\times ② & 6x-4y+2z & = & 4 & ⑥ \\ & 2x+2y-2z & = & 0 & ③ \\ \hline ⑥+③ & 8x-2y & = & 4 & ⑦ \end{array}$$

Luego, se forma el sistema:

$$\begin{cases} -2x+3y=4 & ⑤ \\ 8x-2y=4 & ⑦ \end{cases}$$

Se multiplica por 4 la ecuación ⑤:

$$-8x+12y=16 \quad ⑧$$

Se suman ⑧ y ⑦ y se obtiene:

$$\begin{array}{r} -8x+12y=16 \\ 8x-2y=4 \\ \hline 10y=20 \\ y=2 \end{array}$$

Se sustituye $y=2$ en la ecuación ⑦ para encontrar el valor de x:

$$\begin{aligned} 8x-4&=4 \\ 8x&=8 \\ x&=1 \end{aligned}$$

Se sustituye $x=1$ y $y=2$ en la ecuación ①:

$$\begin{aligned} 1+2+z&=6 \\ z&=3 \end{aligned}$$

La solución del sistema es **(1, 2, 3)**.

Desafío

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado:

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-z=5 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$

Unidad 3

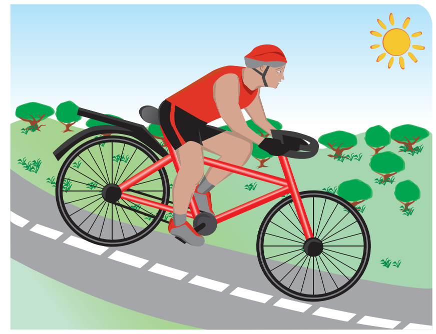
Funciones de Primer Grado

Sección 1: Función de primer grado

Contenido 1: Función de la forma $y=ax$

P

Un ciclista sale de un parque y avanza 3 m cada segundo. Sabiendo que y es la distancia recorrida después de x segundos:



a) Complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

Describa la relación que existe entre los valores de x y y.

b) Escriba la función que muestra la correspondencia entre los valores de x y y.

S

a) Puesto que el ciclista avanza 3 m cada segundo, se puede calcular los valores de y segundo a segundo partiendo de los valores iniciales $x=0$ y $y=0$ sumando 3 unidades a y cada vez que x aumenta una unidad. Así, para $x=0$, 1, 2, ..., 8 los valores correspondientes de y son:

$$0,\quad 0+3=3,\quad 3+3=6,\quad 6+3=9,\quad 9+3=12,$$
$$12+3=15,\quad 15+3=18,\quad 18+3=21,\quad 21+3=24$$

De esta manera se completa la tabla:

x (*tiempo*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (*distancia*)	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**

x 3

y se observa que cada valor de y es el triple del valor de x.

b) La función que muestra la correspondencia entre las variables x y y es $y=3x$.

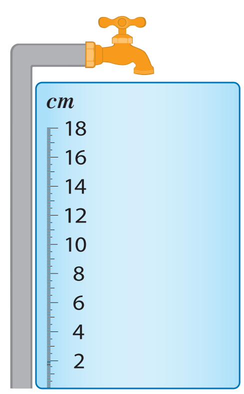
E

Al abrir un grifo para llenar un tanque, la altura del nivel del agua aumenta 2 cm cada minuto.

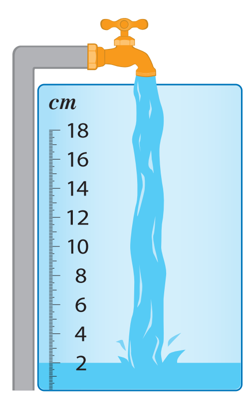
En la tabla, y representa la altura en cm del nivel del agua a los x minutos de haber abierto el grifo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**

Exprese y como una función en x.



En el minuto 0



En el minuto 1

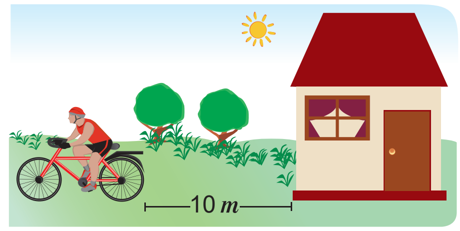
Contenido 2: Definición de función de primer grado

P

Un ciclista sale de un punto que se encuentra a 10 m de su casa, y se aleja 3 m cada segundo. Si y es la distancia a la que se encuentra de su casa después de x segundos:

a) Complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									



b) Determine la función que representa la correspondencia entre los valores de x y y.

S

a) En cualquier punto del recorrido la distancia a la casa es igual a la distancia recorrida más la distancia inicial de 10 m. Luego, para los valores dados de x se tiene:

Tiempo	Distancia recorrida	Distancia a la casa
$x=0$	$(3)(0)$	$(3)(0)+10=10$
$x=1$	$(3)(1)$	$(3)(1)+10=13$
⋮	⋮	⋮
$x=8$	$(3)(8)$	$(3)(8)+10=34$

La totalidad de los resultados se muestra en la tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	**10**	**13**	**16**	**19**	**22**	**25**	**28**	**31**	**34**

b) Se observa que cada valor de y se obtiene multiplicando por 3 el valor asignado a x y sumando 10 a este producto, es decir $y=3x+10$.

C

Si y es una función de x que se representa como

$$y=ax+b, \quad \text{con } a, b \text{ constantes y } a\neq 0$$

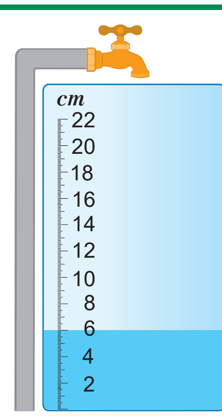
se dice que y es una **función de primer grado o función lineal** en x.

E

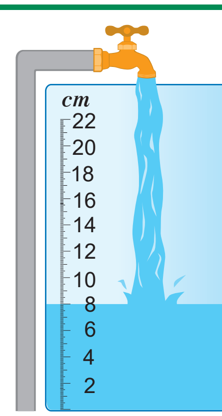
El nivel del agua en un tanque es de 6 cm respecto del fondo y aumenta 2 cm cada minuto si se abre el grifo. En la tabla, y representa la altura que alcanza el nivel del agua a los x minutos de abrir el grifo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**

Exprese y como una función de primer grado en x.



En el minuto 0



Al concluir 1 minuto

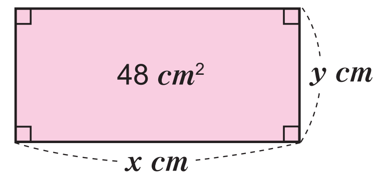
Contenido 3: Relación entre proporcionalidad y función de primer grado

P1

Sabiendo que un rectángulo tiene un área igual a 48 cm^2:

a) Exprese su altura y (en cm) en función de su base x (en cm). ¿Qué tipo de proporcionalidad hay entre las variables x y y?

b) ¿Es y una función de primer grado en x?



S1

a) Como x es la base y y la altura del rectángulo de la figura, entonces:

$$48 = xy$$

$$xy = 48$$

Por tanto,

$$y = \frac{48}{x}$$

y las variables x y y son inversamente proporcionales.

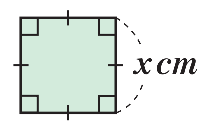
El área de un rectángulo es el producto de su base por la altura.

b) Se observa que x está como denominador, por lo cual la expresión para y no es una función de primer grado.

P2

a) Exprese el perímetro y (en cm) de un cuadrado en función de su lado x (en cm). ¿Qué tipo de proporcionalidad hay entre las variables x y y?

b) ¿Es y una función de primer grado en x?



S2

a) El perímetro del cuadrado de la figura es cuatro veces la longitud x de su lado, es decir

$$y = 4x$$

luego $\frac{y}{x} = 4$, por tanto las variables x y y son directamente proporcionales con una constante de proporcionalidad igual a 4.

b) En efecto, $y = 4x$ es una función de primer grado, donde $b = 0$.

C

La función de primer grado $y = ax$ expresa la proporcionalidad directa entre las variables x y y, mientras que la función no lineal $y = \frac{a}{x}$ pone en evidencia la proporcionalidad inversa entre x y y.

En general, la función de primer grado $y = ax + b$ indica la suma de su parte proporcional ax y una constante b.

Parte proporcional

$$y = ax + b$$

Constante

E

Las expresiones siguientes indican que y es una función de x. Diga cuáles son funciones de primer grado y para las que lo sean muestre la parte proporcional a x y la constante.

a) $y = 3x$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = 4x + 1$ d) $y = 3 - 2x$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Las siguientes expresiones indican que y está en función de x. ¿Cuáles son funciones de primer grado?

   a) $y = -2x + 3$ b) $y = 1 + 3x$

   c) $y = \frac{5}{x}$ d) $y = \frac{3}{2}(x - 4)$

2. Identifique en cuáles de las siguientes situaciones y es una función de primer grado en x:

   a) La distancia y (en km) recorrida por una persona después de x horas, si su velocidad es 5 km por hora.

   b) El área y (en cm^2) de un cuadrado de lado x cm.

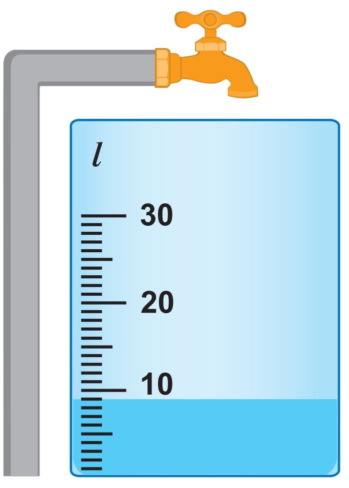
   c) La longitud y (en cm) de cada lado de un polígono regular de x lados y perímetro 20 cm.

3. Un tanque contiene 9 litros de agua (ver figura). Si se abre el grifo que vierte 3 litros de agua por minuto, y y es la cantidad de agua (en litros) que hay en el tanque después de x minutos:

   a) Complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

   b) Exprese y como una función de primer grado en x.



Sección 2: Gráfica de la función de primer grado

Contenido 1: Gráfica de las funciones de primer grado $y=ax$ y $y=ax+b$ por tabulación

P

Dadas las funciones $y=2x$ y $y=2x+1$.

a) Complete en la tabla los valores de $2x$ y $2x+1$ que corresponden a los valores dados de x.

x	-2	-1	0	1	2
$2x$					
$2x+1$					

b) Trace en el plano cartesiano las gráficas de las funciones dadas.

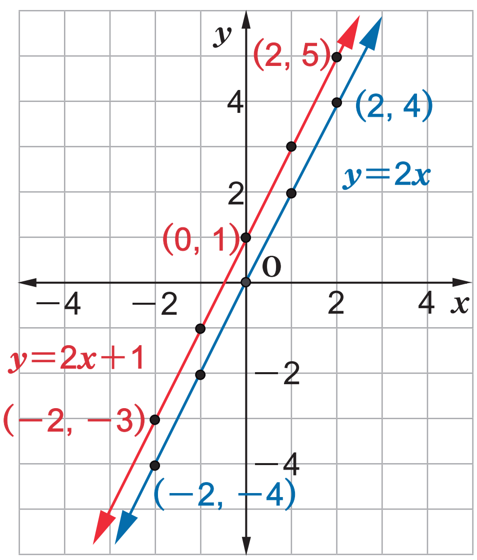
S

a) Cada valor de x se multiplica por 2, obteniendo como resultado $2x$, luego a este se le suma 1 para conseguir el valor de $2x+1$. Así resulta la tabla

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	**-4**	**-2**	**0**	**2**	**4**
$2x+1$	**-3**	**-1**	**1**	**3**	**5**

x 2

+1



b) Los puntos $(-2, -4)$, $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(2, 4)$ de la forma $(x, 2x)$ están en la recta con ecuación $y=2x$ que aparece en color azul en la figura de la derecha. La gráfica de $y=2x+1$ es la recta de color rojo que contiene los puntos $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(2, 5)$ de la forma $(x, 2x+1)$.

C

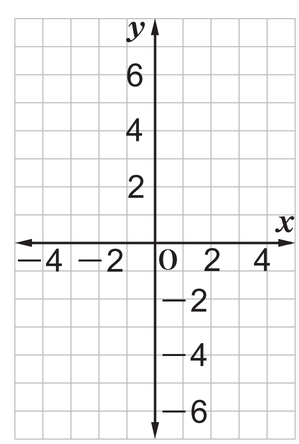
La **gráfica de una función de primer grado** $y=ax+b$, con $a\neq 0$ es una recta.

E

Dadas las funciones de primer grado $y=3x$ y $y=3x+1$.

a) Complete la tabla con los valores de $3x$ y $3x+1$ que corresponden a los valores dados de x.

x	-2	-1	0	1	2
$3x$					
$3x+1$					



b) Trace en el plano cartesiano las gráficas de las funciones dadas.

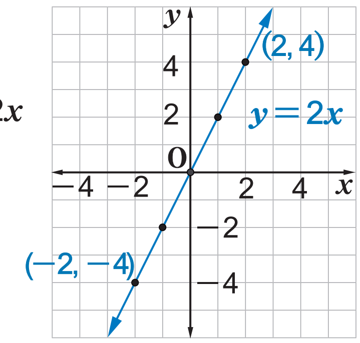
Contenido 2: Relación entre las gráficas de las funciones $y=ax+b$ y $y=ax$

P1

Trace la gráfica de $y=2x+1$ a partir de la gráfica de $y=2x$ que se muestra en la figura de la derecha.

En la siguiente tabla se muestran los valores que toman $y=2x$ y $y=2x+1$ que corresponden a los valores dados de x.

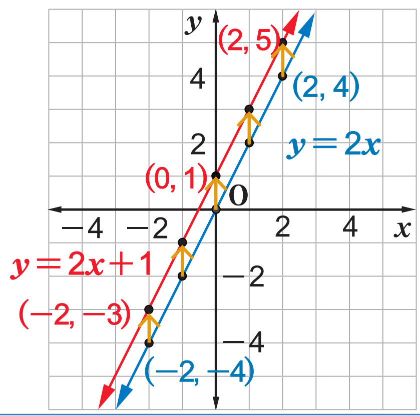
x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+1$	-3	-1	1	3	5



S1

Se observa que para un valor determinado de x, se tiene que $2x+1$ es una unidad mayor que $2x$. Esto significa que el punto $(x,\ 2x+1)$ se encuentra una unidad por encima del punto $(x,\ 2x)$ en la dirección vertical.

Por tanto, la gráfica de $y=2x+1$ se obtiene trasladando la gráfica de $y=2x$ una unidad hacia arriba, tal como se muestra a la derecha.



P2

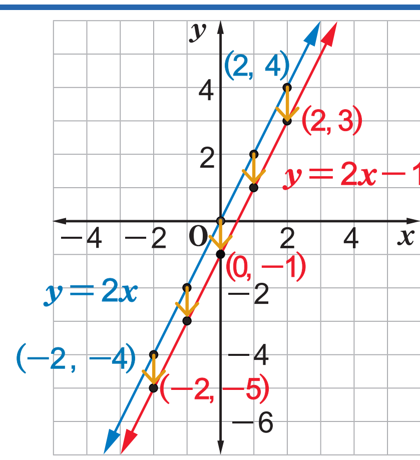
Trace la gráfica de $y=2x-1$ a partir de la gráfica de $y=2x$.

S2

Primero se traza la gráfica $y=2x$ y se obtiene la recta de color azul en la figura de la derecha.

Cada valor de $y=2x-1$ se halla restando 1 al valor de $y=2x$, esto significa que la gráfica de $y=2x-1$ se obtiene trasladando la gráfica de $y=2x$ una unidad hacia abajo.

En la figura se muestra en color rojo la gráfica de $y=2x-1$, obtenida a partir de la de $y=2x$.



C

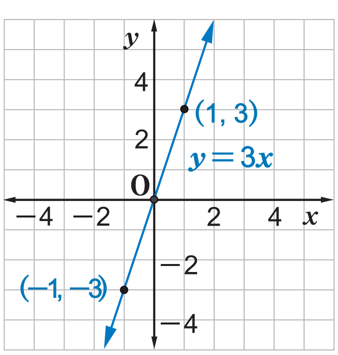
La gráfica de $y=ax+b$ se obtiene a partir de la gráfica de $y=ax$, trasladando a esta paralelamente b unidades hacia arriba si $b>0$, o $|b|$ unidades hacia abajo si $b<0$.

E

A partir de la gráfica de $y=3x$ mostrada a la derecha, trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=3x+2$

b) $y=3x-2$



Contenido 3: Razón de cambio

P

Dada la función de primer grado $y = 3x + 9$, la tabla muestra algunos valores de x y los valores que toma y en función de los valores de x.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	9	12	15	18	21	24	27	30	33

Cuando x varía de 0 a 2:

la variación de x es $2 - 0 = 2$

la variación de y es $15 - 9 = 6$

Calcule la variación del valor de y cuando:

a) x varía de 2 a 3
b) x varía de 3 a 6
c) En ambos incisos, ¿qué relación hay entre el valor de la variación de x y el valor de la variación de y?

S

a) Cuando x varía de 2 a 3

la variación de x es $3 - 2 = 1$
y la variación de $y = 3x + 9$, es $18 - 15 = 3$, según puede verse en las evaluaciones de la derecha.

x	2	3
y	15	18

Si $x = 2$, $y = (3)(2) + 9 = 15$
Si $x = 3$, $y = (3)(3) + 9 = 18$

b) Cuando x varía de 3 a 6 en $y = 3x + 9$,

la variación de x es $6 - 3 = 3$

la variación de $y = 3x + 9$, es $27 - 18 = 9$

x	3	...	6
y	18	...	27

Si $x = 6$, $y = (3)(6) + 9 = 27$

c) De los incisos a) y b) se tiene que:

$$\frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \frac{9}{3} = 3$$

En ambos casos, **la variación de los valores de y es el triple de la variación de los valores de x.**

C

En las funciones de primer grado $y = ax + b$, con $a \neq 0$, el cociente entre la variación de y y la variación de x es una constante que se llama **razón de cambio.**

$$\textbf{Razón de cambio} = \frac{\textbf{Variación de } y}{\textbf{Variación de } x}$$

E

Si $y = 3x + 9$, calcule la razón de cambio cuando:

a) x varía de 4 a 8.
b) x varía de 3 a 7.

Contenido 4: Razón de cambio de una función de primer grado

P

Dada la función $y=-2x+1$, calcule la razón de cambio cuando:

a) x varía de 2 a 5 b) x varía de -7 a -3

S

a) Si x varía de 2 a 5,

la variación de x es $5-2=3$

la variación de y es $-9-(-3)=-6$

Si $x=2$, $y=(-2)(2)+1=-3$
Si $x=5$, $y=(-2)(5)+1=-9$

Luego,

$$\textbf{Razón de cambio} = \frac{-6}{3} = -2$$

b) Cuando x varía de -7 a -3, se tiene:

la variación de x es $-3-(-7)=4$

la variación de y es $7-15=-8$

Si $x=-7$, $y=(-2)(-7)+1=15$
Si $x=-3$, $y=(-2)(-3)+1=7$

Por lo cual,

$$\textbf{Razón de cambio} = \frac{-8}{4} = -2$$

La razón de cambio en ambos casos coincide con el valor de la constante $a=-2$ que multiplica a la variable x en la expresión $y=-2x+1$.

C

Dada la función de primer grado $y=ax+b$, la razón de cambio para cualquier variación de x siempre coincide con la constante a.

$$\textbf{Razón de cambio} = \frac{\textbf{Variación de } y}{\textbf{Variación de } x} = a$$

Esta constante se llama razón de cambio de la función $y=ax+b$.

Ejemplo Identifique la razón de cambio de la función de primer grado $y=3x+2$.

La razón de cambio de la función $y=ax+b$ es a, así que la razón de cambio de la función $y=3x+2$ es 3.

E

Identifique la razón de cambio de cada una de las siguientes funciones de primer grado:

a) $y=3x-1$ b) $y=-5x+3$ c) $y=\frac{1}{2}x+4$ d) $y=-\frac{4}{3}x+6$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

E

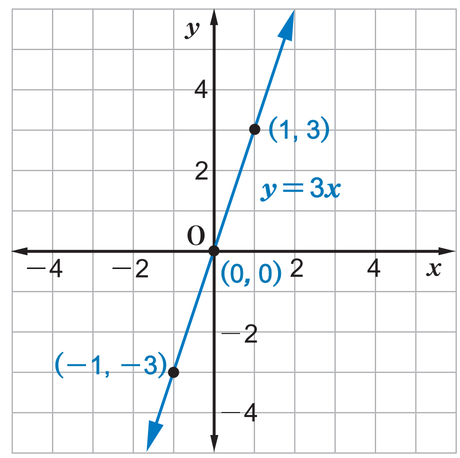
1. Trace la gráfica de las siguientes funciones auxiliándose de una tabla de valores:

   a) $y = 3x + 2$ b) $y = -2x + 3$

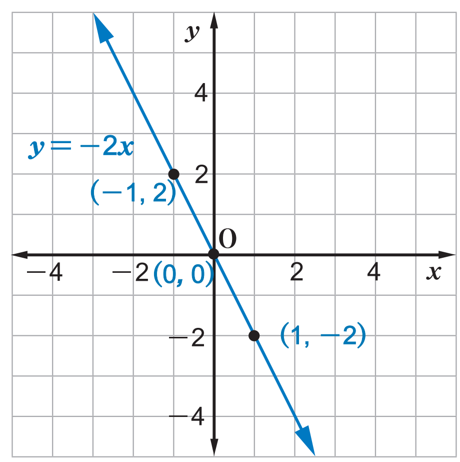
   c) $y = 3x - 1$ d) $y = -3x - 1$

2. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

   a) $y = 3x + 2$ a partir de la gráfica de $y = 3x$ que se muestra a la derecha.



   b) $y = -2x + 3$ a partir de la gráfica de $y = -2x$ que se muestra a la derecha.



3. Las dos gráficas del ejercicio anterior ya habían sido trazadas en 1. Señale cual de los métodos para graficarlas le ha resultado más fácil.

4. Identifique la razón de cambio de las siguientes funciones:

   a) $y = 3x + 2$ b) $y = -5x + 1$

   c) $y = 1 + 3x$ d) $y = \frac{3}{2}(x - 4)$

Contenido 6: Gráfica de $y=ax+b$ si $a>0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

P

Dada la función $y=2x+1$, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el intercepto de su gráfica con el eje y?

b) ¿Cuál es la razón de cambio de esta función?

c) ¿Cómo traza la gráfica de $y=2x+1$ utilizando el intercepto con y y su razón de cambio?

S

a) Los puntos del eje y tienen abscisa $x=0$.
Al sustituir este valor de x en $y=2x+1$, resulta

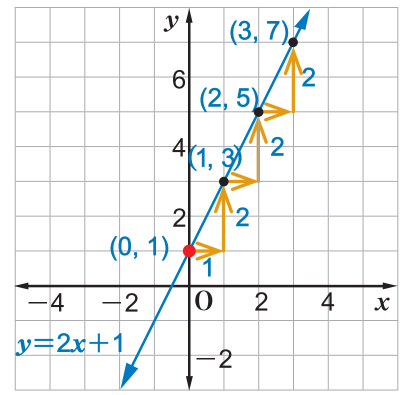
$$y=(2)(0)+1=1$$

Por lo tanto, el intercepto de la gráfica de $y=2x+1$ con el eje y es **(0, 1)**.

$y=ax+b$
↑
La razón de cambio

b) La razón de cambio de esta función es **2**.

c) Como la razón de cambio es 2, entonces y aumenta 2 unidades cada vez que x aumenta 1 unidad, luego, dado que (0, 1) es un punto de la gráfica, entonces $(0+1, 1+2) = (1, 3)$ también es un punto de ella.
La gráfica se construye trazando la recta que pasa por (0, 1) y (1, 3). Se muestra esta recta en la figura de la derecha. En la gráfica se observa que y aumenta 2 unidades cada vez que x aumenta una.



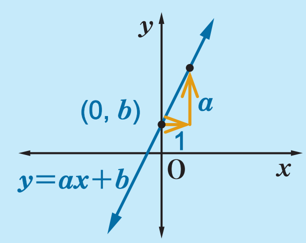
C

La función de primer grado $y=ax+b$, con $a>0$ tiene las siguientes características:

a) Su gráfica tiene intercepto con el eje y en $(\mathbf{0}, b)$.

b) La razón de cambio a de la función, se llama **pendiente** de la recta $y=ax+b$ y es la cantidad que aumenta y cuando x crece una unidad.

c) Los valores de y aumentan a medida que x también aumenta.

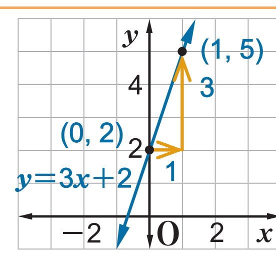


Ejemplo Trace la gráfica de $y=3x+2$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

En este caso $a=3$ y $b=2$, así que la pendiente es 3 y el intercepto con el eje y es $(0, 2)$.

Otro punto de la gráfica que se necesita es $(0+1, 2+3)=(1, 5)$.

Con esta información se obtiene la gráfica de la derecha.



E

a) Trace la gráfica de $y=2x+3$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

b) Trace la gráfica de $y=3x-1$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

Contenido 7: Gráfica de $y=ax+b$ si $a<0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

P

Dada la función $y=-2x+1$,

a) Encuentre el intercepto con el eje y.
b) Identifique la razón de cambio de esta función.
c) Trace la gráfica de $y=-2x+1$ utilizando el punto de intersección con y y su razón de cambio.

S

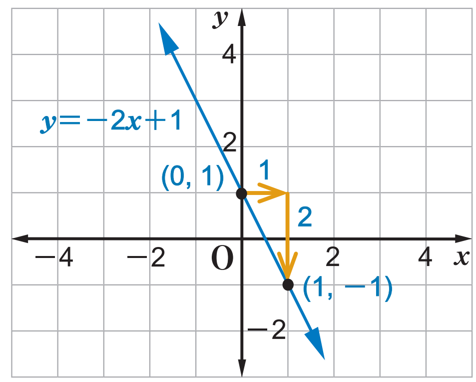
a) Los puntos sobre el eje y tienen abscisa $x=0$.
Al sustituir x por 0 en $y=-2x+1$, se obtiene

$$y=(-2)(0)+1=1$$

El intercepto de la gráfica $y=-2x+1$ con el eje y es entonces (0, 1).

b) La razón de cambio de $y=-2x+1$ es -2.

c) Como la razón de cambio es -2, entonces y disminuye 2 unidades cada vez que x aumenta 1 unidad, esto significa que, como (0, 1) es un punto de la gráfica, $(0+1,\ 1+(-2))=(1,\ -1)$ también lo es.

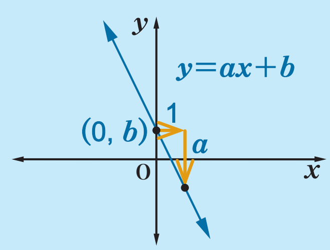


La gráfica se construye trazando la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (1, -1). Esta recta se muestra en la figura de la derecha. Se observa que disminuye 2 unidades cuando x aumenta una.

C

La función de primer grado $y=ax+b$, con $a<0$ presenta las siguientes características:

a) Su intercepto con el eje y es el punto (0, b).
b) La **pendiente** de la recta $y=ax+b$ es a e indica que y disminuye $|a|$ unidades cada vez que x aumenta una.
c) Los valores de y disminuyen a medida que x aumenta.



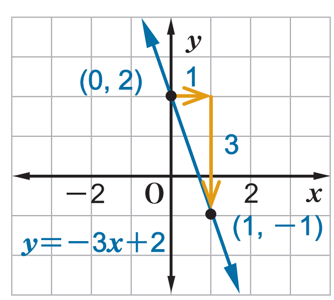
Ejemplo Trace la gráfica de $y=-3x+2$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

La pendiente es -3 y el intercepto con el eje y es (0, 2).

Otro punto de la gráfica es

$$(0+1,\ 2+(-3))=(1,\ -1).$$

Con esta información se obtiene la gráfica de la figura de la derecha.



E

a) Trace la gráfica de $y=-2x+3$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.
b) Trace la gráfica de $y=-2x-1$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

Contenido 8: Dominio y rango de una función de primer grado

P

a) Trace la gráfica de $y=2x+1$.

b) Usando la gráfica trazada en el inciso a) determine los valores que toma y si $1\leq x\leq 3$.

S

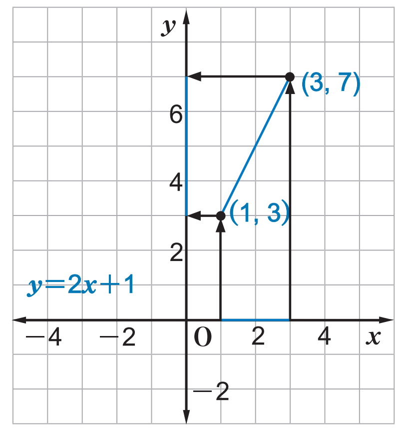
Se calculan los valores de y para valores particulares de x:

Si $x=1$, $y=(2)(1)+1=3$

Si $x=3$, $y=(2)(3)+1=7$

Se ubican en el plano cartesiano los puntos (1, 3) y (3, 7) y se traza el segmento que los une, tal como puede verse en la figura de la derecha. Puede observarse que los valores de y oscilan entre 3 y 7 incluídos estos, es decir

$$3\leq y\leq 7$$



C

Dada la función de primer grado $y=ax+b$, el conjunto de valores que toma la variable x se llama **dominio de la función**, mientras que el conjunto de valores que toma la variable y se llama **rango de la función**.

Ejemplo

Dada la función de primer grado $y=-2x+8$. Si se considera como dominio a $2<x<6$, ¿cuál es el rango de la función?

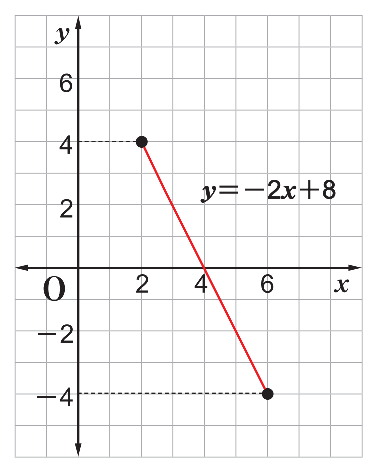
Se calculan los valores de y para $x=2$ y $x=6$:

Si $x=2$, $y=(-2)(2)+8=4$

Si $x=6$, $y=(-2)(6)+8=-4$

Se ubican en el plano cartesiano los puntos $(2,\ 4)$ y $(6,\ -4)$ y se traza el segmento que los une, este se muestra en la figura de la derecha con segmento desprovisto de los extremos puesto que 2 y 6 no pertenecen al dominio. Por tanto el rango es

$$-4<y<4$$



E

Encuentre el rango de cada una de las funciones dadas en el dominio indicado.

a) $y=2x+3$ para $-1\leq x\leq 4$

b) $y=-3x+4$ para $1<x<4$

Contenido 9: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Encuentre la pendiente y el intercepto con el eje y de la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=-x+2$

b) $y=7x+1$

c) $y=-3x+1$

d) $y=\frac{2}{3}(x-6)$

2. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones de primer grado, utilizando la pendiente y el intercepto con el eje y:

a) $y=2x+4$

b) $y=3x-5$

c) $y=-3x-1$

d) $y=-5x+6$

3. Encuentre el rango de cada una de las siguientes funciones en el dominio indicado:

a) $y=2x+3$ $\quad 1\leq x\leq 3$

b) $y=2x-1$ $\quad -2\leq x\leq 5$

c) $y=-x-3$ $\quad -7< x< -3$

Sección 3: Expresión de la función de primer grado utilizando la pendiente

Contenido 1: Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y el intercepto con el eje y

P

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente 2 e intercepto con el eje y en $(0, -1)$.

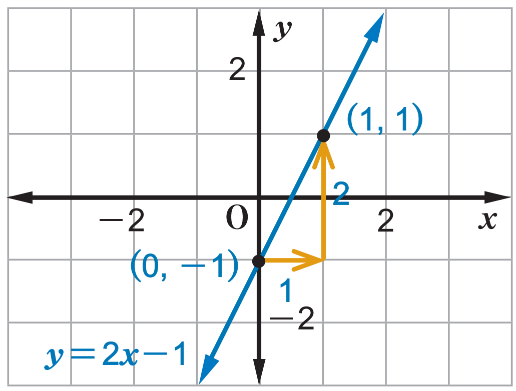
S

Se considera la expresión general $y=ax+b$. De acuerdo a la información la pendiente es $a=2$ y el intercepto con el eje y es $(0, -1)$, luego $b=-1$.

Se sustituyen estos valores en $y=ax+b$ resultando

$$y=2x+(-1)=2x-1$$

Por tanto, $\boldsymbol{y=2x-1}$ es la función de primer grado buscada.



C

Para encontrar la función de primer grado $y=ax+b$, conociendo la pendiente de su gráfica y el intercepto con el eje y:

1. Se sustituye a por el valor de la pendiente.
2. Se sustituye b por la ordenada del intercepto con el eje y.

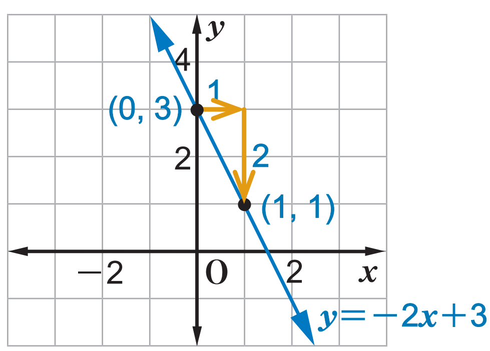
Ejemplo

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente -2 e intercepto con el eje y en $(0, 3)$.

En este caso como $a=-2$ y $b=3$, se sustituyen a por -2 y b por 3 en $y=ax+b$, obteniéndose

$$y=-2x+3,$$

cuya gráfica puede observarse a la derecha.



E

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene:

a) Pendiente 3 e intercepto $(0, 2)$ con el eje y.

b) Pendiente 5 e intercepto $(0, 1)$ con el eje y.

c) Pendiente -2 e intercepto $(0, 4)$ con el eje y.

d) Pendiente -4 e intercepto $(0, -5)$ con el eje y.

Contenido 2: Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y un punto de la gráfica

P

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto (1, 4).

S

1. Se considera la expresión general $y=ax+b$ y se sustituye a por el valor de la pendiente

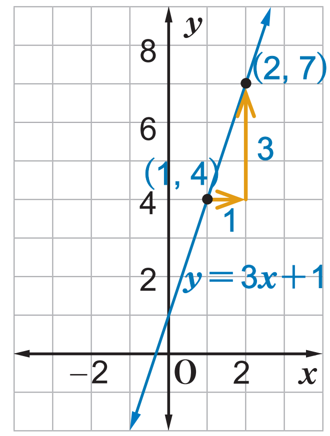
$$y=3x+b$$

2. Luego, se sustituye $x=1$ y $y=4$ en la ecuación anterior

$$4=(3)(1)+b$$
$$4=3+b$$
$$1=b$$
$$b=1$$

3. Ahora se sustituye $b=1$ en la ecuación $y=3x+b$ obteniendo $y=3x+1$.

Por tanto, la función buscada es $\boldsymbol{y=3x+1}$.



C

Para encontrar la función de primer grado $y=ax+b$, conociendo la pendiente de su gráfica y un punto de ella:

1. Se sustituye a por el valor de la pendiente.
2. Se sustituye las variables x y y por la abscisa y la ordenada del punto conocido y se resuelve la ecuación resultante para encontrar b.
3. Se sustituye el valor de b en la ecuación que resulta en el paso 1.

Ejemplo Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente -3 y pasa por el punto $(2,\ 1)$.

1. Se sustituye $a=-3$ en $y=ax+b$,

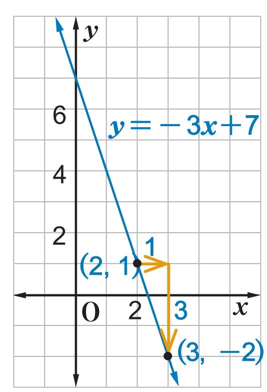
$$y=-3x+b$$

2. Se sustituye $x=2$ y $y=1$ en $y=-3x+b$

$$1=(-3)(2)+b$$
$$1=-6+b$$
$$7=b$$
$$b=7$$

3. Por último se sustituye $b=7$ en $y=-3x+b$, de donde resulta $y=-3x+7$.

Por tanto, la función buscada es $\boldsymbol{y=-3x+7}$ y su gráfica aparece a la derecha.



E

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica:

a) Tiene pendiente 4 y pasa por el punto $(2,\ 5)$.

b) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(1,\ 3)$.

c) Tiene pendiente 3 y pasa por el punto $(-2,\ 3)$.

Contenido 3: Expresión de la función de primer grado dados dos puntos

P

Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos $(-2,\ 1)$ y $(1,\ 7)$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

S

1. Se calcula la pendiente de la recta:

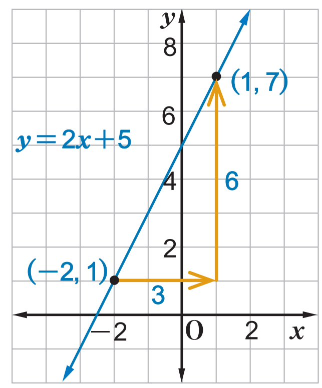
$$a = \frac{7-1}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$$

2. Se sustituye la pendiente $a=2$ en $y=ax+b$:

$$y = 2x + b$$

3. Se sustituye $x=1$ y $y=7$ en $y=2x+b$:

$$7 = (2)(1) + b$$
$$7 = 2 + b$$
$$5 = b$$
$$b = 5$$



4. Se sustituye $b=5$ en $y=2x+b$, resultando $y=2x+5$.
   Por tanto, la función de primer grado buscada es $\boldsymbol{y=2x+5}$. Ver gráfica.

C

Para encontrar la función de primer grado $y=ax+b$, conociendo dos puntos de su gráfica:

1. Se calcula la pendiente de la recta.
2. Se sustituye a por el valor de la pendiente.
3. Se sustituyen las coordenadas de alguno de los puntos conocidos en $y=ax+b$ y se resuelve la ecuación resultante para encontrar b.
4. Se sustituye el valor de b en $y=ax+b$.

Ejemplo Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $(2, 3)$.

1. Se calcula la pendiente de la recta:

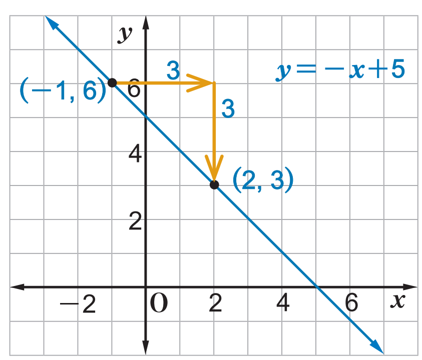
$$a = \frac{3-6}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

2. Se sustituye $a=-1$ en $y=ax+b$:

$$y = -1x + b = -x + b$$

3. Se sustituye $x=2$ y $y=3$ en $y=-x+b$:

$$3 = -2 + b$$
$$3 + 2 = b$$
$$5 = b$$
$$b = 5$$



4. Se sustituye $b=5$ en $y=-x+b$, resultando $y=-x+5$.
   Por tanto, la función de primer grado es $\boldsymbol{y=-x+5}$. Su gráfica aparece a la derecha.

E

Encuentre en cada inciso la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos:

a) $(1,\ 2)$ y $(4,\ 8)$

b) $(1,\ 3)$ y $(2,\ -1)$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 4

E

1. Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene la pendiente e intercepto con el eje y que se indican.

   a) Pendiente -1 e intercepto (0, 3) con el eje y.

   b) Pendiente 2 e intercepto (0, -4) con el eje y.

   c) Pendiente 3 e intercepto (0, 1) con el eje y.

   d) Pendiente -4 e intercepto (0, 1) con el eje y.

2. Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene la pendiente indicada y pasa por el punto dado.

   a) Pendiente 4 y el punto $(1, 3)$

   b) Pendiente 3 y el punto $(2, 1)$

   c) Pendiente 1 y el punto $(-4, 3)$

   d) Pendiente 5 y el punto $(-1, -2)$

3. Encuentre en cada inciso la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos indicados.

   a) $(1, 2)$ y $(2, 7)$

   b) $(1, 5)$ y $(-1, -9)$

   c) $(7, -4)$ y $(-2, 5)$

   d) $(1, 2)$ y $(2, 0)$

Contenido 1: Gráfica de una ecuación de primer grado de la forma $ax+by=c$

P

a) Calcule y escriba en la tabla los valores correspondientes de x o y para que los pares (x, y) sean soluciones de $2x+y=4$.

x	-2	-1		1	2	3
y	8		4			

Si $x=-2$, $(2)(-2)+y=4$
$$-4+y=4$$
$$y=4+4$$
$$y=8$$

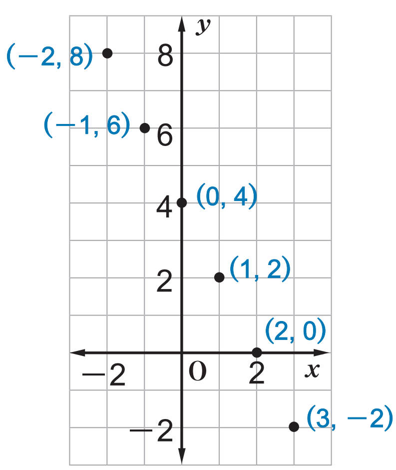
b) Ubique en el plano cartesiano los pares (x, y) encontrados. ¿Qué figura se forma al unir estos puntos?

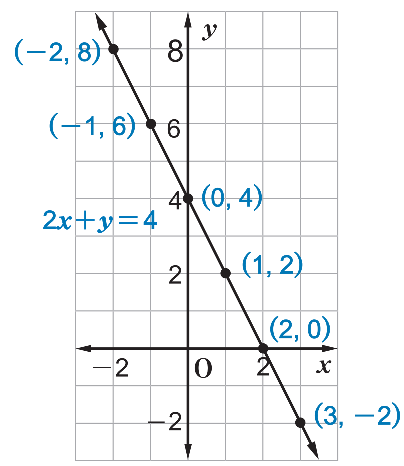
S

a) Se calculan los valores restantes de la tabla mediante la ecuación $2x+y=4$.

x	-2	-1	**0**	1	2	3
y	8	**6**	4	**2**	**0**	**-2**

b) En la figura de abajo a la izquierda, se muestran los pares ordenados (x, y) de la tabla, que al unirlos determinan la recta de la derecha.





Esta recta es la gráfica de $2x+y=4$. Toda solución de $2x+y=4$ se encuentra en la recta y cada punto de esta es solución de la ecuación.

C

La recta formada por las soluciones de la ecuación de primer grado $ax+by=c$ con a y b no simultáneamente nulos se llama **gráfica de la ecuación**. Se cumple también que cada punto de esta recta es solución de la ecuación $ax+by=c$.

E

Calcule y escriba en la tabla los valores correspondientes de x o y para que los pares (x, y) sean soluciones de $2x+y=3$. Trace la gráfica de la ecuación.

x	-1		1
y		4	

Contenido 2: Relación entre la gráfica de la ecuación $ax+by=c$ y la función de primer grado $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ con $a, b\neq 0$

P

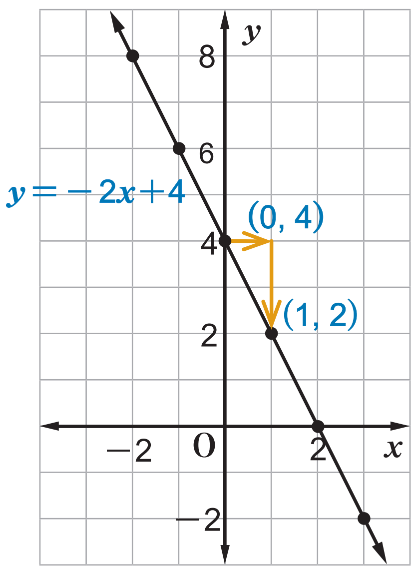
a) Despeje la variable y en la ecuación $2x+y=4$. ¿Qué tipo de función se obtiene?

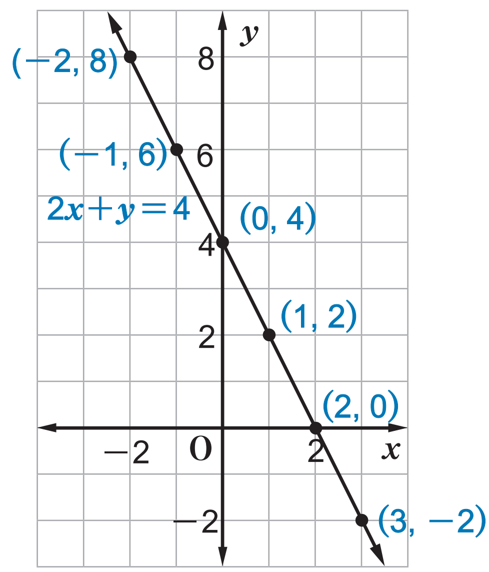
b) Trace la gráfica de la función obtenida.
¿Qué relación existe entre la gráfica de $y=-2x+4$ y la gráfica de $2x+y=4$?

S

a) Se transpone el término $2x$ en la ecuación dada, para obtener $y=-2x+4$. Se observa que esta es una función de primer grado.

b) Como la pendiente de la recta $y=-2x+4$ es -2 y el intercepto con el eje y es $(0, 4)$, otro punto de la gráfica es $(0+1, 4+(-2))=(1, 2)$, obteniéndose la recta de la izquierda que es igual a la gráfica de $2x+y=4$, situada a la derecha en la figura.





C

Si la ecuación de primer grado $ax+by=c$ se lleva a la forma $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$, ambas ecuaciones tienen la misma gráfica.

E

Trace la gráfica de $3x+y=1$ utilizando la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta que se obtiene al expresar y en función de x.

Contenido 3: Interceptos con los ejes coordenados de la gráfica de la ecuación de primer grado $ax+by=c$

P

a) Encuentre los interceptos de la gráfica de $3x-2y=6$ con los ejes coordenados.
b) Grafique la ecuación $3x-2y=6$.

(x, y) es un punto del eje x, si $y=0$; y del eje y si $x=0$.

S

a) Se buscan los interceptos de la recta $3x-2y=6$ con los ejes x y y. Como un punto del eje x tiene ordenada 0, se sustituye $y=0$ en $3x-2y=6$.

$$3x-(2)(0)=6$$
$$3x=6$$
$$x=2$$

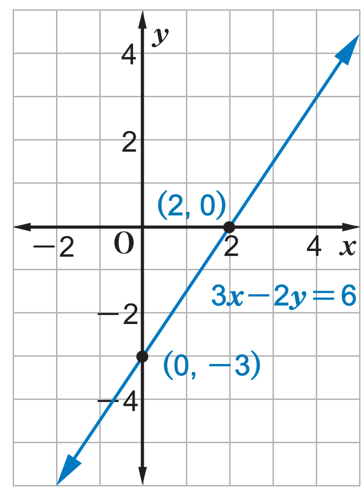
El intercepto con el eje x es el punto **(2, 0)**.

El intercepto con y tiene abscisa 0. Se sustituye $x=0$ en $3x-2y=6$, resultando:

$$(3)(0)-2y=6$$
$$-2y=6$$
$$y=-3$$

El intercepto con el eje y es **(0, −3)**.

b) Ahora se ubican los puntos (2, 0) y (0, −3) en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ellos. La recta que se muestra en la figura de la derecha es la gráfica de $3x-2y=6$.



C

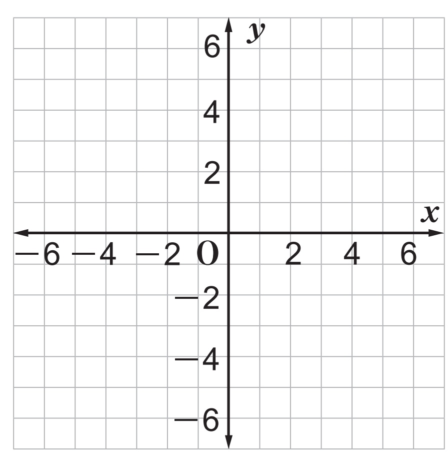
Para graficar la ecuación $ax+by=c$ ($a\neq0$, $b\neq0$) se encuentran los interceptos con los ejes y se traza la recta que pasa por estos.

E

Encuentre los interceptos de las siguientes rectas con los ejes y grafíquelas:

a) $x-2y=4$

b) $3x-4y=-12$



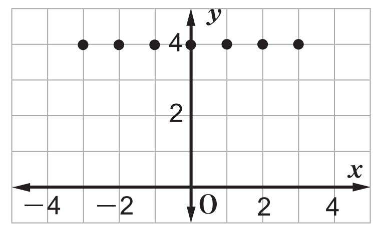
Contenido 4: Gráfica de la ecuación $y=k$

P

Grafique la ecuación $y=4$.

S

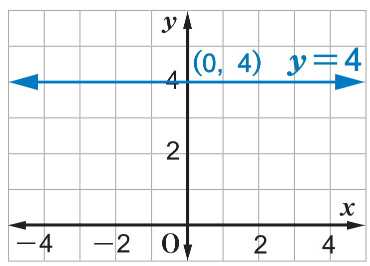
La ecuación $y=4$ se escribe también como $0x+y=4$.



Todo punto de ordenada $y=4$, satisface esta ecuación sin importar el valor de la abscisa x, es decir que todos los puntos de la forma $(x, 4)$ son soluciones de la ecuación. Algunos de estos puntos son:

$(-3, 4)$, $(-2, 4)$, $(-1, 4)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$

Se observa que al variar x, los puntos $(x, 4)$ forman una recta que pasa por $(0, 4)$ y es paralela al eje x.
La gráfica es la siguiente:



C

Toda ecuación de primer grado de la forma $y=k$ tiene por gráfica una **recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, k)$.**

E

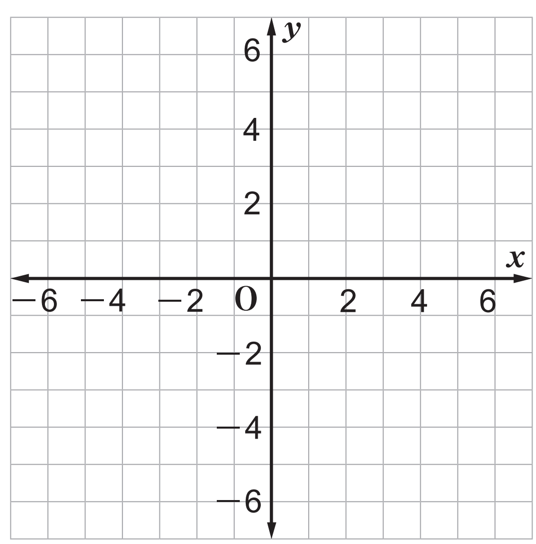
Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $y=2$

b) $y=-3$

c) $y-1=0$

d) $5y=15$



Contenido 5: Gráfica de la ecuación $x=h$

P

Grafique la ecuación $x=2$.

S

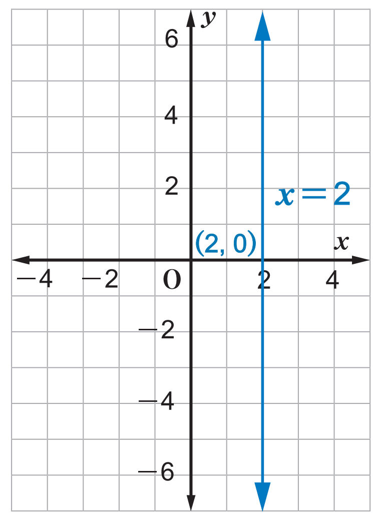
La ecuación $x=2$ se escribe como $x+0y=2$.

Todo punto de abscisa $x=2$ satisface esta ecuación sin importar el valor de la ordenada y, es decir que todos los puntos de la forma $(2,\ y)$ son soluciones de la ecuación. Algunos de estos puntos son:

$(2,\ -3),\ (2,\ -2),\ (2,\ -1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$

Se observa que al variar y, los puntos $(2,\ y)$ forman una recta que pasa por $(2,\ 0)$ y es paralela al eje y.

La gráfica se muestra a la derecha.



C

Toda ecuación de primer grado de la forma $x=h$ tiene por gráfica una **recta paralela al eje y que pasa por el punto $(h,\ 0)$.**

E

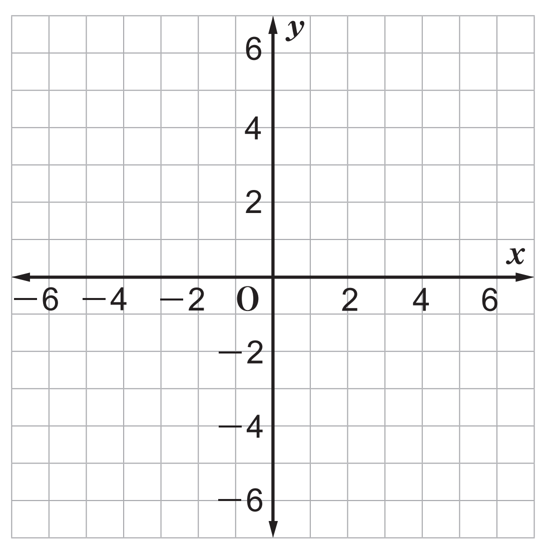
Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $x=4$

b) $x=-1$

c) $x-1=0$

d) $5x=15$



Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 5

1. Encuentre en cada inciso los interceptos de la recta con los ejes y grafíquela.

   a) $x-y=1$

   b) $x+3y=6$

   c) $-2x+y=-2$

   d) $2x-y=-4$

2. Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones:

   a) $y=3$ b) $x-4=0$ c) $3y=-9$ d) $5x+15=0$

Sección 5: Aplicaciones de la función de primer grado

Contenido 1: Aplicación de la función de primer grado (1)

P

Carlos se encuentra a 30 m de su casa y se dirige hacia esta a una velocidad de 3 metros por segundo:

a) ¿A qué distancia de su casa se encuentra al transcurrir 4 segundos?

b) Exprese como una función de primer grado la distancia y (en m) a la que se encuentra después de x segundos.

c) ¿Qué valores puede tomar x?

d) Construya la gráfica de la función encontrada.

S

En cualquier punto de su trayectoria a la casa la distancia a la que se encuentra Carlos después de cierto tiempo es igual a la distancia inicial (30 metros), menos la distancia recorrida. Esta última es igual a la velocidad por el tiempo transcurrido. Por tanto:

a) Al transcurrir 4 segundos, la distancia a la que se encuentra Carlos de su casa es $30-(3)(4)=\mathbf{18}$ metros.

b) La distancia recorrida por Carlos al finalizar los x segundos es $3x$. Por tanto, la expresión solicitada es

$$y=30-3x$$
$$\boldsymbol{y=-3x+30}$$

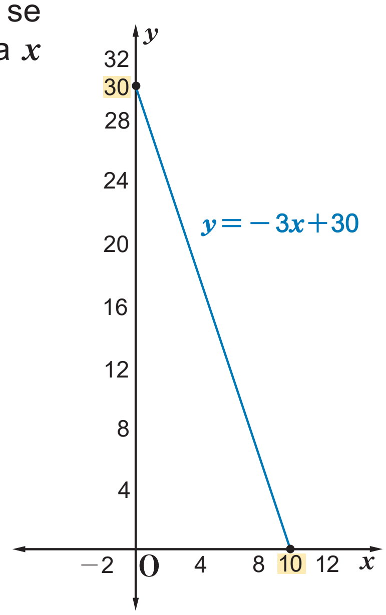
c) El tiempo inicial es $x=0$ y aumenta a medida que Carlos se dirige a su casa. Por tanto, $x\geq 0$. El mayor valor que alcanza x ocurre cuando Carlos llega a su casa, es decir cuando $y=0$.

Se sustituye $y=0$ en $y=-3x+30$ y se obtiene:

$$0=-3x+30$$
$$3x=30$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{30}{3}$$
$$x=10$$

Luego, $\mathbf{0\leq x\leq 10}$.

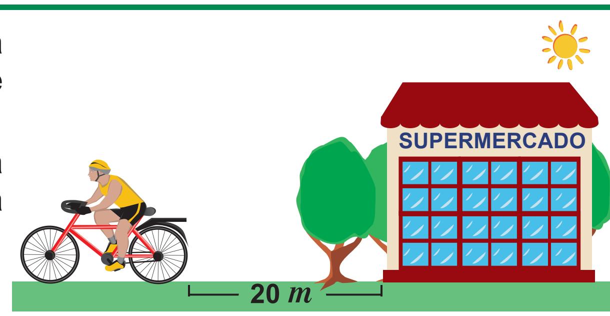
d) La gráfica se construye utilizando los interceptos de la recta $y=-3x+30$ con los ejes. Estos puntos son (10, 0) y (0, 30). La gráfica es el tramo de la recta entre los puntos anteriores, inclusive ellos, tal como se muestra en la figura de la derecha.



E

Un ciclista arranca desde un punto que se encuentra a 20 m de un supermercado, alejándose a razón de 4 m cada segundo.

Expres como una función de primer grado la distancia y (en m) a la que se encuentra el ciclista del supermercado al transcurrir x segundos.



Contenido 2: Aplicación de la función de primer grado (2)

Ejemplo

Un vendedor del mercado Oriental tiene un sueldo básico de C$ 1 000 al mes, y por la venta de cada artículo recibe una comisión de C$ 20.

a) Encuentre la función que exprese su salario mensual y (en córdobas), si ha vendido una cantidad x de artículos.

b) ¿Cuál es su salario total, si vendió 30 artículos en un mes?

a) Por la venta de cada artículo el vendedor recibe C$ 20, así que por la venta de x artículos recibirá como comisión una cantidad de C$ $20x$, sumando a esta cantidad el salario básico de C$ 1 000 se obtiene la función

$$y=20x+1\,000$$

que representa el salario mensual del vendedor en función de la cantidad x de artículos vendidos en ese período.

b) Como el número de artículos vendidos es 30, entonces $x=30$, así que:

$$y=(20)(30)+1\,000=600+1\,000=1\,600$$

Luego, el salario total del vendedor es **C$ 1 600**.

E

1. Edinson abre una cuenta de ahorros con C$ 1 000 y decide depositar C$ 100 cada mes.

a) Encuentre la función que expresa la cantidad ahorrada y (en córdobas) a los x meses.

b) Calcule la cantidad de dinero ahorrado en 5 meses. Utilice la función encontrada en el inciso anterior.

2. Ana recibe un préstamo de C$ 2 000 sin intereses y debe pagar C$ 100 al mes hasta cancelar la deuda.

a) Encuentre la función que expresa la cantidad pendiente de pago y (en córdobas) a los x meses.

b) ¿Cuánto debe a los 10 meses?

c) ¿En cuántos meses cancelará la deuda?

Desafío

Solución de sistemas de ecuaciones de primer grado mediante gráfica

P1

a) Grafique en un mismo plano cartesiano las ecuaciones

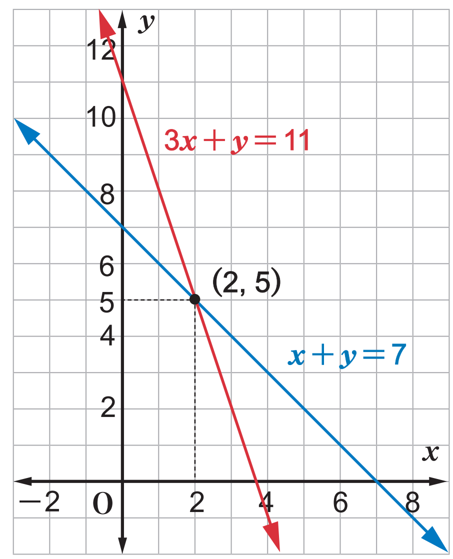
$$x+y=7,\ 3x+y=11$$

y encuentre las coordenadas x y y del punto de intersección de las rectas.

b) Muestre que el punto de intersección de las rectas es la solución del sistema que forman ambas ecuaciones.

S

a) Al graficar las ecuaciones $x+y=7$ y $3x+y=11$, se obtienen las rectas de la figura de la derecha, que tienen a $(2,\ 5)$ como punto de intersección, según puede constatarse gráficamente.



b) Se sustituye $x=2$ y $y=5$ en los lados izquierdos de las ecuaciones dadas, obteniéndose

$$x+y=2+5=7$$
$$3x+y=(3)(2)+5=6+5=11$$

Esto significa que el punto (2, 5) es la solución del sistema

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+y=11 \end{cases}$$

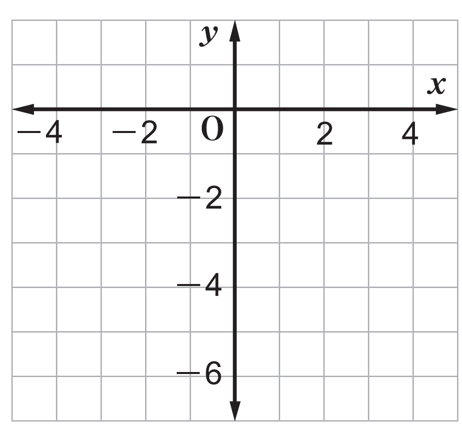
Así, el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones coincide con la solución del sistema que estas forman.

C

La **solución** de un sistema de ecuaciones de primer grado coincide con el **punto de intersección** de las gráficas de estas.

E

Grafique en el plano cartesiano las ecuaciones $x+y=-1$ y $2x+y=-4$, encuentre las coordenadas del punto de intersección y verifique que es solución del sistema que forman las ecuaciones dadas.



Desafío

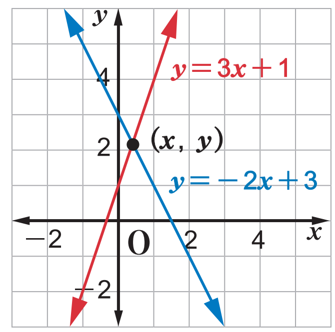
Solución de sistemas de ecuaciones de primer grado para encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas

P

Dada la figura de la derecha, encuentre las coordenadas del punto de intersección de las rectas

$$y = -2x + 3 \;\text{ y }\; y = 3x + 1$$

resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ellas.



S

Se transponen en ambas ecuaciones los términos en x, y con las ecuaciones resultantes se forma el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$$

Se multiplica la segunda ecuación por -1 obteniendo:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

Se suman ambas ecuaciones resultando $5x = 2$, de donde $x = \frac{2}{5}$. Se sustituye este valor en $2x + y = 3$:

$$2\left(\frac{2}{5}\right) + y = 3$$

$$y = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$$

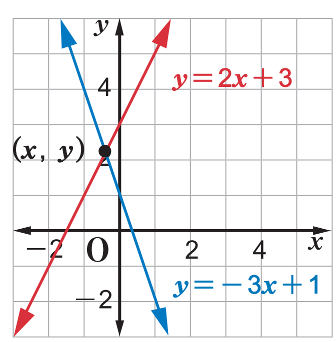
La solución del sistema es $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ y por lo tanto es el punto de intersección de las rectas dadas.

C

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ellas.

E

Encuentre las coordenadas del punto de intersección de las rectas $y = 2x + 3$ y $y = -3x + 1$ resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ellas.



Desafío

Casos especiales de solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con gráfica

P

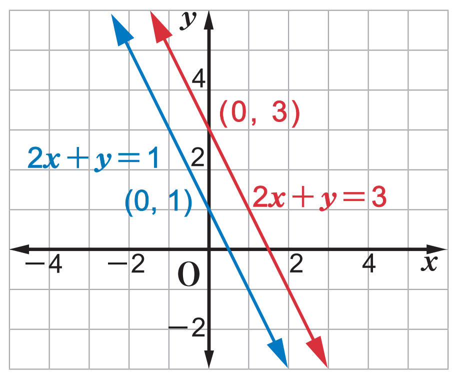
Encuentre de forma gráfica la solución de cada uno de los sistemas dados:

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$

S

a) Se despeja y en cada ecuación de donde resulta $y=-2x+1$ y $y=-2x+3$. Ambas rectas tienen la misma pendiente $a=-2$.

La primera tiene intercepto con el eje y en $(0,\ 1)$ y la segunda en $(0,\ 3)$. Con esta información se trazan las gráficas de ambas ecuaciones y se observa que no tienen puntos en común. Por lo tanto el sistema



$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

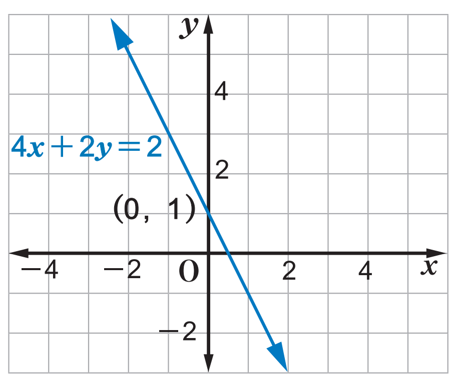
no tiene solución.

b) Dividiendo ambos lados de $4x+2y=2$ por 2 se tiene

$$\frac{4x+2y}{2}=\frac{2}{2}$$

$$\frac{4x}{2}+\frac{2y}{2}=1$$

$$2x+y=1$$



El sistema se reduce a una ecuación, es decir las dos rectas coinciden. Por lo tanto, hay una infinidad de puntos comunes, luego el sistema

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones.

C

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables que no tiene solución se llama **sistema de ecuaciones incompatible.**

Un sistema de ecuaciones de primer grado que tiene solución es llamado **compatible**.

Los sistemas de ecuaciones compatibles se clasifican en: **compatibles determinados** si tienen una única solución, o **compatibles indeterminados** si tienen infinitas soluciones.

Dos **rectas** que tienen la **misma pendiente** son **paralelas.**

Desafío

Clasifique los siguientes sistemas en compatible (determinado o indeterminado) o incompatible.

a) $\begin{cases} x-y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=9 \end{cases}$

Unidad 4

Radicales

Sección 1: Raíz cuadrada

Contenido 1: Concepto de raíz cuadrada

P

¿Qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9? $(\square)^2 = 9$

S

Hay dos números, **3** y **−3**, que al elevarse al cuadrado dan como resultado 9, los cuales son opuestos:

$$3^2 = (3)(3) = 9$$
$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

C

El número cuyo cuadrado es a se llama **raíz cuadrada** de a.

La raíz cuadrada de un número no negativo a es el valor de x que satisface la igualdad $x^2 = a$.

Un número positivo tiene dos raíces cuadradas. Ambas raíces son números opuestos.

Ejemplo Calcule las raíces cuadradas de:

a) 16 b) $\frac{4}{9}$

a) $(4)^2 = (4)(4) = 16$

$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$

Las raíces cuadradas de 16 son **4 y −4**.

$$\left.\begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix}\right\} \underset{\text{Es el cuadrado de}}{\overset{\text{Son las raíces cuadradas de}}{\rightleftarrows}} 16$$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

Las raíces cuadradas de $\frac{4}{9}$ son $\mathbf{\frac{2}{3}}$ y $-\mathbf{\frac{2}{3}}$.

E

Calcule las raíces cuadradas de:

a) 4 b) 25 c) 36 d) 49 e) $\frac{9}{16}$ f) $\frac{25}{36}$

Contenido 2: El signo de radical

P

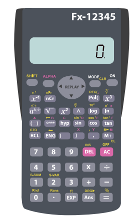
¿Cuál es el número positivo cuyo cuadrado es 2?

S

Se busca un número que elevado al cuadrado sea igual a 2. Se inicia la búsqueda con 1 y 2:

$$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4$$

Esto indica que el número buscado debe ser mayor que 1 y menor que 2. Si se continúa ensayando con 1,4 y 1,5 se tiene que



$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \qquad (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

lo cual permite descartar 1,5 y continuar con 1,4, agregando a este decimales convenientes. Por ejemplo,

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \qquad (1{,}42)^2 = 2{,}0164$$

Luego, 1,41 es una aproximación del número buscado. Se puede seguir ensayando hasta encontrar que los decimales sucesivos

$$1{,}414, \quad 1{,}4142, \quad \ldots \quad 1{,}4142135623,$$

elevados al cuadrado se acercan mucho a 2.

El número **1,4142135623...** se representa por $\sqrt{2}$ y se lee raíz cuadrada de 2.

C

$\sqrt{}$ se llama **signo de radical**.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: la raíz positiva $\sqrt{a}$ y la negativa $-\sqrt{a}$.

$\sqrt{a}$ se lee raíz cuadrada de a.

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{a}\\ -\sqrt{a}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\text{Son las raíces cuadradas de}}\\ \xleftarrow[\text{Es el cuadrado de}]{}\end{array} a$$

Ejemplo

Indique las raíces cuadradas de 3 usando el signo de radical.

Como $3 > 0$, las raíces cuadradas de 3 son:

Raíz cuadrada positiva: $\sqrt{3}$

Raíz cuadrada negativa: $-\sqrt{3}$

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$
$$(-\sqrt{3})^2 = 3$$

Verifique con calculadora:
$\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$

E

1. Indique las raíces cuadradas de los siguientes números usando el signo de radical:

   a) 5 b) 11 c) 31

2. Escriba el valor aproximado de la raíz cuadrada positiva de los números anteriores usando 4 cifras decimales.

Contenido 3: Raíces cuadradas exactas

P

Calcule: a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{(-4)^2}$ c) $-\sqrt{16}$ d) $\sqrt{0}$

S

a) Si $16=4^2$, entonces:

$$\sqrt{16}=\sqrt{4^2}$$
$$=\mathbf{4}$$

b) Igualmente, si $(-4)^2=16$, entonces:

$$\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}$$
$$=\sqrt{4^2}$$
$$=\mathbf{4}$$

c) Si $16=4^2$, entonces:

$$-\sqrt{16}=-\sqrt{4^2}$$
$$=\mathbf{-4}$$

d) $0=0^2$, significa que:

$$\sqrt{0}=\sqrt{0^2}$$
$$=\mathbf{0}$$

Nótese que el 0 tiene una única raíz cuadrada.

Las dos raíces cuadradas de $a>0$, también se pueden escribir como $\pm\sqrt{a}$ y se lee más-menos raíz cuadrada de a.

Las dos raíces cuadradas de 16 son ± 4.

C

Las raíces cuadradas que se pueden expresar sin el signo de radical se llaman **raíces cuadradas exactas.**

Si $a>0$, entonces:

$$\sqrt{a^2}=a$$
$$-\sqrt{a^2}=-a$$

E

Calcule las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{(-6)^2}$ c) $-\sqrt{49}$

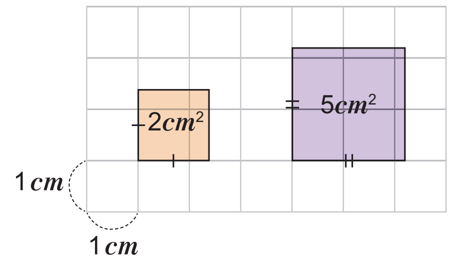
Contenido 4: Comparación de raíces cuadradas

P

En la figura de la derecha se muestran dos cuadrados con áreas respectivas de $2\,cm^2$ y $5\,cm^2$.

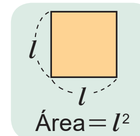
a) Encuentre la medida del lado de cada cuadrado.

b) Observe la figura y compare las raíces cuadradas obtenidas en el inciso anterior.



S

a) Sea x el número positivo que representa la medida del lado del cuadrado de área 2 cm^2, entonces:



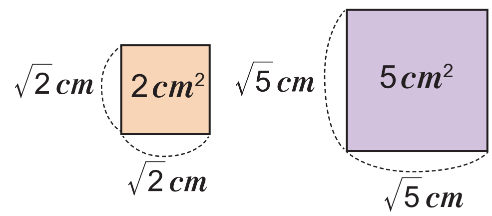
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Sea y el número positivo que representa la medida del lado del cuadrado con área 5 cm^2, entonces:

$$y^2 = 5$$
$$y = \sqrt{5}$$

Medida del lado del cuadrado de área 2 cm^2: $\mathbf{\sqrt{2}\,cm}$

Medida del lado del cuadrado de área 5 cm^2: $\mathbf{\sqrt{5}\,cm}$



b) En la figura se observa que la medida del lado del cuadrado de menor área es menor que la medida del lado del cuadrado de mayor área. Esto significa que $\mathbf{\sqrt{2} < \sqrt{5}}$.

C

Si a y b son números positivos, entonces se verifica la siguiente propiedad:

Si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ejemplo Escriba en el recuadro el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\sqrt{3}\ \boxed{\phantom{<}}\ \sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3}\ \boxed{\phantom{<}}\ -\sqrt{7}$ c) $2\ \boxed{\phantom{<}}\ \sqrt{5}$

a) Como se cumple que $3 < 7$, entonces $\sqrt{3}\ \boxed{<}\ \sqrt{7}$.

b) Puesto que $\sqrt{3} < \sqrt{7}$, entonces $-\sqrt{3}\ \boxed{>}\ -\sqrt{7}$.

c) De $4 < 5$, resulta que $\sqrt{4} < \sqrt{5}$.

Al ser $\sqrt{4} = 2$, entonces $2\ \boxed{<}\ \sqrt{5}$.

Si a y b son números positivos y $a < b$, entonces $-a > -b$.

Ejemplo:

Si $3 < 5$, entonces

$-3 > -5$

E

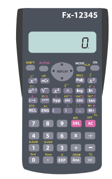
Escriba en el recuadro el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\sqrt{5}\ \boxed{\phantom{<}}\ \sqrt{2}$ b) $\sqrt{11}\ \boxed{\phantom{<}}\ \sqrt{13}$ c) $3\ \boxed{\phantom{<}}\ \sqrt{10}$ d) $-\sqrt{3}\ \boxed{\phantom{<}}\ \sqrt{7}$

Contenido 5: Decimales infinitos periódicos y no periódicos

P

Escriba en forma decimal los siguientes números fraccionarios:



a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{5}{11}$ d) $\frac{4}{7}$

S

a) $\frac{2}{5}=0,4$

b) $\frac{7}{8}=0,875$

c) $\frac{5}{11}=0,45454545\ldots$

d) $\frac{4}{7}=0,571428571428\ldots$

$\frac{2}{5}$ se convierte en decimal, digitando en la calculadora $2\div 5$

Observe que:

- los decimales en a) y b) tienen un número finito de cifras decimales.
- los decimales en c) y d) tienen infinitas cifras decimales.
- las cifras decimales en c) y d) tienen un período.

En c) el período es 45 y en d) el período es 571428.

Se llama **período** de un número decimal a la cifra decimal que se repite consecutivamente, lo cual se da de forma infinita.

Para indicar el período se escribe:

$$0,45454545\ldots=0,\overline{45}$$
$$0,571428571428\ldots=0,\overline{571428}$$

C

Un número decimal puede tener un número de cifras decimales finito o infinito.

Cuando un número decimal infinito tiene período este se llama **decimal infinito periódico**. En caso de que el decimal infinito no tenga período, se llamará **decimal infinito no periódico**.

Ejemplo Clasifique los números dados en periódicos o no periódicos, según corresponda.

a) 0,18181818… b) 0,285714285714… c) $\sqrt{2}=1,4142135623\ldots$

a) 0,18181818… es periódico, con período 18.

b) 0,285714285714… es periódico, cuyo período es 285714.

c) $\sqrt{2}=1,4142135623\ldots$ es no periódico.

E

Clasifique los siguientes números decimales infinitos en periódicos o no periódicos según corresponda:

a) $\sqrt{3}=1,7320508075\ldots$ b) $0,13131313\ldots$ c) $0,12341234\ldots$

Contenido 6: Números racionales, números irracionales y números reales

P

Escriba como una fracción los siguientes números:

a) 5 b) -2 c) $1{,}7$ d) $0{,}27$

S

a) $5=\frac{5}{1}$ b) $-2=-\frac{2}{1}$

c) $1{,}7=\frac{17}{10}$ d) $0{,}27=\frac{27}{100}$

C

Los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros se llaman **números racionales o fraccionarios**.
Los números que no son racionales se llaman **números irracionales**.
Los números racionales e irracionales forman los números reales.

Conjuntos Numéricos

- Números Reales
  - Números racionales
    - Números enteros
      - Enteros positivos (Naturales)
      - Cero
      - Enteros negativos
    - Fracciones no enteras
  - Números irracionales

Ejemplo Clasifique los siguientes números en racional o irracional según corresponda:

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

Un decimal infinito no periódico no se puede expresar como el cociente de dos números enteros.

a) $\sqrt{16}=4=\frac{4}{1}$, por lo cual **es un número racional**.

b) $\sqrt{2}=1{,}4142135623\ldots$

$\sqrt{2}$ es número decimal infinito no periódico, es decir no se puede expresar como una fracción. Esto significa que $\sqrt{2}$ **es un número irracional**.

c) $\pi=3{,}1415926535\ldots$

π es número decimal infinito no periódico, así que no se puede expresar como una fracción. Esto significa que π **es un número irracional**.

E

Clasifique los siguientes números en racional o irracional según corresponda:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{36}$ d) 3

Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 1

1. Calcule las raíces cuadradas de los siguientes números:
   a) 1 b) 64 c) 100 d) $\frac{36}{49}$

2. Exprese sin el signo de radical los siguientes números:
   a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{(-5)^2}$ c) $-\sqrt{25}$ d) $-\sqrt{\frac{36}{49}}$

3. Calcule: a) $(\sqrt{8})^2$ b) $(-\sqrt{5})^2$ c) $(\sqrt{11})^2$ d) $(-\sqrt{12})^2$

4. Ordene de menor a mayor los siguientes números:

   $\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, 0, $-\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$

5. Clasifique cada uno de los siguientes números en racional o irracional según corresponda:
   a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 0,3

Desafío

Conversión de un número decimal a una fracción irreducible

Ejemplo Escriba $0,\overline{63}$ en forma de fracción.

1. Se hace $x = 0,\overline{63}$, es decir

$$x = 0{,}636363\ldots$$

2. Se multiplica la ecuación anterior por una potencia de 10 cuyo exponente es el número de cifras que tiene el período, que en este caso es 2.

$$100x = 63{,}636363\ldots$$

3. Se multiplica por -1 la ecuación $x = 0{,}636363\ldots$

$$-x = -0{,}636363\ldots$$

4. Se suma a $100x = 63{,}636363\ldots$ la ecuación

$$-x = -0{,}636363\ldots$$

   resultando $99x = 63$

5. Se resuelve la ecuación anterior

$$x = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{99}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{11}}$$

$$\begin{array}{rr} & 100x = 63{,}636363\cdots \\ +) & -x = -0{,}636363\cdots \\ \hline & 99x = 63 \end{array}$$

Confirme que $0,\overline{12}$ en forma de fracción es $\frac{4}{33}$.

Sección 2: Operaciones con raíces cuadradas

Contenido 1: Multiplicación de raíces cuadradas

P

a) Escriba $[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2$ como el producto de dos enteros positivos.

b) ¿Son iguales $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$ y $\sqrt{(3)(5)}$?

Si $a > 0$, entonces $(\sqrt{a})^2 = a$.

S

a) Se aplica $a^2 = a \cdot a$, de modo que

$$\begin{aligned}[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2 &= [(\sqrt{3})(\sqrt{5})][(\sqrt{3})(\sqrt{5})]\\ &= (\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{3})(\sqrt{5})\\ &= (\sqrt{3})(\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{5})\\ &= (\sqrt{3})^2(\sqrt{5})^2\\ &= (3)(5)\end{aligned}$$

Es decir, $[(\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{5}})]^2 = (\mathbf{3})(\mathbf{5})$.

b) En a) se obtuvo que $[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2 = (3)(5)$
así que, por definición de raíz cuadrada, $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$
es la raíz cuadrada de (3)(5), es decir:

$$(\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{5}}) = \sqrt{(\mathbf{3})(\mathbf{5})}$$

C

Si $a>0$ y $b>0$, entonces se verifica la siguiente propiedad:

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Ejemplo Calcule:

a) $(\sqrt{18})(\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{3})(\sqrt{7})$ c) $(-\sqrt{3})(\sqrt{7})$ d) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{7})$

Se efectúan los productos aplicando la propiedad de la conclusión anterior:

a) $(\sqrt{18})(\sqrt{2}) = \sqrt{(18)(2)} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

b) $(\sqrt{3})(\sqrt{7}) = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{\mathbf{21}}$

c) $(-\sqrt{3})(\sqrt{7}) = -\sqrt{(3)(7)} = -\sqrt{\mathbf{21}}$

d) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{7}) = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{\mathbf{21}}$

E

Calcule:

a) $(\sqrt{32})(\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{5})(\sqrt{7})$ c) $(-\sqrt{27})(\sqrt{3})$ d) $(-\sqrt{7})(-\sqrt{6})$

Contenido 2: División de raíces cuadradas

P

a) Escriba $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2$ como el cociente de dos enteros positivos.

b) ¿Son iguales $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ y $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$?

Si $a>0$, entonces $(\sqrt{a})^2=a$.

S

a) $$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)=\frac{(\sqrt{3})(\sqrt{3})}{(\sqrt{5})(\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2}=\frac{3}{5}$$

Es decir, $\left(\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\right)^2=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$.

b) En a) se obtuvo que $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{3}{5}$, así que por definición de raíz cuadrada $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ es la raíz cuadrada de $\dfrac{3}{5}$, es decir:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{5}}}=\sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}}$$

C

Si $a>0$ y $b>0$, entonces es válida la igualdad:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$ c) $\dfrac{-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

Se aplica la propiedad establecida en la conclusión anterior:

a) $$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$$

b) $$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{10}{12}}=\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}}$$

c) $$\frac{-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{20}{5}}=-\sqrt{4}=-\mathbf{2}$$

E

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}$ c) $\dfrac{-\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Contenido 3: Introducción de factores naturales dentro del signo de radical

P

Escriba en la forma $\sqrt{c}$ los siguientes números:

a) $3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$

S

a) Se aplica la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$:

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{2} &= (\sqrt{3^2})(\sqrt{2})\\
&= \sqrt{(3^2)(2)}\\
&= \sqrt{(9)(2)}\\
&= \mathbf{\sqrt{18}}
\end{aligned}
$$

$3 = \sqrt{3^2}$

b) Se aplica la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$:

$$
\begin{aligned}
5\sqrt{3} &= (\sqrt{5^2})(\sqrt{3})\\
&= \sqrt{(5^2)(3)}\\
&= \sqrt{(25)(3)}\\
&= \mathbf{\sqrt{75}}
\end{aligned}
$$

$5 = \sqrt{5^2}$

C

Si $a>0$ y $b>0$, entonces se cumple que:

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$$

E1

Escriba en la forma $\sqrt{c}$ los siguientes números:

a) $3\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{2}$

Ejemplo Escriba en la forma $-\sqrt{c}$ el número $-3\sqrt{7}$.

Se introduce 3 dentro del signo radical aplicando la conclusión anterior.

$$
\begin{aligned}
-3\sqrt{7} &= -\sqrt{(3^2)(7)}\\
&= -\sqrt{(9)(7)}\\
&= -\mathbf{\sqrt{63}}
\end{aligned}
$$

E2

Escriba en la forma $-\sqrt{c}$ los siguientes números:

a) $-2\sqrt{7}$ b) $-4\sqrt{2}$

Contenido 4: Simplificación de raíces cuadradas

P

a) Exprese a 12 como el producto de sus factores primos.

b) Escriba $\sqrt{12}$ en la forma $a\sqrt{b}$, siendo a un número natural.

S

a) Se descompone 12 en sus factores primos.

12	2
6	2
3	3
1	

Así $12 = 2\times 2\times 3 = (2^2)(3)$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{(2^2)(3)}$
$= (\sqrt{2^2})(\sqrt{3})$
$= \mathbf{2\sqrt{3}}$

- **Numero primo** es un número natural mayor que 1, cuyos divisores son únicamente 1 y él mismo.
- **Factores primos de un número** son los divisores primos de ese número.
- Si $a>0$ y $b>0$, entonces

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

C

Una raíz cuadrada está simplificada si el número dentro del signo de radical no tiene factores que sean potencias de exponente dos.

Ejemplo Simplifique: a) $-\sqrt{28}$ b) $\sqrt{32}$

a) $28 = (2^2)(7)$, por lo cual

$-\sqrt{28} = -\sqrt{(2^2)(7)}$
$= -(\sqrt{2^2})(\sqrt{7})$
$= -\mathbf{2\sqrt{7}}$

28	2
14	2
7	7
1	

b) $32 = (2^2)(2^2)(2)$, luego

$\sqrt{32} = \sqrt{(2^2)(2^2)(2)}$
$= (\sqrt{2^2})(\sqrt{2^2})(\sqrt{2})$
$= (2)(2)(\sqrt{2})$
$= \mathbf{4\sqrt{2}}$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

E

Simplifique:

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{80}$ d) $-\sqrt{75}$ e) $-\sqrt{150}$

Contenido 5: Racionalización

P

Verifique que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

S

Se multiplica el numerador y el denominador del cociente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ por $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(1)(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se observa que el denominador de la fracción transformada es un número entero.

Racionalizar el denominador de una fracción cuyo denominador tiene una raíz cuadrada es reescribir esta fracción de forma que el denominador sea un número entero.

C

Para racionalizar el denominador de una fracción cuyo denominador tiene una raíz cuadrada, se multiplica por esta raíz cuadrada el numerador y el denominador.

Ejemplo Racionalice el denominador: a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{6}{7\sqrt{2}}$

Para racionalizar los denominadores respectivos se aplica la conclusión anterior y las propiedades de los radicales:

a) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5})(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{(5)(3)}}{(\sqrt{3})^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$$

b) $$\frac{6}{7\sqrt{2}} = \frac{(6)(\sqrt{2})}{(7\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{2}}{(7)(\sqrt{2})^2} = \frac{\cancelto{3}{6}\sqrt{2}}{(7)(\cancelto{1}{2})} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{7}}$$

E

Racionalice el denominador:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ d) $\frac{8}{\sqrt{10}}$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 2

1. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt{6})(\sqrt{5})$ b) $(-\sqrt{5})(\sqrt{8})$ c) $(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5})$

d) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{-\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$ f) $\dfrac{\sqrt{20}}{-\sqrt{5}}$

2. Escriba la expresión de cada inciso en la forma $\sqrt{c}$ o $-\sqrt{c}$ según corresponda.

a) $5\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{8}$ c) $-7\sqrt{3}$ d) $-9\sqrt{6}$

3. Simplifique los siguientes radicales:

a) $\sqrt{8}$ b) $-\sqrt{27}$ c) $\sqrt{125}$ d) $-\sqrt{245}$ e) $\sqrt{343}$

4. Racionalice el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{11}}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{6}}$

Contenido 7: Adición y sustracción de raíces cuadradas simplificadas

P

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$ab + cb = (a+c)b$
$ab - cb = (a-c)b$

S

a) En ambos sumandos aparece el factor $\sqrt{2}$, así por la propiedad distributiva y suma de números enteros se tiene:

$$\begin{aligned}3\sqrt{2}+5\sqrt{2} &= (3+5)\sqrt{2}\\ &= \mathbf{8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b) Se aplica nuevamente la propiedad distributiva y diferencia de números enteros.

$$\begin{aligned}3\sqrt{2}-5\sqrt{2} &= (3-5)\sqrt{2}\\ &= -\,\mathbf{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

c) Los números que están dentro del signo radical son diferentes, y cada raíz cuadrada ya está simplificada, por lo cual la suma queda indicada.

C

Las sumas o restas de raíces cuadradas simplificadas se pueden reducir cuando el número dentro del signo de radical es el mismo. Si los números dentro del signo de radical son diferentes la suma o resta queda indicada.

Ejemplo Efectúe las siguientes operaciones:

a) $6\sqrt{5}-4\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}-5\sqrt{2}$ c) $2-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

a) $$\begin{aligned}6\sqrt{5}-4\sqrt{5} &= (6-4)\sqrt{5}\\ &= \mathbf{2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}6\sqrt{7}+8\sqrt{7}-5\sqrt{2} &= (6+8)\sqrt{7}-5\sqrt{2}\\ &= \mathbf{14\sqrt{7}-5\sqrt{2}}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}2-5\sqrt{3}+4\sqrt{3} &= 2+(-5+4)\sqrt{3}\\ &= \mathbf{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

E

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}$ c) $7\sqrt{6}-\sqrt{6}$

d) $11\sqrt{8}-5\sqrt{8}$ e) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}-6$ f) $17\sqrt{13}+5\sqrt{11}-11\sqrt{13}$

Contenido 8: Adición y sustracción de raíces cuadradas no simplificadas

P

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}$ b) $3\sqrt{12}-\sqrt{3}$

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

S

a) Se simplifica $\sqrt{18}$ y $\sqrt{50}$ y se reducen las raíces cuadradas que tengan el mismo número dentro del signo de radical:

$$\begin{aligned}\sqrt{18}+\sqrt{50} &= \sqrt{(3^2)(2)}+\sqrt{(5^2)(2)}\\ &= 3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\\ &= \mathbf{8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

18	2
9	3
3	3
1	

50	2
25	5
5	5
1	

b) Se simplifica $\sqrt{12}$ y se procede como en a):

$$\begin{aligned}3\sqrt{12}-\sqrt{3} &= 3\sqrt{(2^2)(3)}-\sqrt{3}\\ &= (3)(2)\sqrt{3}-\sqrt{3}\\ &= 6\sqrt{3}-\sqrt{3}\\ &= \mathbf{5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

12	2
6	2
3	3
1	

C

Para sumar o restar expresiones que tienen raíces cuadradas no simplificadas, se simplifican dichas raíces y se suman o restan aquellas cuyos números dentro del signo de radical sean el mismo.

Ejemplo

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ b) $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$

a) Como $40=(2^2)(10)$ y $90=(3^2)(10)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\sqrt{40}+\sqrt{90} &= \sqrt{(2^2)(10)}+\sqrt{(3^2)(10)}\\ &= 2\sqrt{10}+3\sqrt{10}\\ &= \mathbf{5\sqrt{10}}\end{aligned}$$

b) Dado que $48=(4^2)(3)$ y $27=(3^2)(3)$ resulta:

$$\begin{aligned}\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3} &= \sqrt{(4^2)(3)}-\sqrt{(3^2)(3)}+\sqrt{3}\\ &= 4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}\\ &= \mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

E

Efectúe las siguientes operaciones entre expresiones con radicales:

a) $\sqrt{20}+\sqrt{45}$ b) $\sqrt{125}-\sqrt{45}$ c) $7\sqrt{44}+\sqrt{99}$ d) $\sqrt{98}+\sqrt{50}+\sqrt{18}$

Contenido 9: Producto de expresiones con raíces cuadradas

P

Multiplique:

a) $(\sqrt{2})(\sqrt{2}+3)$ b) $\sqrt{3}(5\sqrt{2}+\sqrt{11})$

S

a) Se aplica la propiedad distributiva, y resulta:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})(\sqrt{2}+3) &= (\sqrt{2})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})(3)\\ &= (\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}\\ &= \mathbf{2+3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b) Se aplica la propiedad distributiva, y se obtiene:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(5\sqrt{2}+\sqrt{11}) &= (\sqrt{3})(5\sqrt{2})+(\sqrt{3})(\sqrt{11})\\ &= (5)(\sqrt{3})(\sqrt{2})+\sqrt{33}\\ &= \mathbf{5\sqrt{6}+\sqrt{33}}\end{aligned}$$

C

La multiplicación de expresiones con raíces cuadradas se realiza aplicando la propiedad distributiva (en algunos casos la propiedad conmutativa) y la multiplicación de radicales.

Ejemplo Multiplique $\sqrt{3}(\sqrt{28}-5)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(\sqrt{28}-5) &= (\sqrt{3})(\sqrt{28})-(\sqrt{3})(5)\\ &= (\sqrt{3})\left(\sqrt{(2^2)(7)}\right)-5\sqrt{3}\\ &= (\sqrt{3})(2\sqrt{7})-5\sqrt{3}\\ &= (2)(\sqrt{3})(\sqrt{7})-5\sqrt{3}\\ &= \mathbf{2\sqrt{21}-5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

E

Multiplique:

a) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+7)$ b) $\sqrt{7}(\sqrt{6}-\sqrt{7})$ c) $\sqrt{3}(2\sqrt{5}+\sqrt{2})$ d) $\sqrt{5}(7\sqrt{5}-\sqrt{6})$

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 3

Efectúe las siguientes operaciones entre expresiones con radicales:

a) $9\sqrt{5} + 15\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{11} - 10\sqrt{11}$

c) $9\sqrt{7} - \sqrt{7} + 8\sqrt{7}$

d) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

e) $3\sqrt{32} + 5\sqrt{50}$

f) $7\sqrt{32} - 4\sqrt{72}$

g) $2\sqrt{48} - 11\sqrt{75} + 8\sqrt{27}$

h) $\sqrt{5}(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

i) $\sqrt{15}(6 - \sqrt{6})$

j) $\sqrt{12}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

k) $\sqrt{3}(\sqrt{8} - \sqrt{12})$

l) $\sqrt{7}(\sqrt{45} + 2\sqrt{75})$

m) $\sqrt{8}(\sqrt{20} + 3\sqrt{45})$

Unidad 5

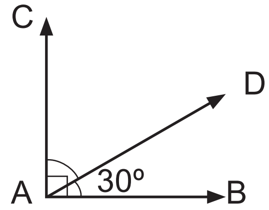
Paralelismo

Sección 1: Resta de ángulos

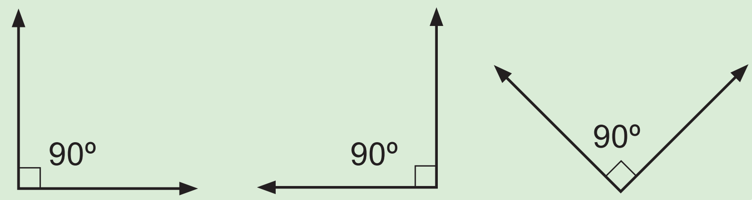
Contenido 1: Ángulos complementarios

P

Calcule la medida del $\angle DAC$.



Un ángulo que mide **90°** se llama **ángulo recto.**



S

Se observa en la figura que $\measuredangle BAC = 90°$, por lo cual $\measuredangle BAD + \measuredangle DAC = 90°$.

Como $\measuredangle BAD = 30°$, entonces

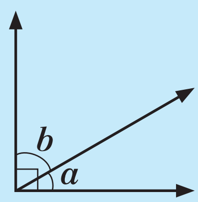
$$30° + \measuredangle DAC = 90°$$
$$\measuredangle DAC = 90° - 30°$$
$$\measuredangle DAC = 60°$$

Luego, $\boldsymbol{\measuredangle DAC = 60°}$.

C

En la figura de la derecha se cumple que:

1. $a + b = 90°$
2. $a = 90° - b$
3. $b = 90° - a$



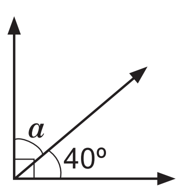
$\angle a$: indica el ángulo con medida a

Dos ángulos cuyas medidas suman 90° se llaman **ángulos complementarios**.
Se observa en la figura que $\angle a$ y $\angle b$ son complementarios.

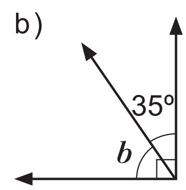
Ejemplo

Dada la figura de la derecha, encuentre a y b.

a)



b)



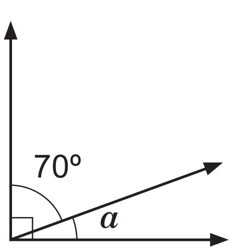
a) $a = 90° - 40° = 50°$
Luego, $\boldsymbol{a = 50°}$.

b) $b = 90° - 35° = 55°$
Luego, $\boldsymbol{b = 55°}$.

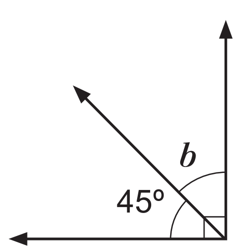
E

Calcule a, b y c según corresponda.

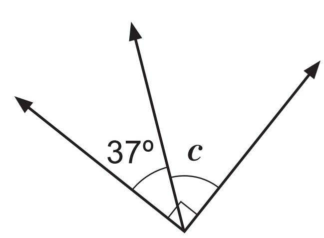
a)



b)



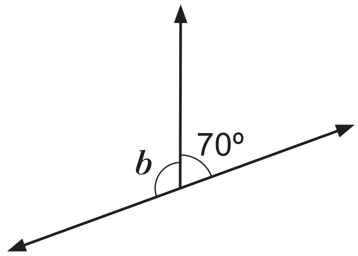
c)



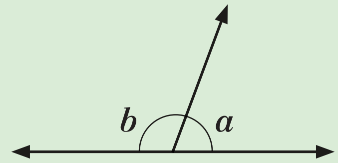
Contenido 2: Ángulos suplementarios

P

Dada la figura de abajo, calcule b.



El $\angle a$ y el $\angle b$ forman un **par lineal**. La suma de sus medidas es 180°.



S

Se observa en la figura dos ángulos que forman un par lineal, por lo cual:

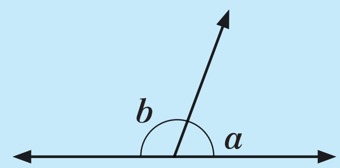
$$70° + b = 180°$$
$$b = 180° - 70°$$
$$= 110°$$

Concluyendo que $\boldsymbol{b = 110°}$.

C

En la figura, el $\angle a$ y el $\angle b$ forman un par lineal y por tanto se cumple que:

1. $a + b = 180°$
2. $a = 180° - b$
3. $b = 180° - a$

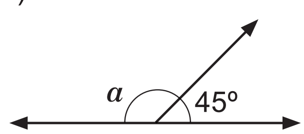


Dos ángulos cuyas medidas suman 180° se llaman **ángulos suplementarios**.
En la figura el $\angle a$ y el $\angle b$ son suplementarios.

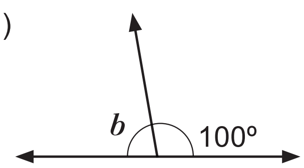
Ejemplo

Utilice la figura en cada caso para calcular a y b.

a)



b)



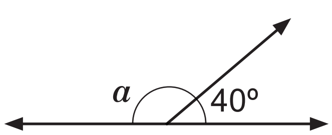
a) $a = 180° - 45°$
$= 135°$
Luego, $\boldsymbol{a = 135°}$.

b) $b = 180° - 100°$
$= 80°$
Por tanto, $\boldsymbol{b = 80°}$.

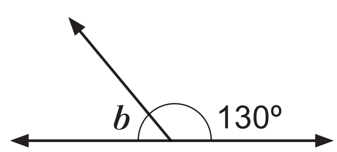
E

Calcule a, b y c según corresponda.

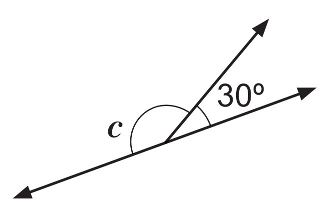
a)



b)



c)



Contenido 3: Ángulos opuestos por el vértice

P

a) Si $a = 30°$, entonces

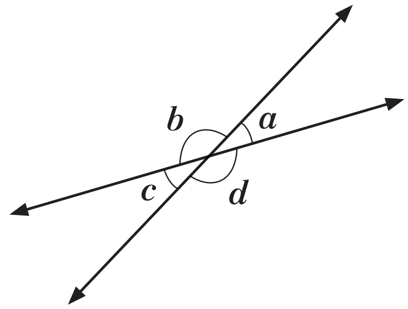
$b = \boxed{}$

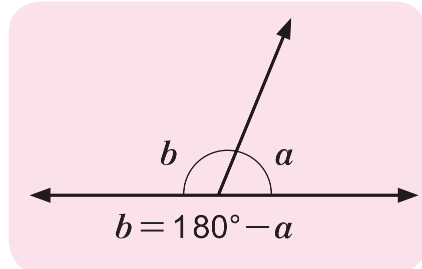
$c = \boxed{}$

$d = \boxed{}$

b) ¿Son iguales a y c?

¿Son iguales b y d?





S

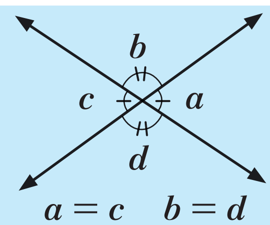
a) Se observa en la figura que $\angle a$ y $\angle b$, $\angle b$ y $\angle c$, $\angle c$ y $\angle d$, forman pares lineales, por tal razón se calculan b, c y d así:

$$b = 180° - a \qquad c = 180° - b \qquad d = 180° - c$$
$$= 180° - 30° \qquad = 180° - 150° \qquad = 180° - 30°$$
$$= 150° \qquad = 30° \qquad = 150°$$

b) De los resultados anteriores se concluye que a y c son iguales. Similarmente, b y d son iguales.

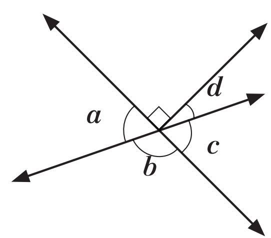
C

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.
Ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.



Ejemplo

Calcule b, c y d, auxiliándose de la figura y sabiendo que $a = 60°$.



$c = a = 60°$, por ser ángulos opuestos por el vértice.
$d = 90° - 60° = 30°$, por ser ángulo complementario al $\angle c$.
$\angle b$ es opuesto por el vértice al ángulo con medida $d + 90°$.
Luego,

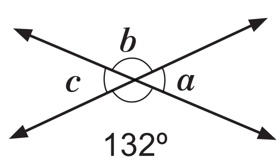
$$b = 30° + 90° = 120°$$

Otra manera de obtener b es: $b = 180° - 60° = 120°$, por ser ángulo suplementario al $\angle c$.
Por tanto, $\mathbf{b = 120°}$, $\mathbf{c = 60°}$ y $\mathbf{d = 30°}$.

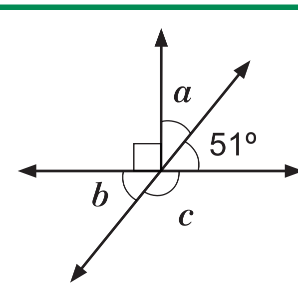
E

Calcule a, b y c en cada inciso.

a)



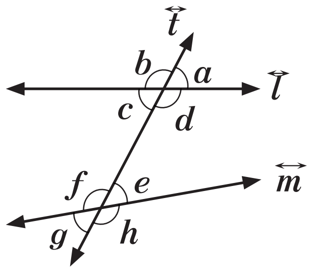
b)



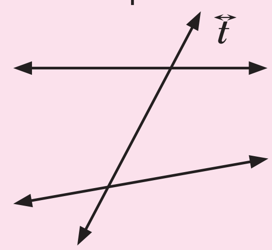
Contenido 1: Ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos

P

En la figura de abajo, $\overleftrightarrow{t}$ es transversal a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
$\angle c$, $\angle d$, $\angle e$ y $\angle f$ se llaman **ángulos internos,** mientras que $\angle a$, $\angle b$, $\angle g$ y $\angle h$ se les denomina **ángulos externos**.



$\overleftrightarrow{t}$ se llama recta **transversal** porque corta a las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ en dos puntos distintos.



Responda:

a) ¿Qué característica tienen en común las parejas $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$?
b) ¿Qué característica tienen en común las parejas $\angle c$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle f$?
c) ¿Qué característica tienen en común las parejas $\angle a$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle h$?

S

a) Cada pareja de ángulos están a un mismo lado de la transversal, uno es interno y el otro externo a las dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

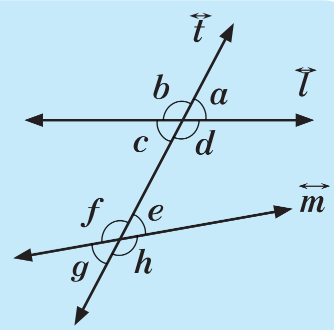
b) Están en lados opuestos de la transversal y son internos a las dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

c) Están en lados opuestos de la transversal.
Los dos ángulos son externos a las dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

C

Dada la figura de la derecha, se tiene que:

$\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$ se llaman **ángulos correspondientes.**
$\angle c$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle f$ se llaman **ángulos alternos internos**.
$\angle a$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle h$ se llaman **ángulos alternos externos**.



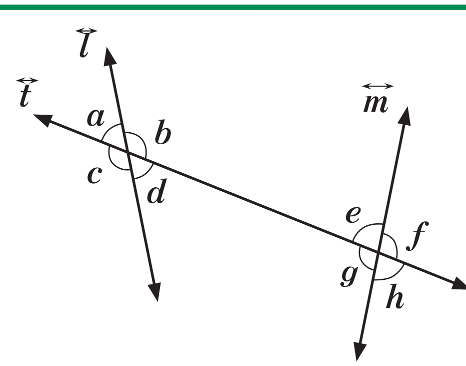
E

Dada la figura de la derecha, complete:

a) Los ángulos alternos internos son: ______________

b) Los ángulos alternos externos son: ______________

c) Los ángulos correspondientes son: ______________



Contenido 2: Ángulos correspondientes formados por una transversal y dos rectas paralelas

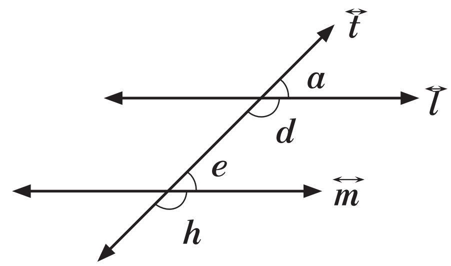
P

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.

a) ¿Son correspondientes $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$?

b) Mida el $\angle a$ y el $\angle e$ utilizando un transportador. ¿Son iguales a y e?

c) ¿Son iguales d y h?



S

a) Según la figura, $\angle a$ con $\angle e$ y $\angle d$ con $\angle h$ son correspondientes.

b) Se mide con el transportador el $\angle a$ y se obtiene que $a=45°$.
Similarmente, $e=45°$. Esto significa que $a=e$.

c) Aplicando las propiedades de par lineal

$$\begin{aligned} d &= 180° - a \\ &= 180° - 45° \\ &= 135° \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h &= 180° - e \\ &= 180° - 45° \\ &= 135° \end{aligned}$$

En consecuencia, $d=h$.

C

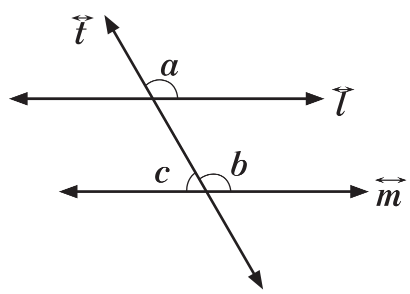
Los ángulos correspondientes formados por una recta transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

Ejemplo

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.
Si $a=120°$, calcule:

a) b

b) c



a) De la figura se observa que $\angle a$ y $\angle b$ son correspondientes entre paralelas y como $a=120°$, entonces debe cumplirse que $b=$ **120°**.

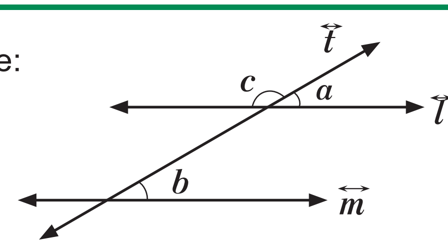
b) Dado que $\angle b$ y $\angle c$ forman un par lineal se tiene

$$\begin{aligned} c &= 180° - b \\ &= 180° - 120° = \mathbf{60°} \end{aligned}$$

E

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal. Si $b=30°$, calcule:

a) a b) c



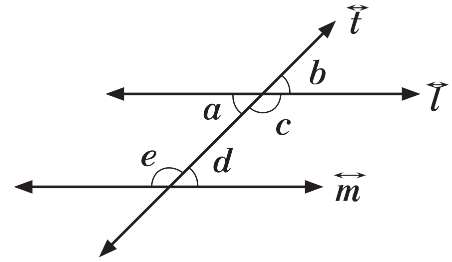
Contenido 3: Ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas

P

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.
Si $a = 45°$:

a) Calcule b, c, d, e.

b) ¿Son iguales las medidas de los ángulos alternos internos?



S

a) Según la figura $\angle a$ y $\angle b$ son opuestos por el vértice, de lo que se infiere que tienen la misma medida, es decir $\boldsymbol{b = 45°}$.

Como $\angle a$ y $\angle c$ forman un par lineal, se cumple la igualdad $c = 180° - a$. Luego,

$$\begin{aligned} c &= 180° - a \\ &= 180° - 45° \\ &= 135° \end{aligned}$$

En consecuencia, $\boldsymbol{c = 135°}$.

En la misma figura, $\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes entre una transversal y dos rectas paralelas, así que tienen la misma medida, es decir $\boldsymbol{d = 45°}$.

Como $\angle d$ y $\angle e$ forman un par lineal, entonces

$$\begin{aligned} e &= 180° - d \\ &= 180° - 45° \\ &= 135° \end{aligned}$$

En consecuencia, $\boldsymbol{e = 135°}$.

b) De la figura se obtiene que $\angle a$ y $\angle d$ son alternos internos; igualmente el par $\angle c$ y $\angle e$.

Además $\angle a$ y $\angle d$ tienen la misma medida; lo mismo sucede para $\angle c$ y $\angle e$.

C

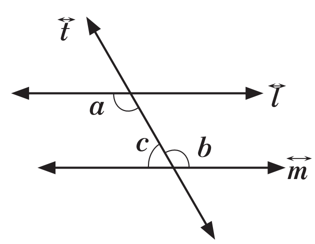
Los ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

Ejemplo

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.
Si $a = 120°$, calcule:

a) b

b) c



a) Según la figura, $\angle a$ y $\angle b$ son alternos internos entre paralelas y como $a = 120°$, entonces $\boldsymbol{b = 120°}$.

b) Como $\angle b$ y $\angle c$ forman un par lineal, se cumple que

$$\begin{aligned} c &= 180° - b \\ &= 180° - 120° = 60° \end{aligned}$$

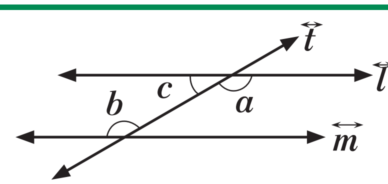
En consecuencia, $\boldsymbol{c = 60°}$.

E

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $b = 150°$, calcule:

a) a

b) c



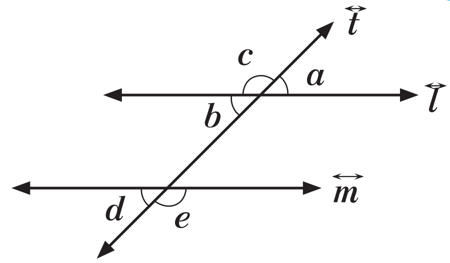
Contenido 4: Ángulos alternos externos formados por una transversal y dos rectas paralelas

P

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal. Si $a=45°$:

a) Calcule b, c, d, e.

b) ¿Son iguales las medidas de los ángulos alternos externos?



S

a) Se observa en la figura que $\angle a$ y $\angle b$ son opuestos por el vértice, así que tienen la misma medida, es decir $b=45°$.

$\angle a$ y $\angle c$ forman un par lineal, luego se cumple la igualdad $c=180°-a$, así que:

$$\begin{aligned} c &= 180°-a \\ &= 180°-45° \\ &= 135° \end{aligned}$$

En consecuencia, $c=$ **135°**.

De la figura se obtiene que $\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes entre paralelas, así que tienen la misma medida, es decir $d=$ **45°**.

$\angle d$ y $\angle e$ forman un par lineal, luego

$$\begin{aligned} e &= 180°-d \\ &= 180°-45° \\ &= 135° \end{aligned}$$

En consecuencia, $e=$ **135°**.

b) De acuerdo a la figura, $\angle a$ y $\angle d$; y $\angle c$ y $\angle e$ son alternos externos. Además cada pareja tiene la misma medida.

C

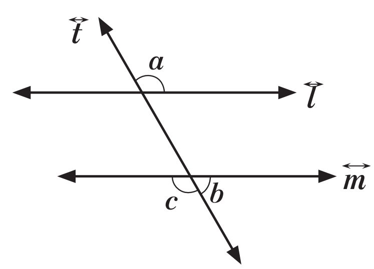
Los ángulos alternos externos formados por una transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

Ejemplo

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ una transversal.
Si $a=120°$, calcule:

a) c

b) b



a) $c=$ **120°**, porque $\angle a$ y $\angle c$ son alternos externos entre paralelas y $a=120°$.

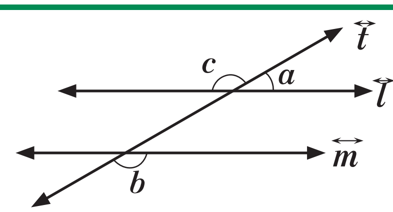
b)
$$\begin{aligned} b &= 180°-c \\ &= 180°-120° \\ &= 60° \end{aligned}$$

En consecuencia, $b=$ **60°**.

E

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ una transversal. Si $b=150°$, calcule:

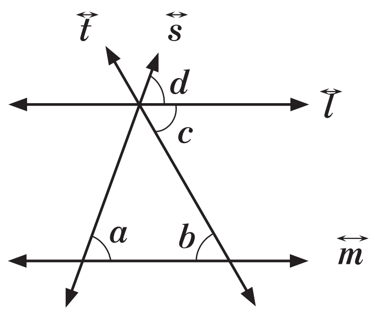
a) c b) a



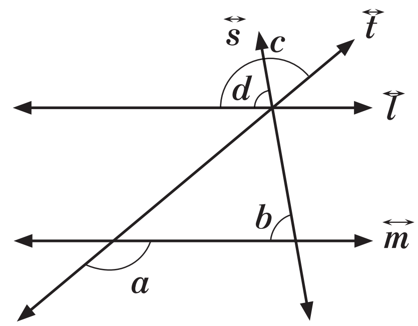
Contenido 5: Medidas de ángulos formados por una transversal y dos rectas paralelas

Ejemplo En las figuras de abajo $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversales $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$, calcule c y d para cada inciso, sabiendo que:

a) $a = 70°$ $b = 60°$



b) $a = 140°$ $b = 80°$



---

a) La transversal $\overleftrightarrow{s}$ con las rectas paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ forma los ángulos correspondientes $\angle a$ y $\angle d$. Como $a = 70°$ y ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida se concluye que $\boldsymbol{d = 70°}$.

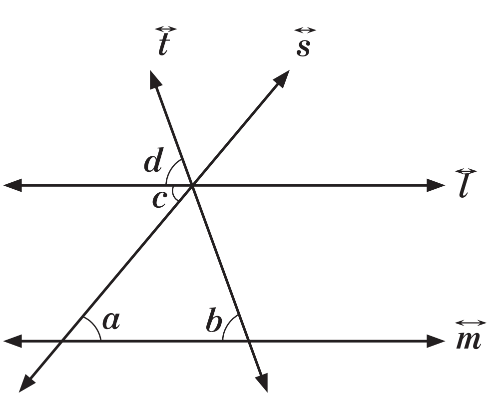
Por otra parte, como $\angle b$ y $\angle c$ formados por la transversal $\overleftrightarrow{t}$ y las mismas paralelas son alternos internos y tienen la misma medida, entonces $\boldsymbol{c = 60°}$.

b) $\angle a$ y $\angle c$ son alternos externos formados por la transversal $\overleftrightarrow{t}$ y las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$, y como $a = 140°$, entonces $c = 140°$.
$\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes formados por la transversal $\overleftrightarrow{s}$ y las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$, por consiguiente tienen la misma medida, así que $\boldsymbol{d = 80°}$.

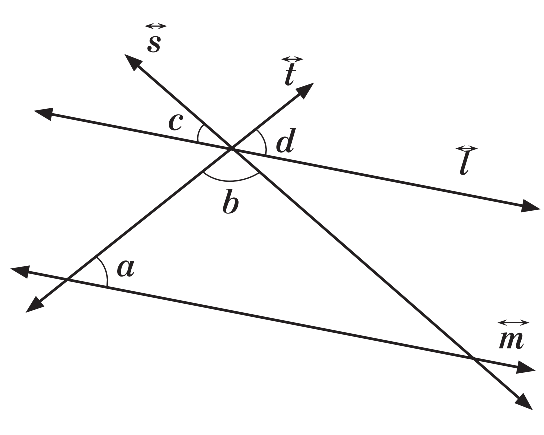
E

En las figuras de abajo $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversales $\overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{s}$, calcule c y d, sabiendo que:

a) $a = 50°$ $b = 70°$



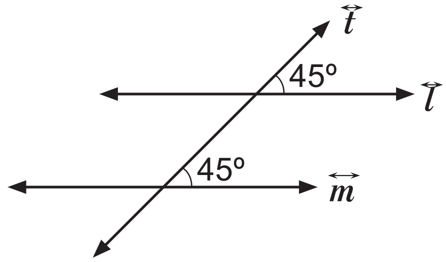
b) $a = 50°$ $b = 100°$

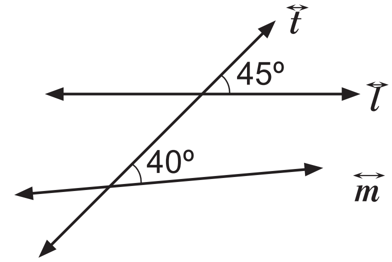


Contenido 6: Condiciones de paralelismo entre rectas

P

¿Qué nombre reciben los ángulos cuyas medidas se indican en cada figura?¿En qué caso $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$?
¿Se cruzan en cada figura las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ al prolongarlas indefinidamente?





S

Los ángulos se llaman ángulos correspondientes.
En la figura de la izquierda las rectas son paralelas por que al prolongarlas no se cruzan. En este caso los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

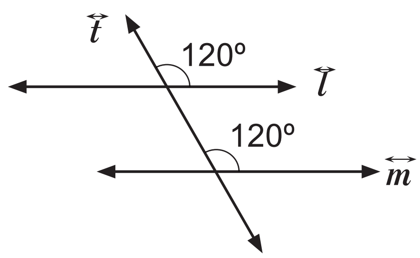
C

Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas, en cualquiera de los siguientes casos:

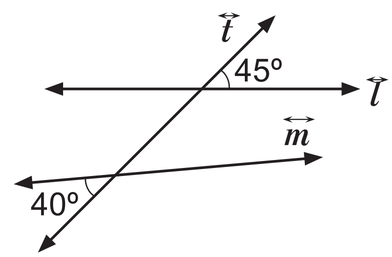
1) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
2) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
3) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.

Ejemplo 1 Determine si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ justificando su respuesta.

a)

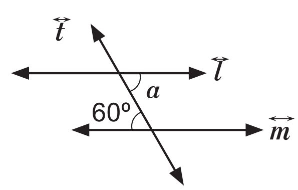


b)



a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ porque los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
b) $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ no son paralelas porque los ángulos alternos externos tienen diferentes medidas.

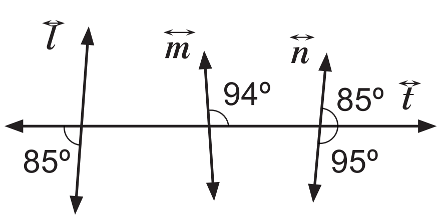
Ejemplo 2 Calcule a en la figura de la derecha para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.



El $\angle a$ es alterno interno con el ángulo cuya medida es 60°, así que $a = 60°$ para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.

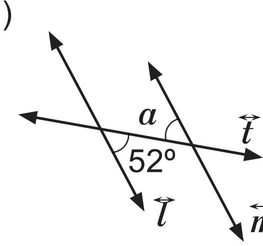
E

1. Determine en la figura los pares de rectas que son paralelas.

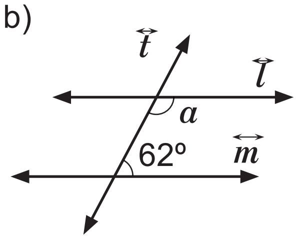


2. Determine a para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.

a)



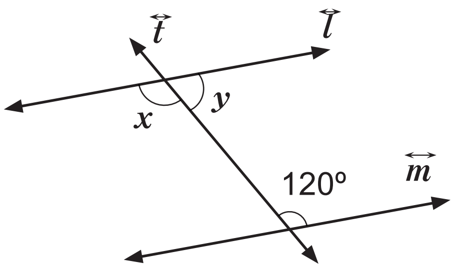
b)



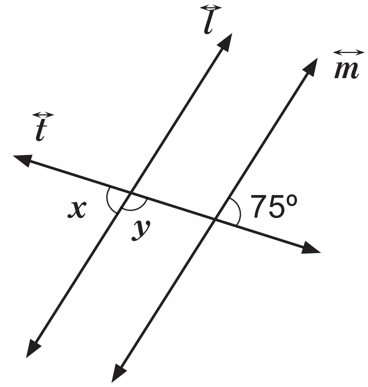
Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 1

1. En las figuras $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversal $\overleftrightarrow{t}$, calcule las medidas de $\angle x$ y $\angle y$.

a)

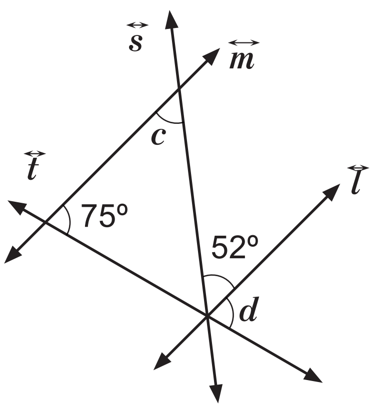


b)

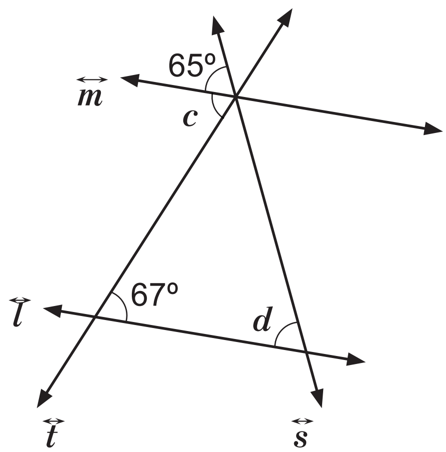


2. En las figuras $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, con transversales $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$. Calcule en cada inciso las medidas de $\angle c$ y $\angle d$.

a)



b)



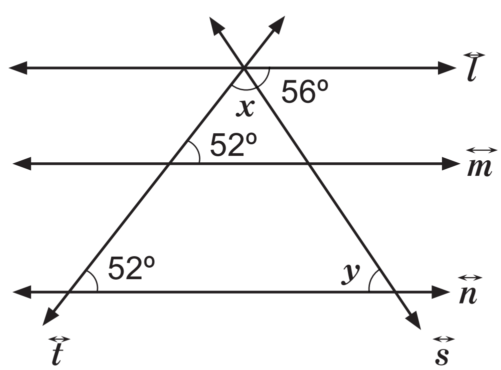
3. Conteste las siguientes preguntas, sabiendo que en la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, con transversales $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$.

a) ¿Por qué son paralelas $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$?

b) ¿Son paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{n}$?

c) ¿Cuáles son las medidas de $\angle x$ y $\angle y$?

d) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos del triángulo más grande?

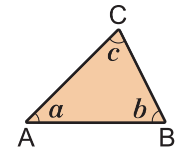


Sección 3: Ángulos internos y externos de un triángulo

Contenido 1: Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

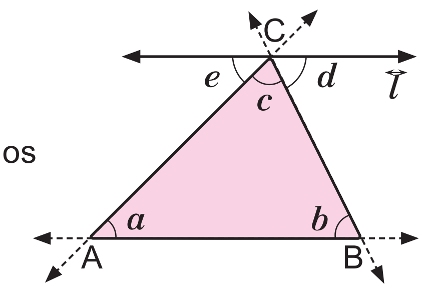
P

¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos del ΔABC?



S

Dado el ΔABC, para encontrar la suma de sus ángulos internos se siguen los pasos:



1. Se traza la recta que contiene al $\overline{AB}$.
2. Se construye la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por C, y se etiqueta con $\overleftrightarrow{l}$.
3. Se etiquetan con d y e las medidas de los ángulos formados por $\overleftrightarrow{l}$ y las transversales $\overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ respectivamente.
4. Se observa que:
   i. $e+d+c=180°$
   ii. $e=a$, porque $\angle e$ y $\angle a$ son alternos internos formados por las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ y la transversal $\overleftrightarrow{CA}$.
   iii. $b=d$, porque $\angle b$ y $\angle d$ son alternos internos formados por las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ y la transversal $\overleftrightarrow{CB}$.
5. De i, ii y iii resulta que
   $$a+b+c=180°$$

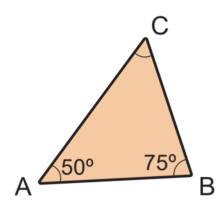
En conclusión, las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

C

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Ejemplo

Calcule $\measuredangle C$, sabiendo que $\measuredangle A=50°$ y $\measuredangle B=75°$.

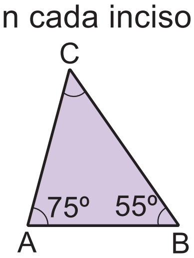


$$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$$
$$50°+75°+\measuredangle C=180°$$
$$125°+\measuredangle C=180°$$
$$\measuredangle C=180°-125°$$
$$\measuredangle C=\mathbf{55°}$$

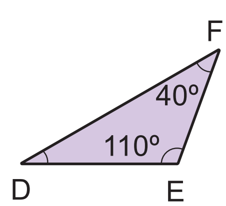
E

Calcule en cada inciso la medida del ángulo desconocido.

a)



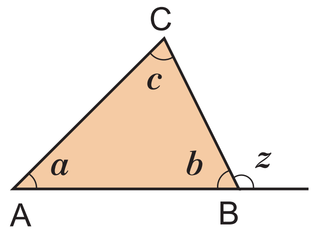
b)



Contenido 2: Teorema del ángulo externo

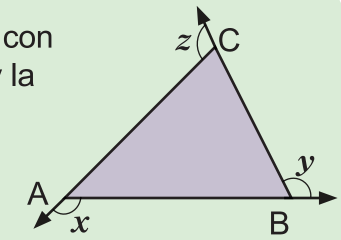
P

En la figura $\angle z$ es exterior al ΔABC, verifique que $a + c = z$.



Un ángulo que se forma con un lado de un triángulo y la prolongación de otro contiguo se llama **ángulo externo.**

$\angle x$, $\angle y$ y $\angle z$ son externos.



S

Para verificar que $a + c = z$ se observa que:

i. $b + z = 180°$, porque $\angle b$ y $\angle z$ forman un par lineal.

ii. $a + b + c = 180°$, porque $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$ son los ángulos internos del ΔABC.

De i y ii, se tiene que:

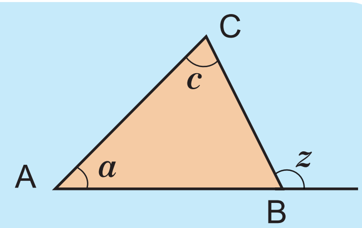
$$b + z = a + b + c$$
$$z = a + b + c - b$$
$$z = a + c$$

Por tanto, $a + c$ **es igual a** z.

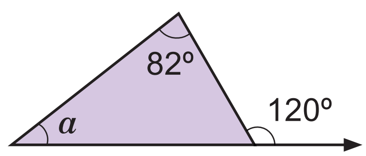
Dos ángulos son adyacentes o consecutivos si tienen el mismo vértice y un lado común. En la figura del problema, $\angle b$ y $\angle z$ son adyacentes.

C

En la figura, $\angle a$ y $\angle c$ son no adyacentes al $\angle z$.
La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a este.
Este resultado se conoce como **el teorema del ángulo externo**.



Ejemplo Dada la figura de la derecha, calcule a.



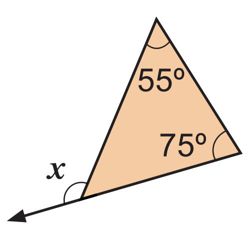
Por el teorema del ángulo externo, se tiene:

$$a + 82º = 120º$$
$$a = 120º - 82º$$
$$\mathbf{a = 38º}$$

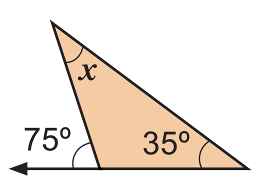
E

Calcule x utilizando la información de los siguientes triángulos:

a)



b)



Contenido 3: Suma de medidas de los ángulos internos de un polígono

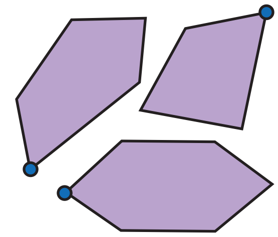
P

a) Trace las diagonales de cada polígono desde el vértice indicado.

b) ¿Cuántos triángulos se forman en cada polígono?

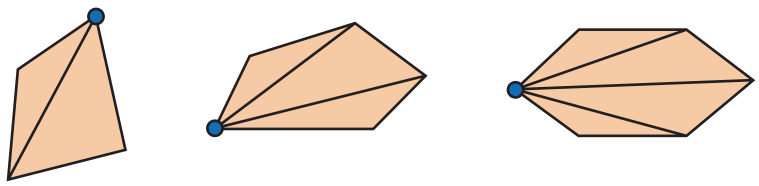
c) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos?

d) ¿Cuántos triángulos se forman en un polígono de n lados, al dibujar las diagonales desde un vértice fijo?



S

a) Trazando las diagonales en cada polígono desde el vértice indicado.



Número de lados	Número de triángulos
4	$4-2$
5	$5-2$
6	$6-2$

b) Se observa que en el cuadrilátero se forman 2 triángulos, en el pentágono se forman 3 y en el hexágono 4.

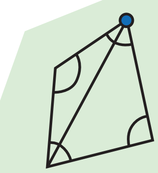
c) **Suma de los ángulos internos del cuadrilátero:** $(2)(180°)=(4-2)(180°)=$ **360°**

Suma de los ángulos internos del pentágono: $(3)(180°)=(5-2)(180°)=$ **540°**

Suma de los ángulos internos del hexágono: $(4)(180°)=(6-2)(180°)=$ **720°**

El factor 180° procede de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

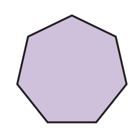
d) Se forman $n-2$ triángulos.


$(2)(180°)=360°$

C

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados es $(n-2)(180°)$.

Ejemplo Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un heptágono.



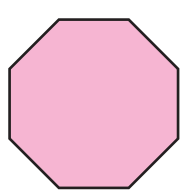
Se aplica la conclusión anterior con $n=7$.

$$\begin{aligned}(n-2)(180°) &= (7-2)(180°)\\ &= (5)(180°)\\ &= \mathbf{900°}\end{aligned}$$

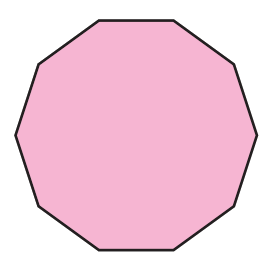
E

Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un:

a) Octágono



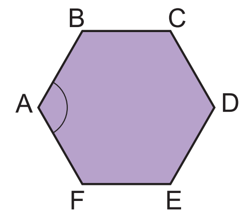
b) Decágono



Contenido 4: Medida de los ángulos internos de un polígono regular

P

Dado el hexágono regular de la derecha, calcule $\measuredangle A$.



S

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es $(n-2)(180°)$.

En este caso $n=6$, así que la suma de las medidas de los ángulos internos del hexágono es

$$(4)(180°)=720°.$$

Como el hexágono es regular, entonces sus ángulos internos tienen la misma medida, así que:

$$\begin{aligned}\measuredangle A &= \frac{720°}{6}\\ &=120°\end{aligned}$$

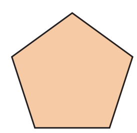
En conclusión, cada ángulo interno de un hexágono regular mide **120º**.

C

En un polígono regular de n lados, cualquiera de sus ángulos internos mide

$$\frac{(n-2)(180°)}{n}.$$

Ejemplo Calcule la medida de los ángulos internos de un pentágono regular.



Se utiliza la expresión $\frac{(n-2)(180°)}{n}$:

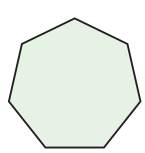
$$\begin{aligned}\frac{(5-2)180°}{5} &= \frac{(3)(180°)}{5}\\ &=\frac{540°}{5}\\ &=108°\end{aligned}$$

Por tanto, cada ángulo interno de un pentágono regular mide **108º**.

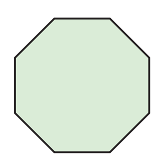
E

Calcule la medida de los ángulos internos de un:

a) Heptágono regular



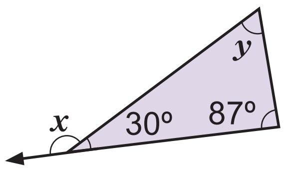
b) Octágono regular



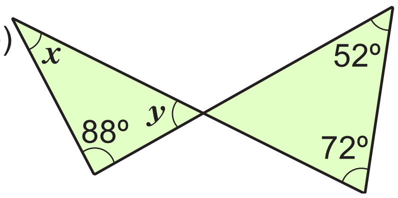
Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

1. Calcule en cada inciso x y y para las siguientes figuras:

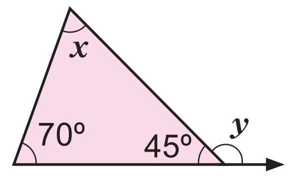
a)



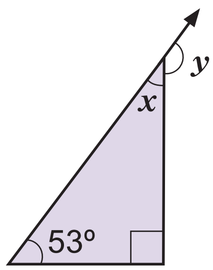
b)



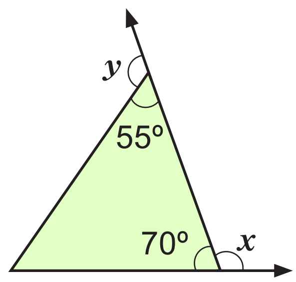
c)



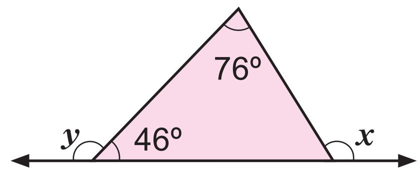
d)



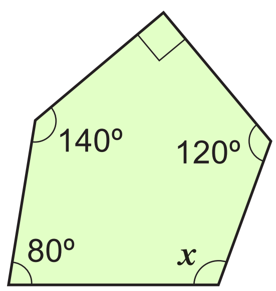
e)



f)

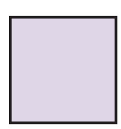


2. Calcule x utilizando la información dada en la figura.

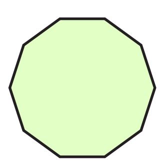


3. Calcule la medida de uno de los ángulos internos de un:

a) Cuadrado



b) Decágono regular



Unidad 6

Congruencia

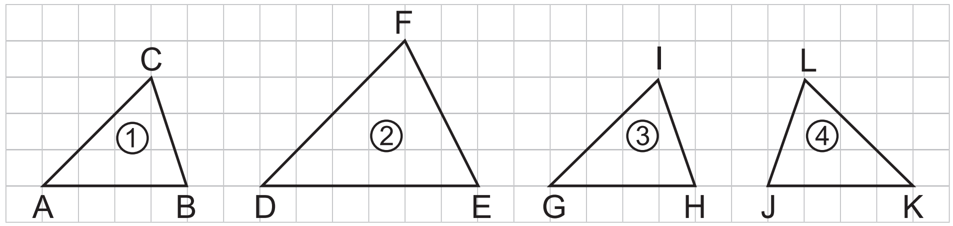
Sección 1	Criterios de congruencia de triángulos
Sección 2	Introducción a la demostración
Sección 3	Triángulo isósceles
Sección 4	Congruencia de triángulos rectángulos

Sección 1: Criterios de congruencia de triángulos

Contenido 1: Triángulos congruentes

P

Identifique cuáles de los triángulos del ② al ④ se superponen exactamente al triángulo ①.



S

Cada lado del ΔDEF es más grande que los lados del ΔABC, por lo cual no se pueden hacer coincidir dos vértices. Este triángulo no se superpone al ①.

Al superponer el triángulo ③ al ① se observa que:

G coincide con A, H coincide con B, I coincide con C.

Esto indica que ③ se superpone exactamente al ①.

Al rotar y superponer el triángulo ④ al ① se tiene:

K coincide con A, J coincide con B, L coincide con C.

Entonces ④ se superpone exactamente al ① .

Superponer es poner una cosa encima de otra.

C

Si dos triángulos se superponen exactamente, entonces coinciden sus lados y ángulos respectivos, estableciéndose una correspondencia entre ellos. En este caso los triángulos se llaman congruentes y se relacionan con el símbolo ≅.

Ejemplo Escriba la congruencia entre los triángulos del problema, utilizando el símbolo ≅.

Dado que en los triángulos ① y ③

G coincide con A, H coincide con B, I coincide con C,

se escribe **ΔABC≅ΔGHI**.

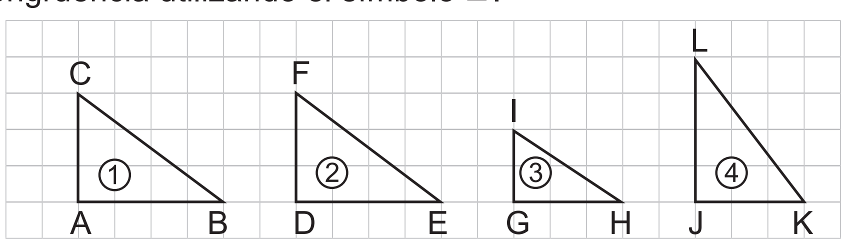
En el caso de los triángulos ① y ④, al concluirse que

K coincide con A, J coincide con B, L coincide con C,

entonces **ΔABC≅ΔKJL.**

E

1. Identifique cuáles de los triángulos del ② al ④ son congruentes al triángulo ①.
2. Escriba la congruencia utilizando el símbolo ≅.



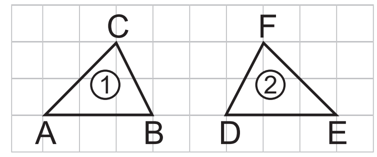
Contenido 2: Lados y ángulos correspondientes en triángulos congruentes

P

Los triángulos de la figura son congruentes. Rote y superponga el triángulo ② en el triángulo ①, y luego escriba:

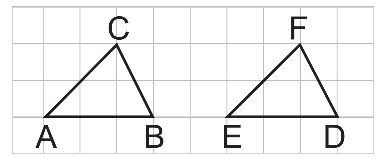
a) Los lados y ángulos que coinciden.

b) La congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.



S

a) En la figura de la derecha se muestra el triángulo ② ya rotado. Se observa que al superponerlo en ①, se tiene:



$\overline{AB}$ coincide con $\overline{ED}$

$\overline{BC}$ coincide con $\overline{DF}$

$\overline{AC}$ coincide con $\overline{EF}$

$\angle A$ coincide con $\angle E$

$\angle B$ coincide con $\angle D$

$\angle C$ coincide con $\angle F$

b) La congruencia de estos triángulos se escribe **$\Delta ABC \cong \Delta EDF$**.

C

En dos triángulos congruentes, al superponer uno en el otro:

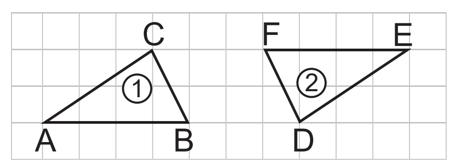
- Dos lados coincidentes se llaman **lados correspondientes.**
- Dos ángulos coincidentes se llaman **ángulos correspondientes.**

Ejemplo

Los triángulos de la figura son congruentes. Rote y superponga el triángulo ② en el ①. Luego escriba:

a) Los lados y ángulos correspondientes.

b) La congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.

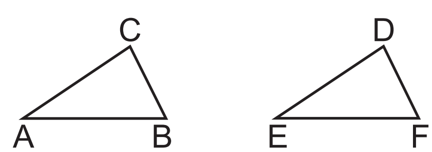


a) Los lados correspondientes son:

$\overline{AB}$ y $\overline{EF}$; $\overline{BC}$ y $\overline{FD}$; $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$

Los ángulos correspondientes son:

$\angle A$ y $\angle E$; $\angle B$ y $\angle F$; $\angle C$ y $\angle D$



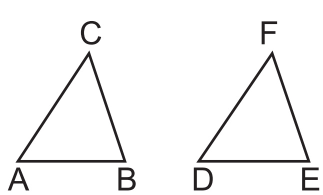
b) La congruencia de estos triángulos se escribe como **$\Delta ABC \cong \Delta EFD$**.

E

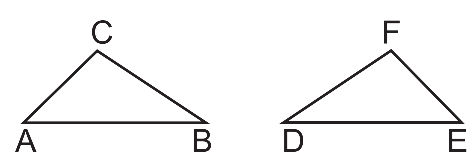
Los triángulos de cada inciso son congruentes. Escriba:

1. Los lados y ángulos correspondientes.
2. La congruencia entre los triángulos utilizando ≅.

a)



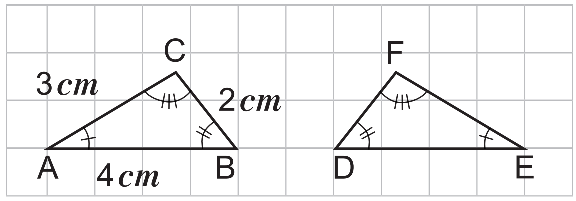
b)



Contenido 3: Definición de congruencia de triángulos

P

a) Si los triángulos de la derecha son congruentes, entonces:



DE = ☐

DF = ☐

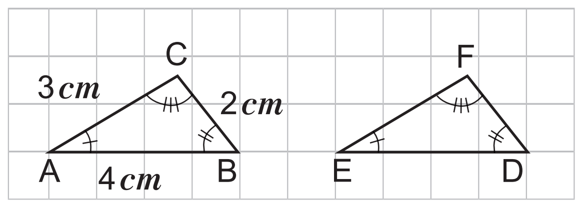
EF = ☐

Los ángulos que tienen la misma marca, tienen igual medida.

b) Escriba la congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.

S

a) Al ser los dos triángulos congruentes, se pueden superponer haciendo coincidir los vértices A, B,C con E, D, F respectivamente. De esto podemos darnos cuenta que las medidas de los lados correspondientes son:



DE = BA = 4 *cm*

DF = BC = 2 *cm*

EF = AC = 3 *cm*

b) La congruencia entre los triángulos se escribe **△ABC≅ △EDF**.

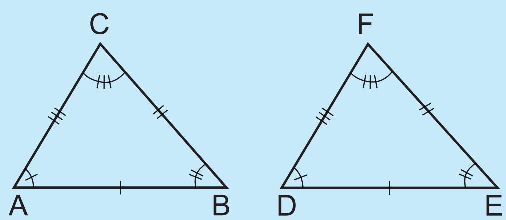
C

Los △ABC y △DEF son congruentes, si y solo si los lados y ángulos correspondientes tienen la misma medida.

De acuerdo a la figura:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ si y solo si } \begin{cases} AB = DE & \measuredangle A = \measuredangle D \\ BC = EF & \measuredangle B = \measuredangle E \\ AC = DF & \measuredangle C = \measuredangle F \end{cases}$$

"Si y solo si" significa equivalencia



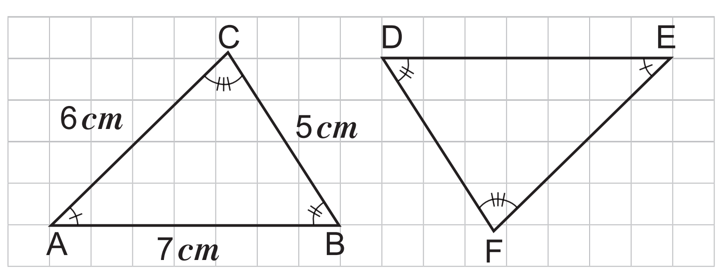
E

a) Si los triángulos de la figura son congruentes, entonces:

DE = ☐

EF = ☐

DF = ☐



b) Escriba la congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.

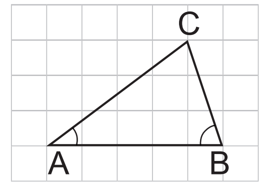
Contenido 4: Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:

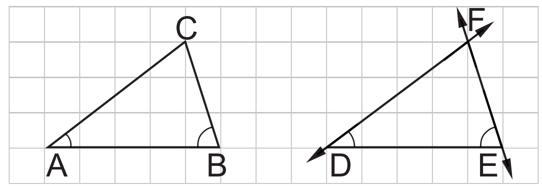
a) $DE = AB$
b) $\measuredangle D = \measuredangle A$
c) $\measuredangle E = \measuredangle B$

¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?



S

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud $DE = AB$ sobre la recta en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D. Así $\measuredangle D = \measuredangle A$.
3. Se traza una recta paralela a $\overline{BC}$ que pase por el punto E. Así $\measuredangle E = \measuredangle B$.
4. Se etiqueta con la letra F el punto de intersección de estas rectas.



De la figura, $EF = BC$, $DF = AC$ y $\measuredangle F = \measuredangle C$

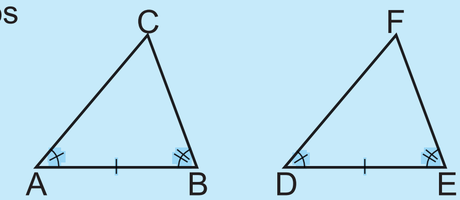
El ΔDEF se superpone exactamente al ΔABC, esto significa que $\boldsymbol{\Delta ABC \cong \Delta DEF}$.

C

Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

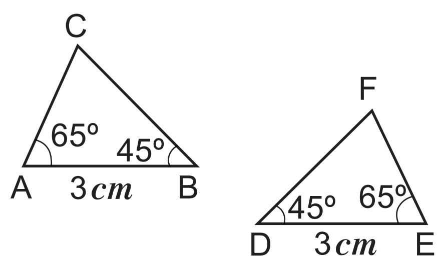
Dos triángulos son congruentes si tienen dos pares de ángulos correspondientes de igual medida y los lados incluidos entre ellos con la misma medida. De acuerdo a la figura:

$$\text{Si} \begin{cases} \measuredangle A = \measuredangle D \\ AB = DE, \\ \measuredangle B = \measuredangle E \end{cases} \text{entonces } \Delta ABC \cong \Delta DEF.$$



Ejemplo

Investigue si los triángulos dados son congruentes.

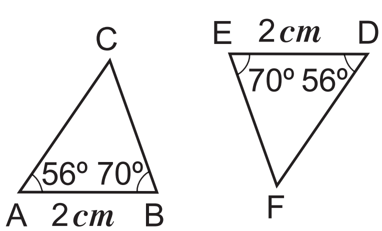


Como $\measuredangle A = \measuredangle E = 65°$, $AB = ED = 3\ cm$, y $\measuredangle B = \measuredangle D = 45°$, entonces por el criterio ALA, $\boldsymbol{\Delta ABC \cong \Delta EDF}$.

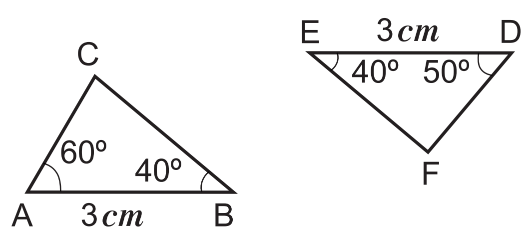
E

1. Investigue si las parejas de triángulos de los incisos a) y b) son congruentes.
2. Utilice el símbolo $\cong$ en el caso que los triángulos sean congruentes.

a)



b)



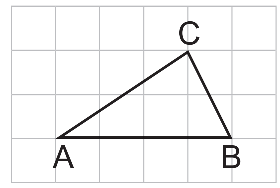
Contenido 5: Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un $\triangle DEF$, tal que:

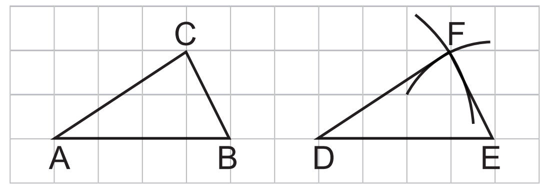
a) $DE = AB$
b) $EF = BC$
c) $DF = AC$

¿Son congruentes $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$?



S

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud $DE = AB$ sobre la recta en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza un arco de radio BC y centro E.
3. Se traza un arco de radio AC y centro D.
4. Se etiqueta con la letra F el punto de intersección de los arcos.



5. Se une el punto F con los extremos de $\overline{DE}$ y se forma el $\triangle DEF$.

De la figura, $\measuredangle D = \measuredangle A$, $\measuredangle E = \measuredangle B$ y $\measuredangle F = \measuredangle C$.

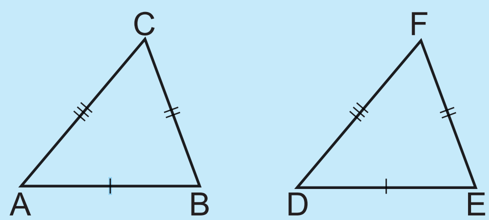
El $\triangle DEF$ se superpone exactamente al $\triangle ABC$, esto significa que $\boldsymbol{\triangle ABC \cong \triangle DEF}$.

C

Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

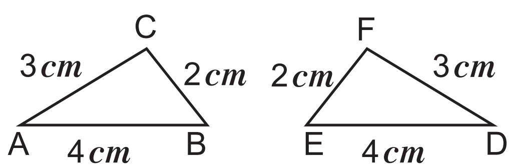
Dos triángulos son congruentes si tienen los lados correspondientes de igual medida. De acuerdo a la figura:

$$\text{Si } \begin{cases} AB = DE \\ BC = EF, \\ AC = DF \end{cases} \quad \text{entonces } \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son congruentes.

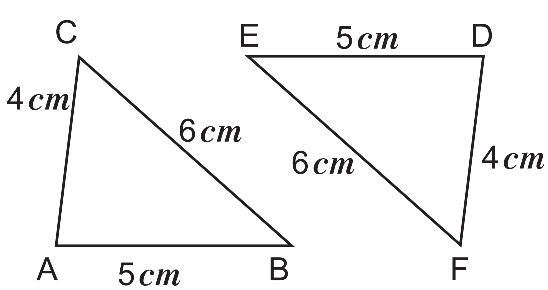


$AB = DE = 4\,cm$, $BC = EF = 2\,cm$, $AC = DF = 3\,cm$, luego por el criterio LLL resulta $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

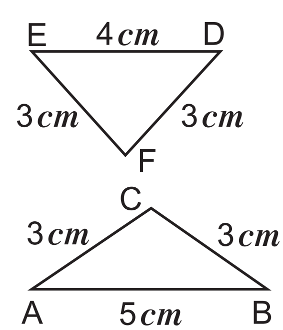
E

1. Investigue si las parejas de triángulos de los incisos a) y b) son congruentes.
2. Utilice el símbolo $\cong$ en el caso que los triángulos sean congruentes.

a)



b)



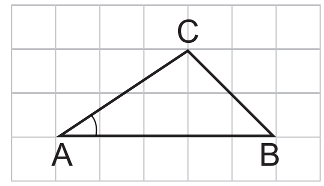
Contenido 6: Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:

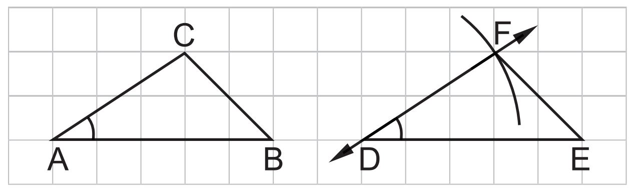
a) DE = AB
b) ∡A = ∡D
c) DF = AC

¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?



S

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE = AB sobre la recta en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D.
3. Se traza un arco de radio AC y centro D.
4. Se etiqueta con la letra F el punto de intersección del arco y la recta.
5. Se une el punto F con el punto E y se forma el ΔDEF.

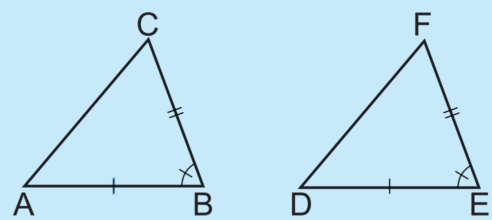


De la figura, EF = BC, ∡E = ∡B y ∡F = ∡C.
Como el ΔDEF se superpone exactamente al ΔABC, entonces **ΔABC ≅ ΔDEF**.

C

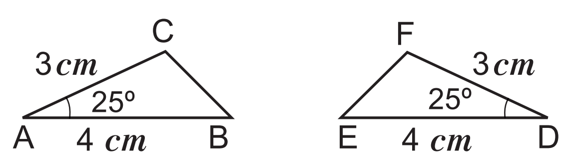
Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)
Dos triángulos son congruentes si tienen dos pares de lados correspondientes de igual medida y los ángulos incluidos entre ellos también de igual medida.
De acuerdo a la figura:

Si $\begin{cases} AB = DE \\ \measuredangle B = \measuredangle E, \\ BC = EF \end{cases}$ entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son congruentes.

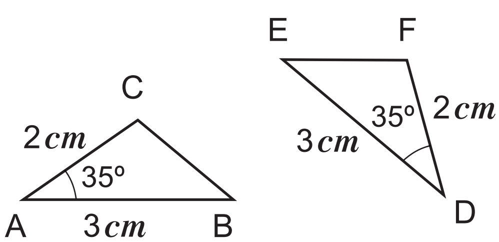


Según la figura, BA = ED = 4 *cm*, ∡A = ∡D = 25°, AC = DF = 3 *cm*, luego por el criterio LAL resulta **ΔBAC ≅ ΔEDF**.

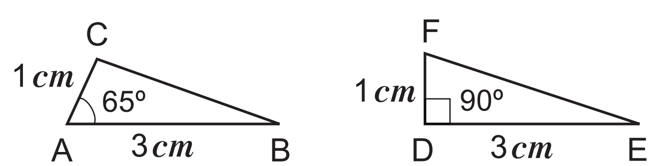
E

1. Investigue si las parejas de triángulos de los incisos a) y b) son congruentes.
2. Utilice el símbolo ≅ en el caso que los triángulos sean congruentes.

a)

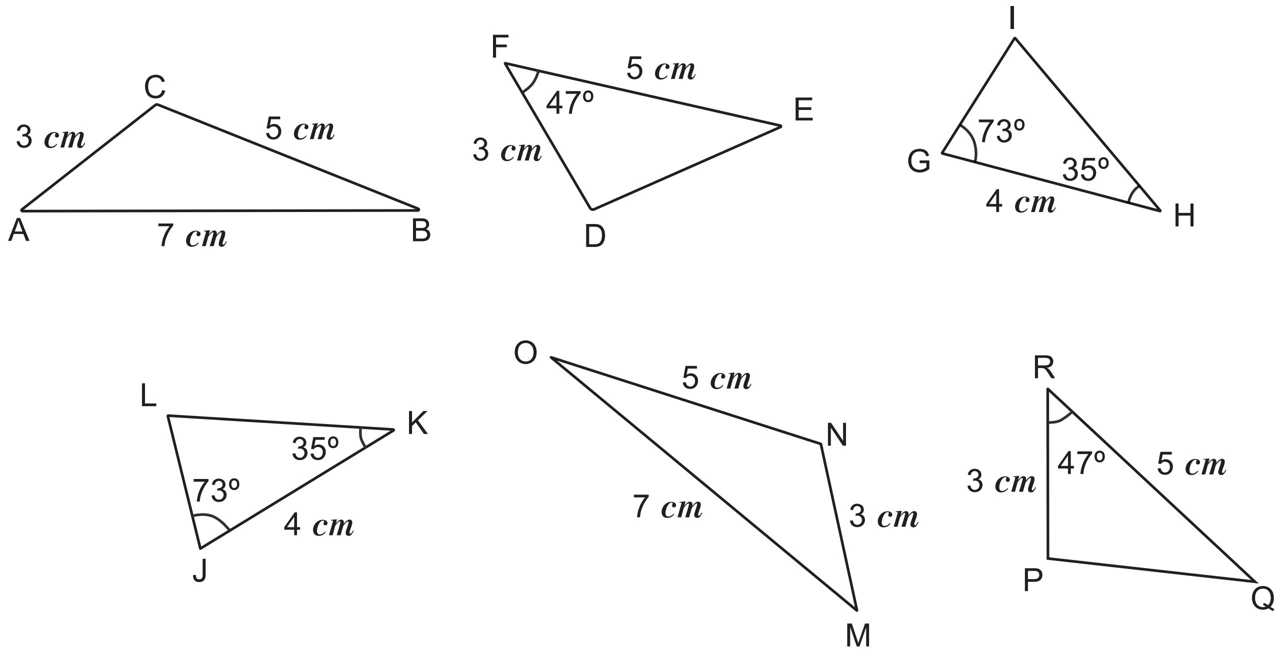


b)



Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 1

1. Escriba las parejas de triángulos que son congruentes utilizando el símbolo ≅. Justifique su respuesta indicando el criterio de congruencia utilizado.



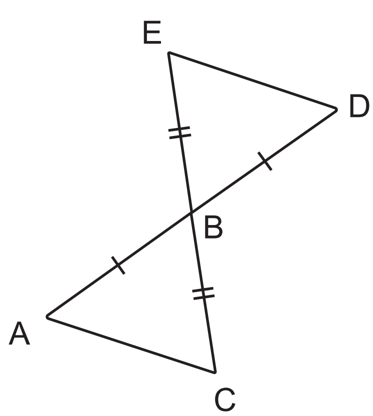
2. Utilice en cada inciso la figura para identificar el criterio que justifica:

a) $\triangle ABC \cong \triangle DBE$

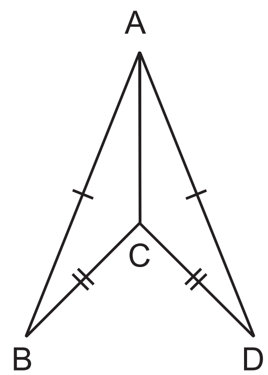
b) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

c) $\triangle ABC \cong \triangle DBC$

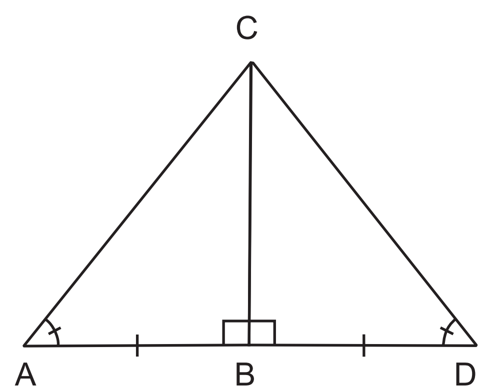
a)



b)



c)

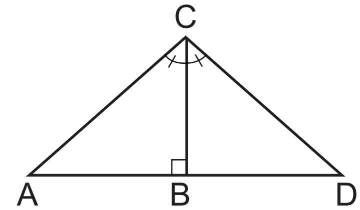


Sección 2: Introducción a la demostración

Contenido 1: Demostración de congruencia de triángulos utilizando ALA

P

En la figura, $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$ y $\overline{CB} \perp \overline{AD}$.
Escriba los pasos que deben seguirse para asegurar que $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.
Sugerencia: Utilice el criterio de congruencia ALA.



S

Pasos	Justificación
1. $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$	Dato
2. $BC = BC$	$\overline{BC}$ es común al ΔABC y ΔDBC
3. $\overline{CB} \perp \overline{AD}$	Dato
4. $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$	Concepto de ángulo recto y paso 3
5. $\Delta ABC \cong \Delta DBC$	ALA en pasos 1, 2 y 4

C

En geometría, una **demostración** es una secuencia lógica de argumentos deductivos que aseguran la verdad de una afirmación.

La afirmación del problema puede escribirse así:

Si $\underbrace{\measuredangle ACB = \measuredangle DCB \text{ y } \overline{CB} \perp \overline{AD}}_{\text{Datos}}$, entonces $\underbrace{\Delta ABC \cong \Delta DBC.}_{\text{Lo que se quiere asegurar}}$

En este caso se tiene que:

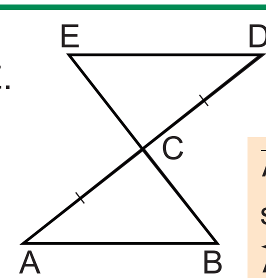
- Los datos constituyen la **hipótesis.**
- Lo que se quiere asegurar se conoce como **tesis** o conclusión.

E

En la figura, si $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ y $AC = DC$, entonces $\Delta ACB \cong \Delta DCE$.

a) Identifique la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
si y solo si
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$

Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$	$\boxed{}$
2. $\measuredangle A = \boxed{}$	Por ser alternos internos entre paralelas
3. $AC = DC$	$\boxed{}$
4. $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE$	$\boxed{}$
5. $\boxed{} \cong \boxed{}$	ALA en pasos 2, 3 y 4

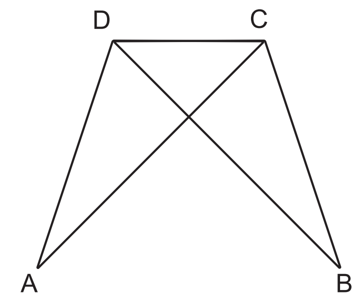
Contenido 2: Demostración de congruencia de triángulos utilizando LLL

P

En la figura, si AD = BC y AC = BD, entonces $\triangle ADC \cong \triangle BCD$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AD = BC	
2. AC = BD	
3. ☐ = ☐	$\overline{DC}$ es común al $\triangle ADC$ y $\triangle BCD$
4. $\triangle ADC \cong \triangle BCD$	

S

a) **Hipótesis:** AD = BC

AC = BD

Tesis: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

b)

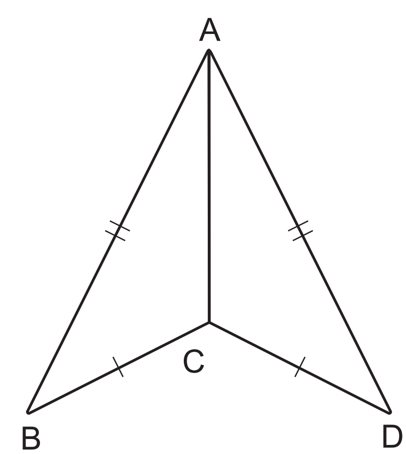
Pasos	Justificación
1. AD = BC	Hipótesis
2. AC = BD	Hipótesis
3. DC = CD	$\overline{DC}$ es común al $\triangle ADC$ y $\triangle BCD$
4. $\triangle ADC \cong \triangle BCD$	LLL en pasos 1, 2 y 3

E

En la figura, si AB = AD y BC = DC, entonces $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AB = AD	
2. BC = DC	
3. ☐ = ☐	$\overline{AC}$ es común al $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$
4. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	

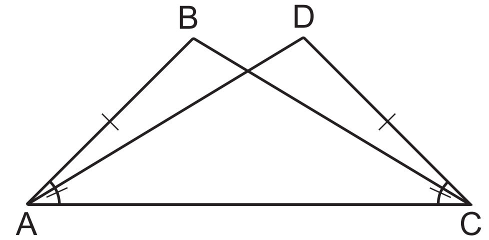
Contenido 3: Demostración de congruencia de triángulos utilizando LAL

P

En la figura, si BA = DC y $\measuredangle$BAC = $\measuredangle$DCA, entonces $\triangle$BAC $\cong$ $\triangle$DCA.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. BA = DC	
2. $\measuredangle$BAC = $\measuredangle$DCA	
3. AC = CA	
4. ☐ $\cong$ ☐	LAL en pasos 1, 2 y 3

S

a) **Hipótesis:** BA = DC
$\measuredangle$BAC = $\measuredangle$DCA

Tesis: $\triangle$BAC $\cong$ $\triangle$DCA

b)

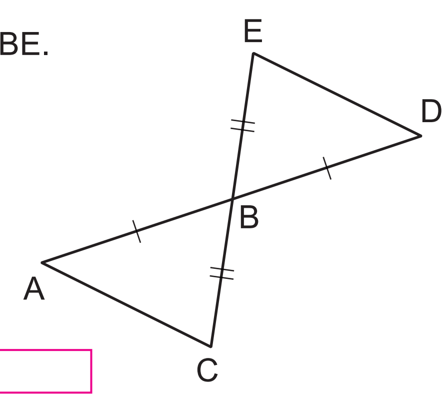
Pasos	Justificación
1. BA = DC	Hipótesis
2. $\measuredangle$BAC = $\measuredangle$DCA	Hipótesis
3. AC = CA	$\overline{AC}$ es común al $\triangle$BAC y $\triangle$DCA
4. $\triangle$BAC $\cong$ $\triangle$DCA	LAL en pasos 1, 2 y 3

E

En la figura, si AB = DB y BC = BE, entonces $\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$DBE.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AB = DB	
2. ☐ = ☐	Son opuestos por el vértice
3. BC = BE	
4. ☐ $\cong$ $\triangle$DBE	

Sección 3: Triángulo isósceles

Contenido 1: Teorema del triángulo isósceles

Definición: Un triángulo que tiene dos lados con la misma medida se llama **triángulo isósceles**.

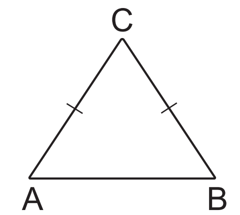
P

Si el $\triangle ACB$ es isósceles con $AC = BC$, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.

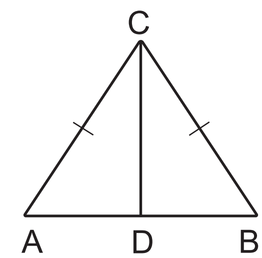
Sugerencia:
Trace la bisectriz $\overline{CD}$ del $\angle C$, y pruebe que $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.



S

a) **Hipótesis:** $AC = BC$ ($\triangle ACB$ es isósceles) **Tesis:** $\measuredangle A = \measuredangle B$

Pasos	Justificación
1. $AC = BC$	Hipótesis
2. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	$\overline{CD}$ es bisectriz de $\angle C$
3. $CD = CD$	$\overline{CD}$ es común al $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$
4. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$	LAL en pasos 1, 2 y 3
5. $\measuredangle A = \measuredangle B$	$\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (Paso 4)

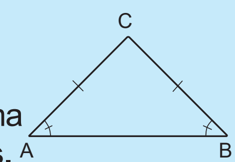


C

Si el $\triangle ABC$ es isósceles con $AC = BC$, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B$.

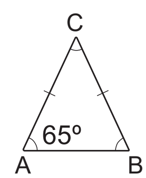
$\angle A$ y $\angle B$ se llaman ángulos basales.

En otras palabras, los ángulos basales de un triángulo isósceles tienen la misma medida. A este resultado se le conoce como **Teorema del triángulo isósceles.**



Ejemplo

El triángulo de la figura es isósceles.
Encuentre $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.



En la figura $\measuredangle A = \measuredangle B$, entonces $\measuredangle B = 65°$. Por otra parte, la suma de las medidas de los tres ángulos es 180°, así que:

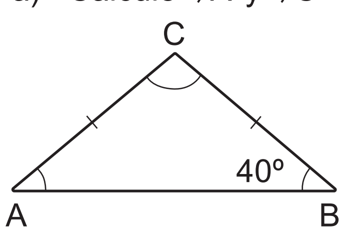
$$65° + 65° + \measuredangle C = 180°$$
$$130° + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle C = 180° - 130°$$
$$\measuredangle C = 50°$$

Por tanto, $\measuredangle$**B = 65° y** $\measuredangle$**C = 50°**.

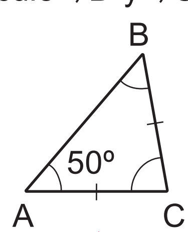
E

Sabiendo que el triángulo de cada inciso es isósceles:

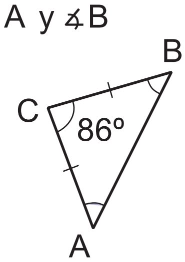
a) Calcule $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$



b) Calcule $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$



c) Calcule $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$



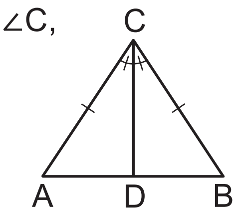
Contenido 2: Propiedades de la bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida en un triángulo isósceles

P

En la figura el $\triangle ABC$ es isósceles con $AC = BC$. Si $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$, entonces $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.



S

a) **Hipótesis:** $AC = BC$ **Tesis:** $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\overline{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$

b)

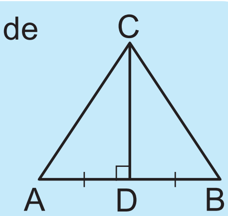
Pasos	Justificación
1. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$	Paso 4 en la demostración del contenido anterior (LAL)
2. $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB$	Definición de congruencia en 1
3. $\measuredangle CDA + \measuredangle CDB = 180^\circ$	Son ángulos suplementarios
4. $2(\measuredangle CDA) = 180^\circ$	Pasos 2 y 3
5. $\measuredangle CDA = 90^\circ$	Dividiendo por 2 ambos lados de la igualdad en 4
6. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	Definición de perpendicularidad

Se observa que al ser $\triangle ACD \cong \triangle BCD$, también $AD = BD$.

C

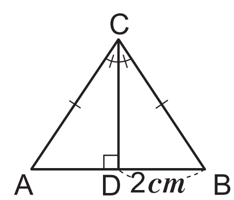
En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida:

- Es perpendicular al lado opuesto.
- Intercepta al lado opuesto en su punto medio.



Ejemplo

El triángulo de la derecha es isósceles, con $AC = BC$ y $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$. Calcule AB.

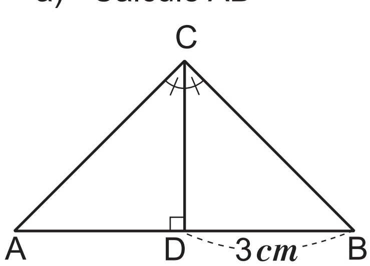


Al ser $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$, entonces D es punto medio de $\overline{AB}$, de donde $AD = BD = 2\ cm$.
Por tanto, $AB = 2AD = (2)(2) = 4(cm)$.

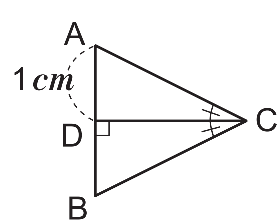
E

Sabiendo que el triángulo de cada inciso es isósceles, con $AC = BC$ y $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$:

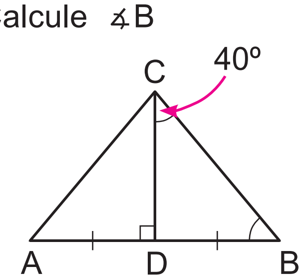
a) Calcule AB



b) Calcule AB



c) Calcule $\measuredangle B$



Contenido 3: Recíproco del teorema del triángulo isósceles

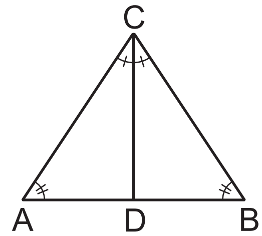
P

En el $\triangle ABC$, si $\measuredangle A = \measuredangle B$, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.

Sugerencia: Trace la bisectriz $\overline{CD}$ del $\angle C$.



S

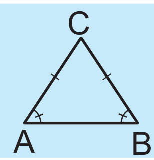
a) **Hipótesis:** $\measuredangle A = \measuredangle B$ **Tesis:** $AC = BC$ ($\triangle ABC$ es isósceles)

b)

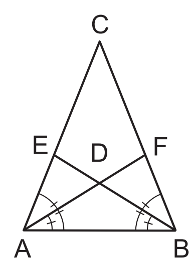
Pasos	Justificación
1. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Hipótesis
2. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	Definición de bisectriz
3. $CD = CD$	$\overline{CD}$ es común al $\triangle CDA$ y $\triangle CDB$
4. $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB$	Los ángulos internos de un triángulo suman 180°, y pasos 1 y 2
5. $\triangle CDA \cong \triangle CDB$	ALA en pasos 2, 3 y 4
6. $AC = BC$	Definición de congruencia (paso 5)
7. $\triangle ABC$ es isósceles	Definición de triángulo isósceles en 6

C

Recíproco del teorema del triángulo isósceles
Un triángulo con dos ángulos de igual medida es isósceles.



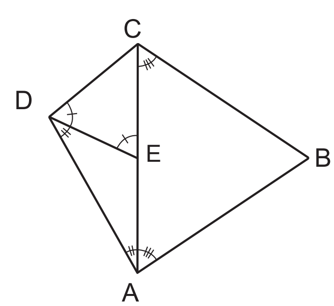
Ejemplo En la figura de la derecha identifique los triángulos que son isósceles.



En la figura $\measuredangle DAB = \measuredangle DBA$, por lo cual el $\triangle ABD$ es isósceles.
De la misma manera se tiene que $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA$, y en consecuencia el $\triangle ABC$ es isósceles.
Los triángulos isósceles de la figura son $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$.

E

Identifique en la figura los triángulos que son isósceles.



Contenido 4: Triángulo equilátero

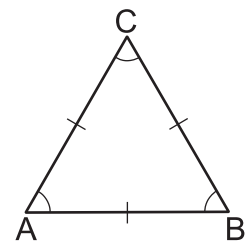
P

Si el $\triangle ABC$ es equilátero, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$.

Sugerencia: $AB = BC = AC$, ya que el $\triangle ABC$ es equilátero.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.



S

a) **Hipótesis:** $AB = BC = AC$ ($\triangle ABC$ es equilátero)

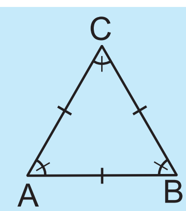
Tesis: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$

b) Un triángulo equilátero, al tener al menos dos lados de igual medida, es isósceles y cumple las propiedades de estos.

Pasos	Justificación
1. $AC = BC$	Hipótesis
2. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Teorema del triángulo isósceles
3. $AB = AC$	Hipótesis
4. $\measuredangle B = \measuredangle C$	Teorema del triángulo isósceles
5. $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$	Por 2 y 4

C

Los ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida y como la suma de las medidas de los tres ángulos es 180°, entonces cada uno de ellos mide 60°.

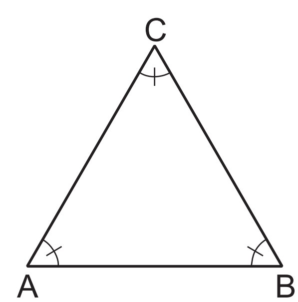


E

En el $\triangle ABC$, si $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$, entonces el $\triangle ABC$ es equilátero.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.

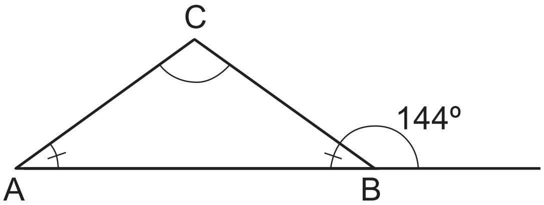


Pasos	Justificación
1. $\measuredangle A = \measuredangle B$	
2. $BC = AC$	
3. $\measuredangle B = \measuredangle C$	
4. $AC = \boxed{}$	
5. $BC = AC = AB$	Por 2 y 4
6. $\triangle ABC$ es equilátero	

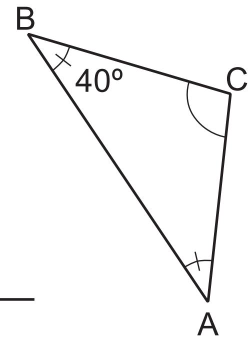
Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

1. Sabiendo que cada uno de los siguientes triángulos es isósceles con AC = BC, calcule:

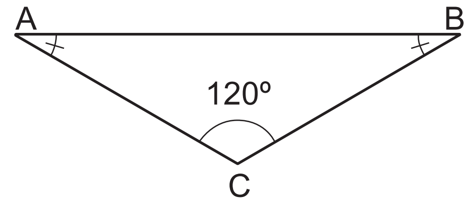
a) ∡A y ∡C



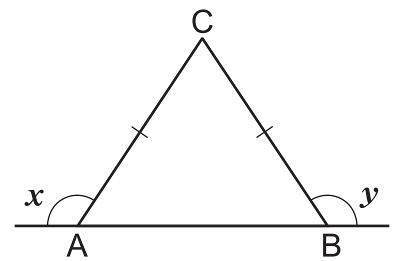
b) ∡A y ∡C



c) ∡A y ∡B



2. Si el triángulo de la derecha es isósceles con AC = BC, entonces $x = y$.

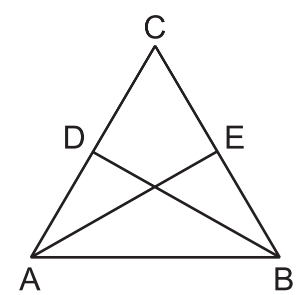


a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. AC = BC	
2. ∡A = ∡B	
3. x + ∡A = $\boxed{}$ = y + ∡B	
4. $x = y$	

3. En la figura, si AC = BC y AD = BE, entonces BD = AE.



a) Escriba la hipótesis y la tesis.

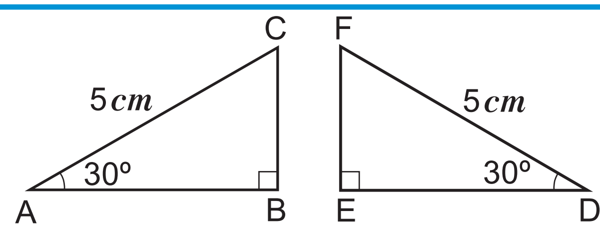
b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. AC = BC	
2. AD = $\boxed{}$	
3. ∡A = ∡B	
4. AB = $\boxed{}$	$\overline{AB}$ es común al ΔDAB y ΔEBA
5. ΔDAB ≅ ΔEBA	
6. $\boxed{}$ = $\boxed{}$	Definición de congruencia (paso 5)

Contenido 1: Criterio de congruencia Hipotenusa – Ángulo (HA)

P

Los triángulos rectángulos de la figura son congruentes, ¿por qué?



S

En la figura $\measuredangle A = 30°$ y $\measuredangle D = 30°$. Como los triángulos son rectángulos, se tiene $\measuredangle B = 90°$ y $\measuredangle E = 90°$.

Luego,

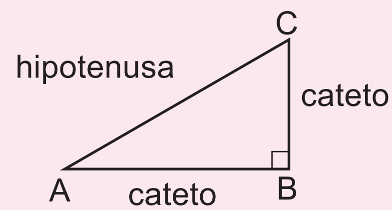
$$
\begin{aligned}
30° + 90° + \measuredangle C &= 180° \\
120° + \measuredangle C &= 180° \\
\measuredangle C &= 180° - 120° \\
\measuredangle C &= 60°
\end{aligned}
$$

De la misma manera $\measuredangle F = 60°$, por tanto $\measuredangle C = \measuredangle F$, que agregado a

$$
\begin{aligned}
\measuredangle A &= \measuredangle D \\
AC &= DF,
\end{aligned}
$$

se aplica ALA, y resulta que efectivamente $\Delta ACB \cong \Delta DFE$.

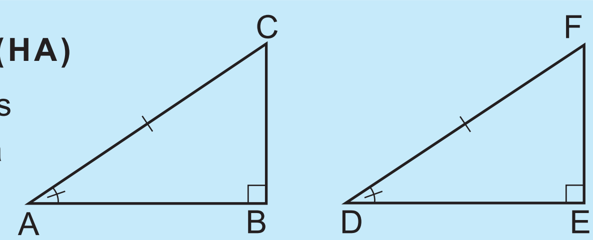
El lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo se llama **hipotenusa.** Los otros lados se llaman **catetos**.



C

Criterio de congruencia Hipotenusa – Ángulo (HA)

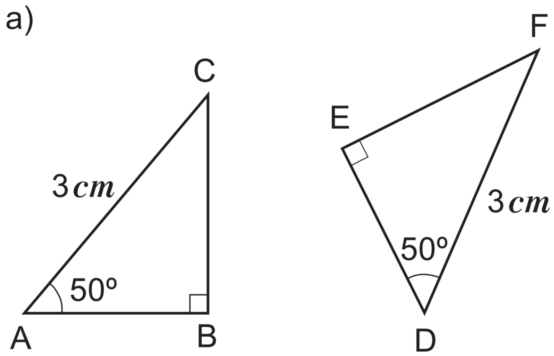
Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus hipotenusas y un par de ángulos agudos tienen la misma medida.



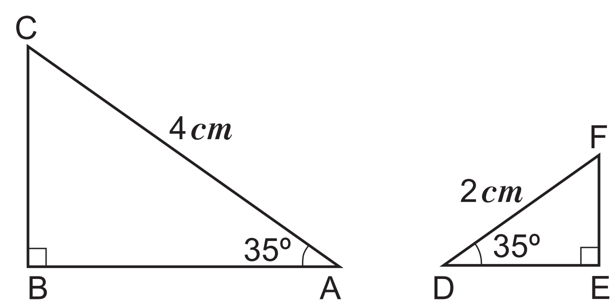
E

Identifique cuáles de las siguientes parejas de triángulos son congruentes, justificando su respuesta:

a)



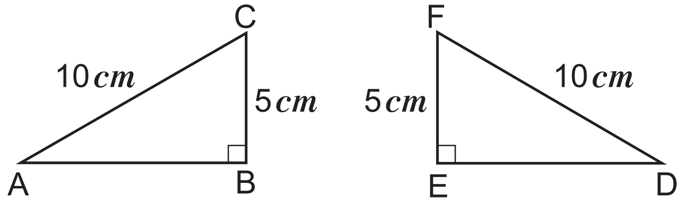
b)



Contenido 2: Criterio de congruencia Hipotenusa – Cateto (HC)

P

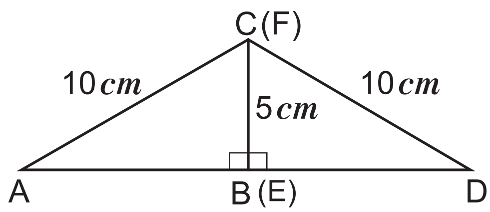
Los triángulos rectángulos de la figura son congruentes, ¿por qué?



S

Como BC = EF = 5 *cm*, se pueden hacer coincidir los catetos con medida de 5 *cm*.

Así se tiene la siguiente figura:



Se observa que el ΔACD es isósceles, con B entre A y D, y $\overline{CB} \perp \overline{AD}$, por lo cual $\overline{CB}$ es la bisectriz del ∠C.

En consecuencia, B es el punto medio de $\overline{AD}$, es decir AB = DB (AB = DE), que ligado con,

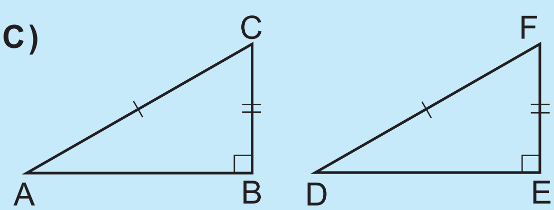
AC = DF
CB = FE,

por LLL se deduce que **ΔACB ≅ ΔDFE**.

C

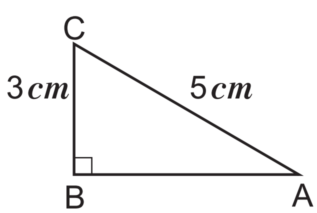
Criterio de congruencia Hipotenusa – Cateto (HC)

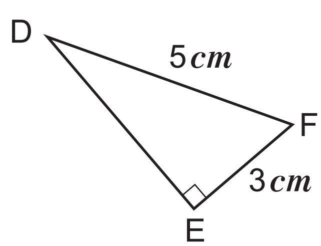
Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus hipotenusas y un par de catetos tienen la misma medida.

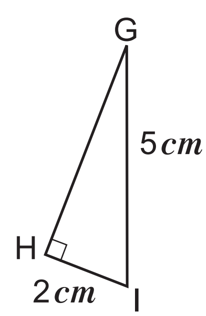


E

Identifique cuál de los triángulos es congruente al ΔACB, justificando su respuesta, y escriba la congruencia utilizando el símbolo ≅.

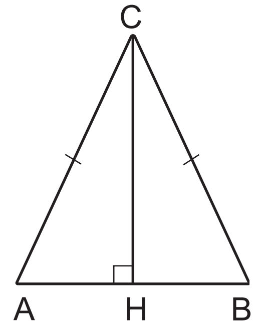






Contenido 3: Comprobemos lo aprendido 3

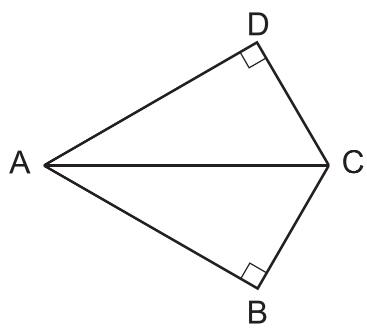
1. En la figura de la derecha, si el $\triangle ABC$ es isósceles con $AC = BC$ y $\measuredangle AHC = 90°$, entonces $\triangle ACH \cong \triangle BCH$.



a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $AC = BC$	
2. $\triangle ACH$ es triángulo rectángulo	$\measuredangle AHC = 90°$
3. $\triangle BCH$ es triángulo rectángulo	
4. $CH =$	$\overline{CH}$ es común al $\triangle ACH$ y $\triangle BCH$
5. $\triangle ACH \cong \triangle BCH$	

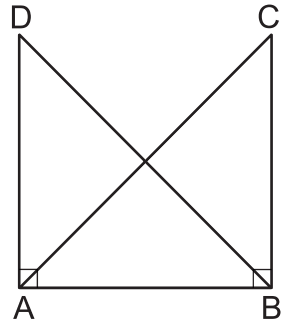
2. En la figura, si $\overline{AC}$ es la bisectriz del $\angle BAD$, entonces $\triangle CAD \cong \triangle CAB$.



a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $\triangle CAD$ y $\triangle CAB$ son triángulos rectángulos	
2. $\overline{AC}$ es bisectriz de $\angle BAD$	
3. $\measuredangle CAD =$	
4. $AC =$	$\overline{AC}$ es común al $\triangle CAD$ y $\triangle CAB$
5. $\cong$	HA en pasos 1, 3 y 4

3. En la figura, si DB = CA, entonces AD = BC.



a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración de AD = BC.

Pasos	Justificación
1. $\triangle$DBA y $\triangle$CAB son triángulos rectángulos	$\boxed{}$
2. DB = CA	$\boxed{}$
3. AB = $\boxed{}$	$\overline{AB}$ es común al $\triangle$DBA y $\triangle$CAB
4. $\boxed{} \cong \boxed{}$	$\boxed{}$
5. AD = BC	$\boxed{}$

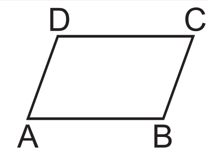
Unidad 7

Paralelogramos

Sección 1: Propiedades de los paralelogramos

Contenido 1: Introducción a las propiedades de los paralelogramos

Definición: Un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos, se llama **paralelogramo.**

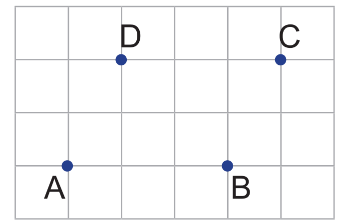


En la figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, es decir, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Para denotar el paralelogramo ABCD, se escribe ▱ ABCD.

P

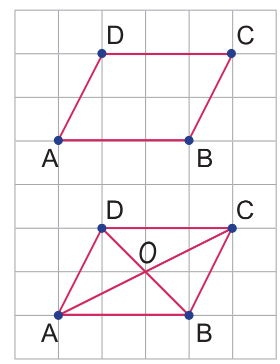
Forme un cuadrilátero uniendo los puntos dados y responda las siguientes preguntas.



a) ¿Es un paralelogramo el cuadrilátero formado ABCD?
b) ¿Son iguales las medidas de sus lados opuestos?
c) ¿Son iguales las medidas de sus ángulos opuestos?
d) ¿Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en su punto medio?

S

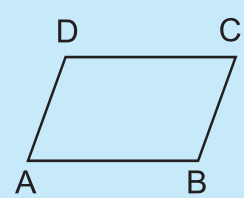
El cuadrilátero que se forma al unir los puntos se muestra a la derecha.



a) En la figura puede comprobarse con regla y cartabón que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, por lo cual el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.
b) Midiendo se encuentra que AD = BC y AB = DC.
c) En efecto, usando un transportador se tiene que $\measuredangle A = \measuredangle C$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$.
d) Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, y midiendo con una regla se comprueba que O es el punto medio de las diagonales.

C

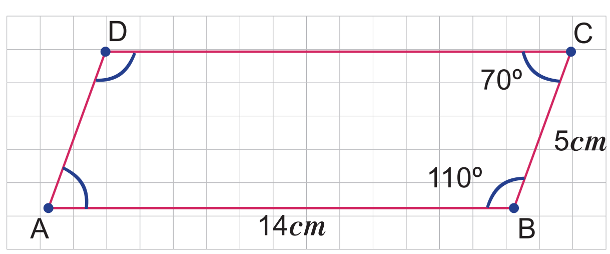
En todo paralelogramo se verifican las siguientes propiedades:



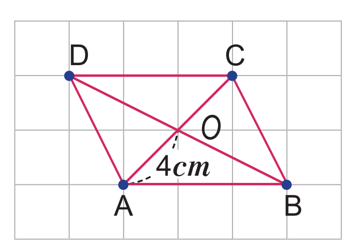
1. Ambos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Los lados opuestos tienen la misma medida.
3. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
4. Las diagonales se interceptan en su punto medio.

E

a) Dado el ▱ ABCD, calcule $\measuredangle A$, $\measuredangle D$, AD y DC.



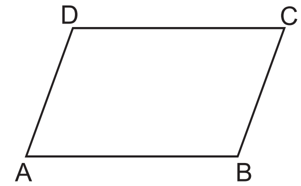
b) Dado el ▱ ABCD, calcule AC.



Contenido 2: Igualdad de medidas de los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo

P

Si un cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces sus lados opuestos tienen la misma medida.



a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Realice la demostración utilizando las siguientes sugerencias:

- Trace la diagonal $\overline{AC}$.
- Demuestre que $\triangle CAB \cong \triangle ACD$.
- Demuestre que $AD = BC$ y $AB = DC$.

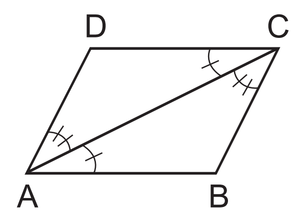
S

a) **Hipótesis:**

El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, lo cual por definición significa que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Tesis:

Los lados opuestos tienen la misma medida, es decir $AD = BC$ y $AB = DC$.



b) Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se forman los $\triangle CAB$ y $\triangle ACD$ como puede verse en la figura de la derecha.

Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$	$\angle BAC$ y $\angle DCA$ son alternos internos, $\overleftrightarrow{AC}$ una transversal y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
3. $CA = AC$	$\overline{CA}$ es común al $\triangle CAB$ y $\triangle ACD$
4. $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$	$\angle BCA$ y $\angle DAC$ son alternos internos por ser $\overleftrightarrow{AC}$ una transversal y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
5. $\triangle CAB \cong \triangle ACD$	ALA en 2, 3 y 4
6. $CB = AD$ y $AB = CD$	$\triangle CAB \cong \triangle ACD$ (en 5)
7. $AD = BC$ y $AB = DC$	$CB = BC$, $CD = DC$

C

Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma medida.

E

Si un cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces los ángulos opuestos tienen la misma medida. Para demostrar esta propiedad, utilice:

a) Los pasos 2. y 4. de la solución del problema y justifique por qué $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$.

b) El paso 5. de la solución del problema y justifique por qué $\measuredangle CBA = \measuredangle CDA$.

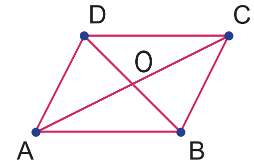
Contenido 3: Propiedad de las diagonales de un paralelogramo

P

Si un cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces las diagonales se cortan en su punto medio.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Realice la demostración utilizando las siguientes sugerencias:

- Demuestre que $\Delta ABO \cong \Delta CDO$.
- Demuestre que $AO = CO$ y $BO = DO$.



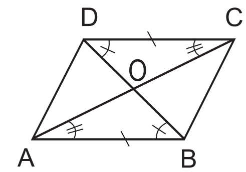
S

a) **Hipótesis:**

El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, es decir, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Tesis:

Las diagonales se cortan en su punto medio, es decir, $AO = CO$ y $BO = DO$.



b)

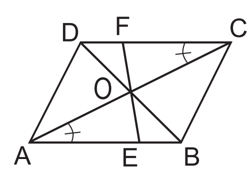
Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle ABO = \measuredangle CDO$	$\angle ABO$ y $\angle CDO$ son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y la transversal $\overleftrightarrow{BD}$
3. $BA = DC$	Lados opuestos de un paralelogramo, tienen la misma medida
4. $\measuredangle BAO = \measuredangle DCO$	$\angle BAO$ y $\angle DCO$ son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AC}$
5. $\Delta ABO \cong \Delta CDO$	ALA en 2, 3 y 4
6. $AO = CO$ y $BO = DO$	$\Delta ABO \cong \Delta CDO$ (en 5)

C

En un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

E

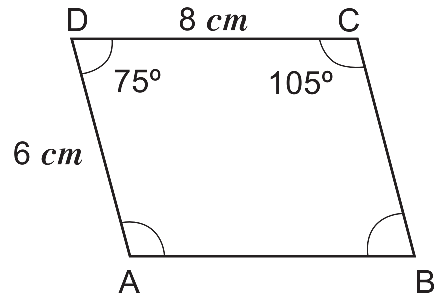
Dada la figura de la derecha, si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces $\Delta AOE \cong \Delta COF$.
Complete la demostración.



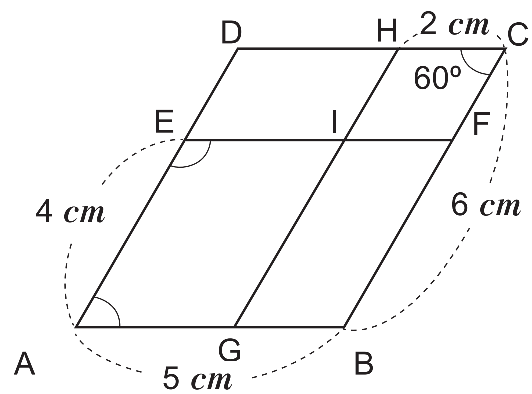
Pasos	Justificación
1. $\measuredangle AOE = \boxed{\quad}$	$\angle AOE$ y $\angle COF$ son opuestos por el vértice
2. $AO = CO$	$\boxed{\quad}$
3. $\measuredangle EAO = \boxed{\quad}$	$\angle EAO$ y $\angle FCO$ son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AC}$
4. $\Delta AOE \cong \Delta COF$	$\boxed{\quad}$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 1

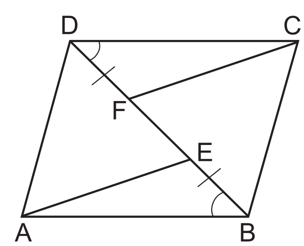
1. En el ▱ABCD de la derecha, calcule AB, BC, ∡A y ∡B.



2. Sea el ▱ABCD de la derecha.
   $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{GH}$.
   Calcule EI, IH, ∡A y ∡AEF.



3. Sea el ▱ABCD de la derecha.
   Si BE = DF, complete la demostración de que AE = CF.
   Sugerencia: Demuestre que $\Delta ABE \cong \Delta CDF$.



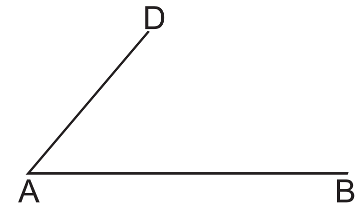
Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. BE = DF	☐
3. ∡ABE = ☐	∠ABE y ∠CDF son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y la transversal $\overleftrightarrow{BD}$
4. AB = DC	☐
5. $\Delta ABE \cong$ ☐	LAL en pasos 2., 3. y 4.
6. AE = CF	☐

Sección 2: Condiciones para ser paralelogramo

Contenido 1: Condición sobre los lados opuestos de un cuadrilátero

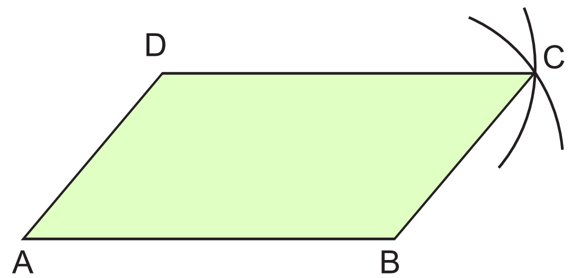
P

Dada la figura de la derecha, determine el punto C tal que en el cuadrilátero ABCD se cumpla que AB = DC y AD = BC.
¿Es un paralelogramo el cuadrilátero?



S

1. Trace un arco de centro B y radio AD.
2. Trace un arco de centro D y radio AB.
3. Etiquete el punto de intersección de los arcos con la letra C.
4. Forme el cuadrilátero ABCD.
5. Utilice regla y verifique que AB = DC y AD = BC.
6. Utilice regla y cartabón, y verifique que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

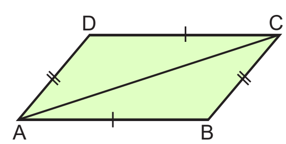


C1

Dados dos segmentos con un mismo extremo y que no están en la misma recta, es posible construir un cuadrilátero cuyos lados opuestos tienen la misma medida, en tal caso el cuadrilátero es un paralelogramo.

E

En la figura, si AB = CD y BC = DA, entonces el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AB = CD y BC = DA	Hipótesis
2. CA = AC	$\overline{CA}$ es común en ΔABC y ΔCDA
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	
4. $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$	
5. ___ $\parallel$ ___	Por ser $\angle ACB$ y $\angle CAD$ alternos internos y paso 4
6. $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$	
7. ___ $\parallel$ ___	Por ser $\angle CAB$ y $\angle ACD$ alternos internos y paso 6
8. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	

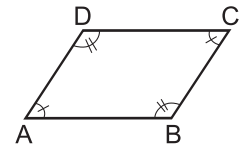
C2

Si los lados opuestos de un cuadrilátero tienen la misma medida, entonces es un paralelogramo.

Contenido 2: Condición sobre los ángulos opuestos de un cuadrilátero para que este sea un paralelogramo

P

En la figura, si $\measuredangle A = \measuredangle C$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$, demuestre que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.



S

En un cuadrilátero la suma de las medidas de sus ángulos internos es 360°, así que

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°$$

y por hipótesis $\measuredangle A = \measuredangle C$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$, entonces, sustituyendo en la igualdad anterior se tiene

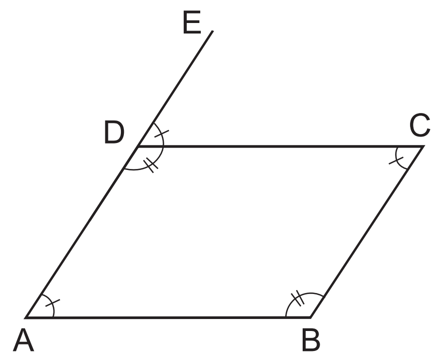
$$\measuredangle A + \measuredangle D + \measuredangle A + \measuredangle D = 360°$$

$$2\measuredangle A + 2\measuredangle D = 360°$$

$$2(\measuredangle A + \measuredangle D) = 360°$$

$$\measuredangle A + \measuredangle D = 180° \quad ①$$

Al prolongar $\overline{AD}$ en la figura original se tiene que:



$$\measuredangle CDA + \measuredangle CDE = 180° \quad ②$$

Por ① y ②, $\measuredangle A = \measuredangle CDE$ ③

De ③ y por ser $\angle A$ y $\angle CDE$ correspondientes, se obtiene que

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC} \quad ④$$

Como $\measuredangle A = \measuredangle C$ y $\measuredangle A = \measuredangle CDE$, entonces $\measuredangle C = \measuredangle CDE$.
Además, $\angle C$ y $\angle CDE$ son alternos internos, luego

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \quad ⑤$$

De ④ y ⑤ resulta que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

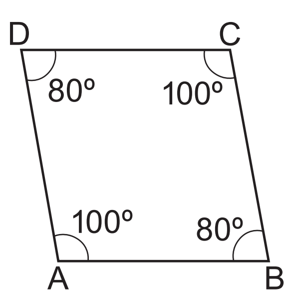
C

Si un cuadrilátero tiene los ángulos opuestos con la misma medida, entonces es un paralelogramo.

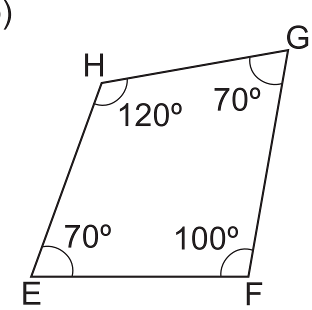
E

Identifique cual de los cuadriláteros es paralelogramo y justifique por qué.

a)



b)



Contenido 3: Condición sobre las diagonales y condición sobre una pareja de lados paralelos de igual medida en un cuadrilátero

P

Dado el punto O en el plano.

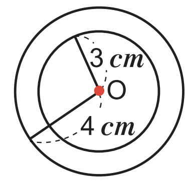
a) Dibuje dos circunferencias con centro O, y radios respectivos 4 cm y 3 cm.

b) Trace un diámetro de cada circunferencia y etiquete sus extremos con A, C y B, D respectivamente. Los extremos deben ser no colineales. ¿Es AO = CO y BO = DO?

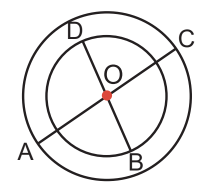
c) Forme el cuadrilátero ABCD. ¿Es un paralelogramo?

S

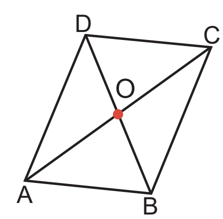
a) Las circunferencias de centro O y radios respectivos 4 cm y 3 cm, se muestran a la derecha.



b) Se trazan los diámetros de las dos circunferencias anteriores y se etiquetan sus extremos, obteniendo $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. En la figura, AO = CO y BO = DO por ser radios de sus respectivas circunferencias.



c) Se trazan $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DC},$ y $\overline{AD}$ formando el cuadrilátero ABCD.



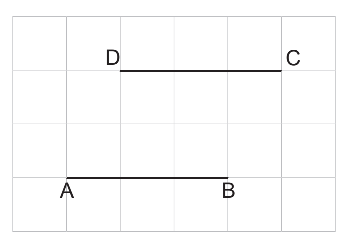
Se verifica utilizando regla y cartabón que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C1

Si las diagonales de un cuadrilátero tienen el mismo punto medio, entonces es un paralelogramo.

E

En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y AB = DC = 3 cm. Forme el cuadrilátero ABCD y utilice el compás para verificar que AD = BC. Concluya que es un paralelogramo.



De este ejercicio se deduce que:

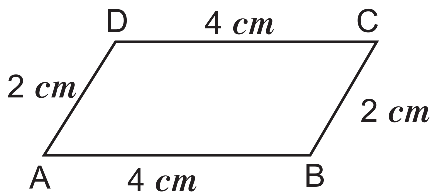
C2

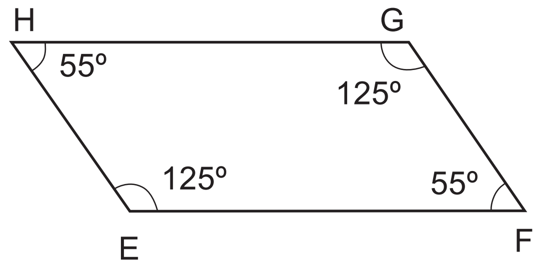
Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y con igual medida, entonces es un paralelogramo.

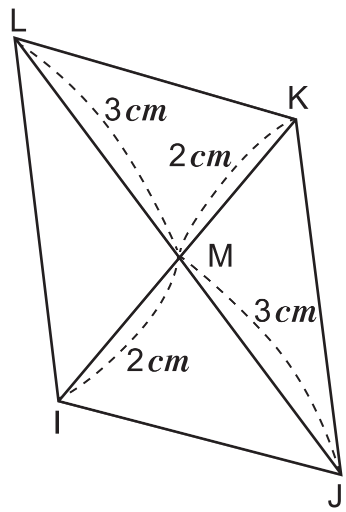
Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

E

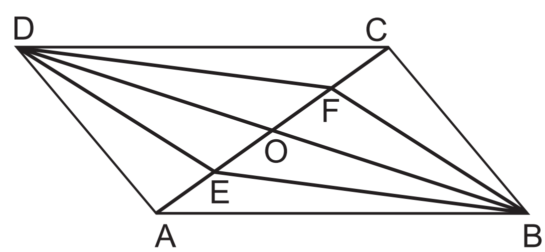
1. Indique la propiedad que hace a cada uno de los siguientes cuadriláteros un paralelogramo:







2. Sea el ▱ABCD de la derecha y AE = CF. Demuestre que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.



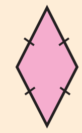
Pasos	Justificación
1. AO = CO	
2. BO = DO	
3. AE = CF	
4. AO − AE = CO − CF	$a = b$ y $c = d$ implica que $a - c = b - d$
5. EO = ____	Resta de longitudes de segmentos
6. El cuadrilátero EBFD es un paralelogramo	____ en 2 y 5

Sección 3: Paralelogramos especiales

Contenido 1: Relación entre rombos, rectángulos, cuadrados y paralelogramos

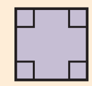
Repaso

- Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados de igual medida.



- Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos tienen igual medida, es decir, 90°.

- Un cuadrado es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados de igual medida, y sus cuatro ángulos miden 90°.



P

¿Qué relación se puede establecer entre rombos, rectángulos y cuadrados con los paralelogramos?

S

Observe que:

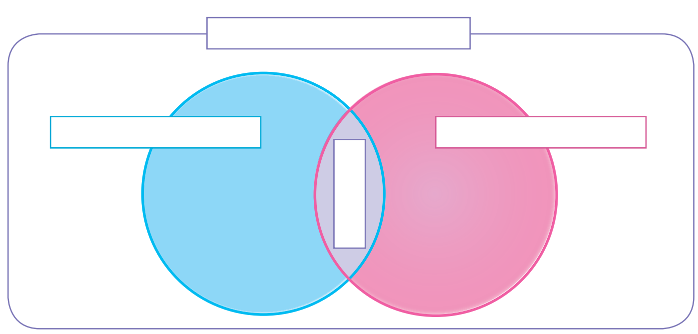
- en el rombo los lados opuestos tienen la misma medida, lo cual indica que es un paralelogramo.
- en el rectángulo los ángulos opuestos tienen la misma medida, es decir que es un paralelogramo.
- en el cuadrado los lados opuestos tienen la misma medida, lo cual indica que es un paralelogramo.

C

Los rombos, rectángulos y cuadrados son paralelogramos.

E

Escriba en los rectángulos de la figura las palabras: paralelogramos, rectángulos, rombos o cuadrados según corresponda.



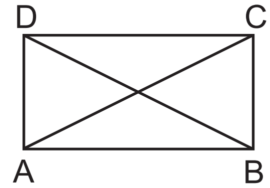
Contenido 2: Propiedades de las diagonales de un rectángulo y de un rombo

P

El cuadrilátero de la figura es un rectángulo.

Demuestre que BD = AC.

Sugerencia: Pruebe que $\Delta DAB \cong \Delta CBA$.



S

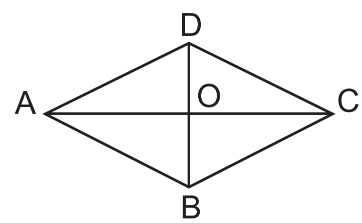
Pasos	Justificación
1. El cuadrilátero ABCD es un rectángulo	Hipótesis
2. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Un rectángulo es un paralelogramo
3. AD = BC	Propiedades de paralelogramos
4. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Definición de rectángulo
5. AB = BA	$\overline{AB}$ es común al ΔDAB y ΔCBA
6. $\Delta DAB \cong \Delta CBA$	LAL en pasos 3, 4 y 5
7. BD = AC	Definición de congruencia de triángulos

Ejemplo

El cuadrilátero ABCD de la figura es un rombo.

Demuestre que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

Sugerencia: Pruebe que $\Delta DAO \cong \Delta DCO$.



Pasos	Justificación
1. El cuadrilátero ABCD es un rombo	Hipótesis
2. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Un rombo es un paralelogramo
3. DA = DC	Definición de rombo en 1
4. AO = CO	Propiedad de las diagonales de un paralelogramo
5. DO = DO	$\overline{DO}$ es común al ΔDAO y ΔDCO
6. $\Delta DAO \cong \Delta DCO$	LLL en pasos 3, 4 y 5
7. $\measuredangle AOD = \measuredangle COD$	Definición de congruencia de triángulos
8. $\measuredangle AOD + \measuredangle DOC = 180^{\circ}$	$\angle AOD$ y $\angle DOC$ forman par lineal
9. $\measuredangle AOD = 90^{\circ}$	Pasos 7 y 8
10. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$	Definición de perpendicularidad en paso 9

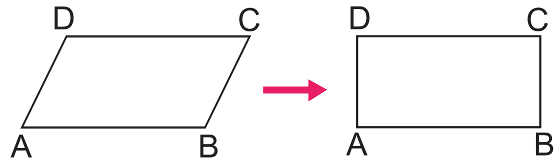
C

- En un rectángulo las diagonales tienen la misma medida.
- En un rombo las diagonales son perpendiculares.

Contenido 3: Condiciones para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado

P

Deduzca la condición que debe cumplir un ▱ ABCD para ser un rectángulo, como se muestra en la figura.



S

Un rectángulo tiene sus cuatro ángulos rectos. Para que lo anterior se cumpla únicamente se necesita que $\measuredangle A = 90°$.

Por ser el cuadrilátero dado un paralelogramo, $\measuredangle C = 90°$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$, ya que ángulos opuestos tienen la misma medida.

Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°, entonces

$$\begin{aligned}
\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D &= 360^\circ\\
90^\circ + \measuredangle B + 90^\circ + \measuredangle D &= 360^\circ\\
180^\circ + \measuredangle B + \measuredangle D &= 360^\circ\\
\measuredangle B + \measuredangle D &= 180^\circ\\
2\measuredangle B &= 180^\circ\\
\measuredangle B &= 90^\circ
\end{aligned}$$

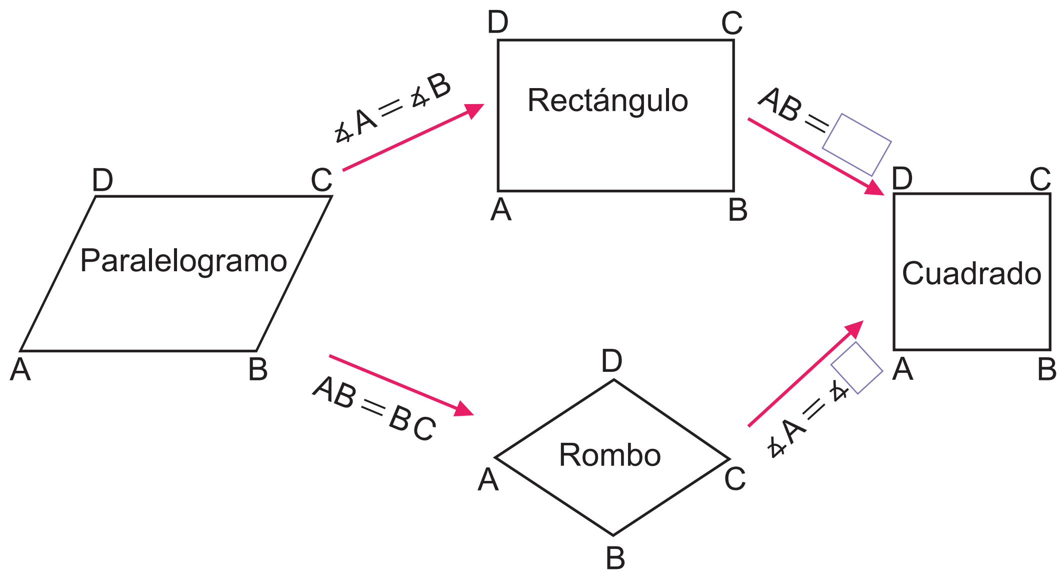
En consecuencia, $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$.

C

Un paralelogramo es un rectángulo si tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo que mide 90°.

E

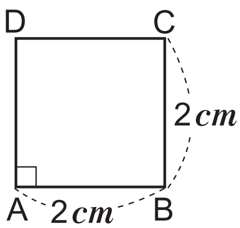
Complete en el recuadro la característica que debe cumplir el cuadrilátero de la izquierda para convertirse en el de la derecha.



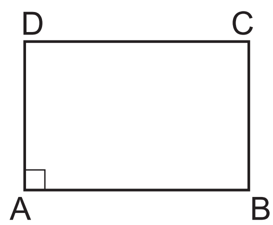
Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 3

1. Los cuadriláteros de la figura son paralelogramos. Nombre cada uno de ellos según las propiedades adicionales que tengan.

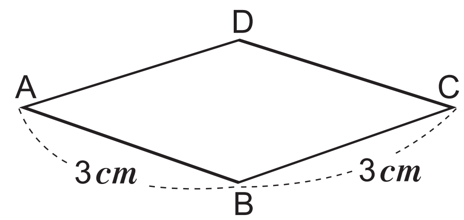
a)



b)

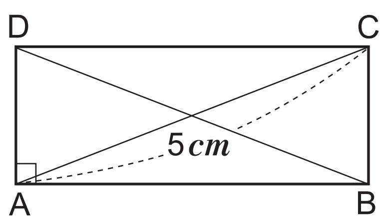


c)

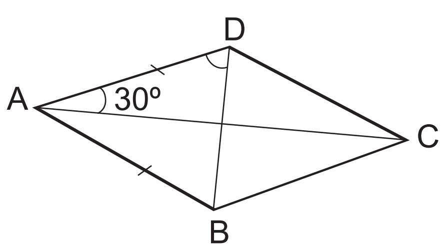


2. Dados los paralelogramos siguientes:

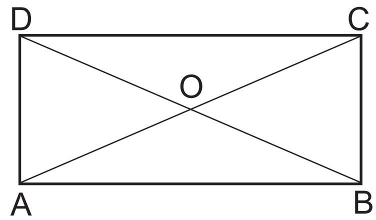
a) Calcule BD.



b) Calcule ∡ADB.



3. El paralelogramo de la figura es un rectángulo. Demuestre que $AO = BO$.



Pasos	Justificación
1. Cuadrilátero ABCD es un rectángulo	
2. $AC = BD$	
3. $AO = OC$ y $BO = OD$	Las diagonales de un paralelogramo tienen el mismo punto medio
4. $AO + OC = \boxed{}$	Suma de longitudes de segmentos
5. $2AO = 2BO$	
6. $AO = \boxed{}$	Dividiendo por 2 ambos lados de la igualdad en 5

Unidad 8

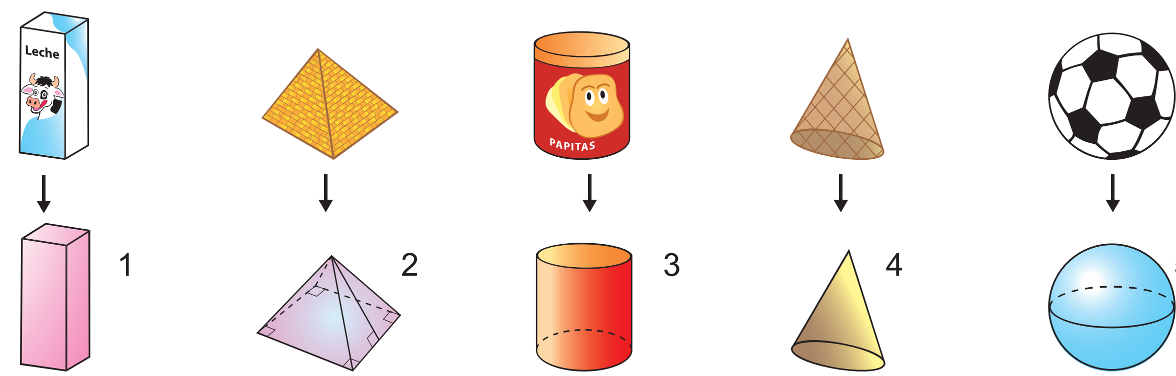
Sólidos

Sección 1: Poliedros

Contenido 1: Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas

P

Dados los siguientes objetos de uso común, junto con sus abstracciones geométricas, identifique en estos las superficies curvas y planas. Luego reúna las figuras que tengan todas sus superficies planas o al menos una superficie curva.



S

Las figuras 1 y 2 tienen todas sus superficies planas.

Las figuras 3, 4 y 5 tienen al menos una superficie curva.

Cada una de estas figuras recibe el nombre de **sólido o cuerpo geométrico**.

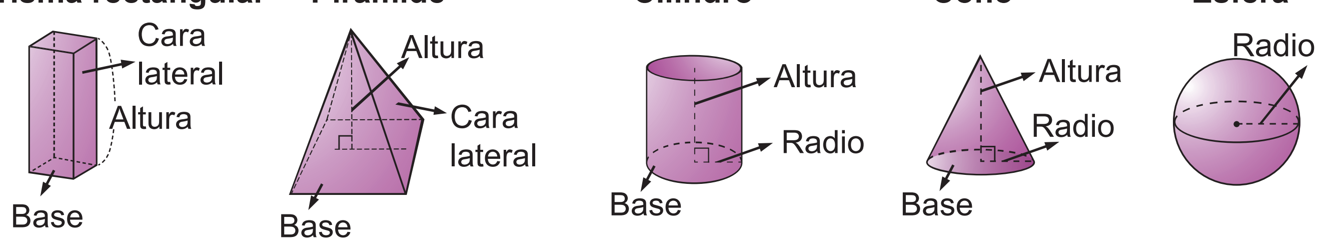
C

Un **sólido o cuerpo geométrico** es una región del espacio limitada por superficies curvas y/o planas.

- Los sólidos que tienen todas sus superficies planas se llaman **poliedros.**
- Los sólidos que tienen al menos una superficie curva se llaman **cuerpos redondos.**

Nombres y elementos de los sólidos

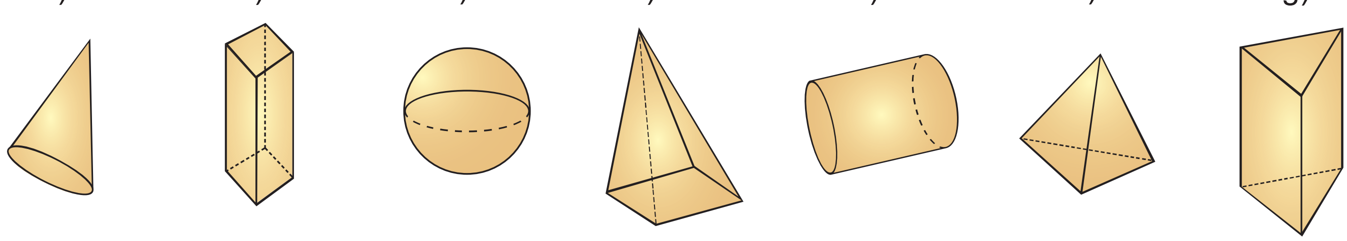
Prisma rectangular **Pirámide** **Cilindro** **Cono** **Esfera**



E

Nombre cada uno de los siguientes sólidos:

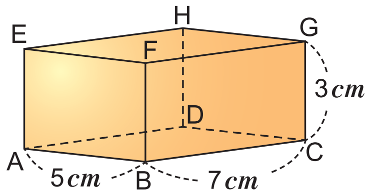
a) b) c) d) e) f) g)



Contenido 2: Área total de la superficie de un prisma

P

Calcule el área total de la superficie del siguiente prisma:



Un prisma rectangular es un sólido cuyas bases son rectángulos paralelos y congruentes, y sus caras laterales son rectángulos.

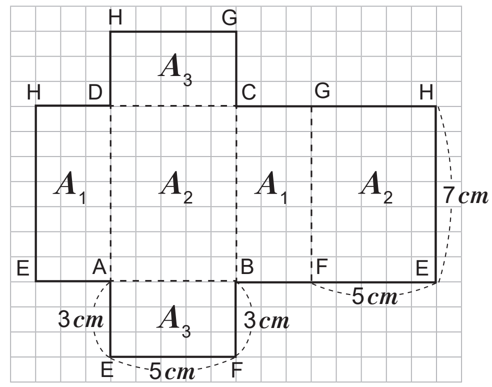
El **cubo** es un prisma rectangular con todas sus caras cuadradas y congruentes.

S

Se observa que el prisma tiene 6 caras: 2 bases y 4 caras laterales.

Al desarrollar el prisma en el plano se obtiene la figura de la derecha. Se observa que se forman 3 pares de rectángulos congruentes; con áreas A_1, A_2 y A_3, respectivamente.

A continuación se presenta el cálculo de estas áreas:



Área A_1	Área A_2	Área A_3
$A_1 = bh$ $= (3)(7)$ $= 21$ El área es 21 cm^2.	$A_2 = bh$ $= (5)(7)$ $= 35$ El área es 35 cm^2.	$A_3 = bh$ $= (5)(3)$ $= 15$ El área es 15 cm^2.

En esta unidad se identificará un segmento con su medida.

Se calcula el área total A_t del prisma sumando las áreas de los 6 rectángulos.

$$
\begin{aligned}
A_t &= (2)(21) + (2)(35) + (2)(15)\\
&= (2)(21 + 35 + 15)\\
&= (2)(71)\\
&= 142
\end{aligned}
$$

Por tanto, el área total de la superficie del prisma rectangular es 142 cm^2.

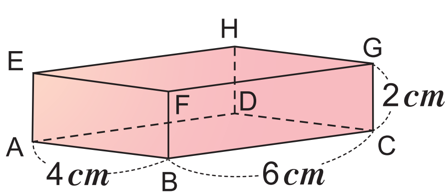
C

El área total de la **superficie** de un prisma es igual a la suma de las áreas de las dos bases y las áreas de las cuatro caras laterales.

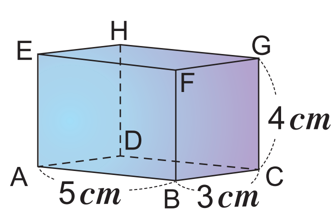
E

Calcule el área total de la superficie de cada uno de los siguientes prismas:

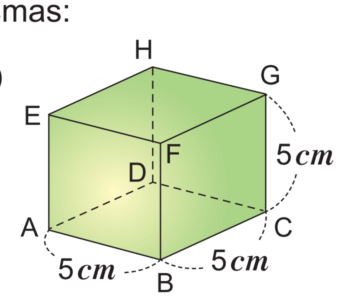
a)



b)



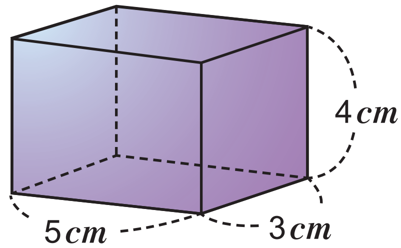
c)



Contenido 3: Volumen de un prisma rectangular

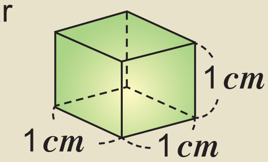
P

Calcule el volumen del siguiente prisma rectangular:



Una unidad de medida para calcular el volumen de un prisma es el cm^3.

1 cm^3 es el volumen de un cubo de 1 cm de lado.



S

El prisma tiene una altura de 4 cm, así que haciendo un corte horizontal imaginario de este se obtienen 4 prismas de 1 cm de altura. Se usan cubos de 1 cm^3 de volumen para "llenar" uno de los cuatro prismas y se tiene que hay:

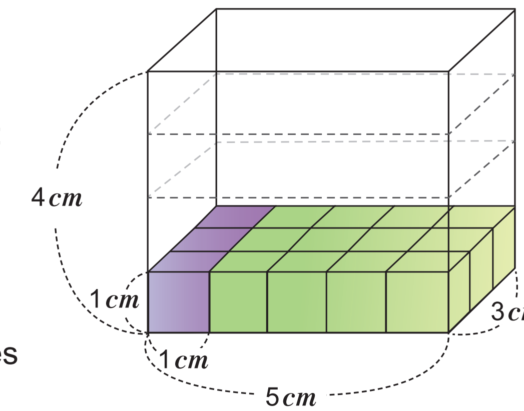
$$(5)(3) = 15 \text{ cubos}$$

de 1 cm^3 de volumen en cada uno de ellos. Por tanto, en el prisma dado hay

$$(4)(15) = 60 \text{ cubos}$$

de 1 cm^3 de volumen. Luego el volumen V del prisma es

$$V = (4)(15) = 60$$



Se observa que el área de la base del prisma es igual a (5)(3) cm^2 y su altura es 4 cm, así que

$$V = (\text{área de la base})\ (\text{altura}) = (15)(4) = 60$$

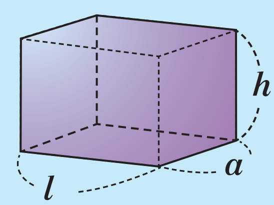
Por tanto, el volumen del prisma rectangular es 60 cm^3.

C

El volumen V de un prisma rectangular es igual al producto del área de la base A_b por su altura h, es decir $V = A_b\, h$.

Como $A_b = l \cdot a$, sustituyendo en la fórmula del volumen se tiene

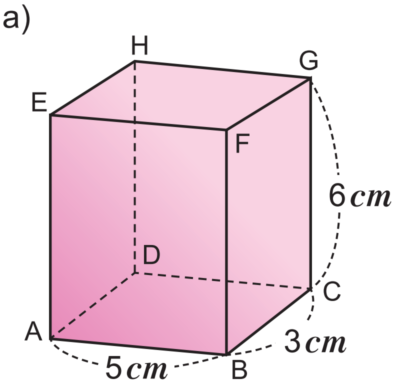
$$V = l \cdot a \cdot h$$



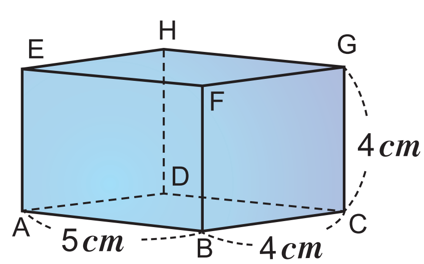
E

Calcule el volumen de cada uno de los siguientes prismas rectangulares:

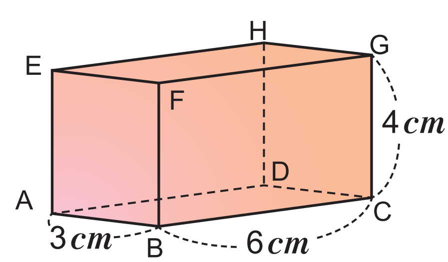
a)



b)



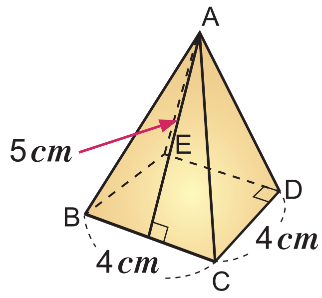
c)



Contenido 4: Área total de la superficie de una pirámide cuadrada

P

Calcule el área total de la superficie de la siguiente pirámide cuadrada:

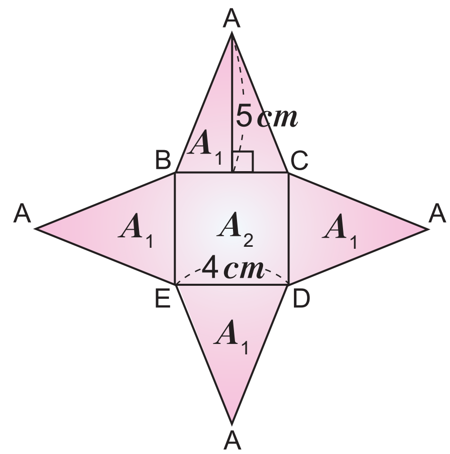


Una **pirámide cuadrada** es un sólido cuya base es un cuadrado y las caras laterales son triángulos con un vértice común llamado vértice de la pirámide.

S

Se observa que la pirámide cuadrada tiene cuatro caras laterales, que al desarrollarla se obtiene un cuadrado y cuatro triángulos congruentes (con la misma área).

El área total de la superficie de la pirámide es la suma del área del cuadrado con cuatro veces el área de uno de los triángulos.



Área de un triángulo	Área de la base
$A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{(4)(5)}{2} = \frac{20}{2} = 10$ El área es 10 cm^2.	$A_2 = l^2 = (4)^2 = 16$ El área es 16 cm^2.

Como A_t es la suma de las áreas de los cuatro triángulos y la del cuadrado, entonces:

$$A_t = 4A_1 + A_2 = (4)(10) + 16 = 40 + 16 = 56$$

Luego, el área total de la superficie de la pirámide es **56 cm^2**.

C

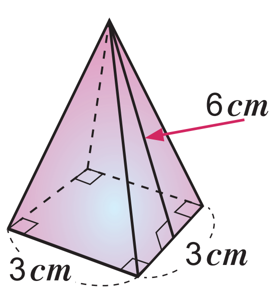
El área total A_t de la superficie de una pirámide cuadrada es igual a cuatro veces el área A_1 de una de las caras laterales más el área de la base A_2. Es decir,

$$A_t = 4A_1 + A_2.$$

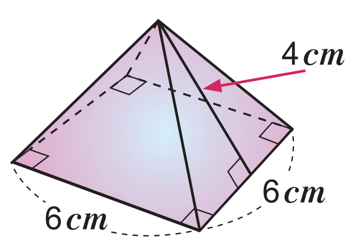
E

Calcule el área total de la superficie de las siguientes pirámides:

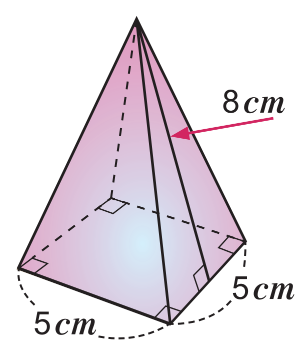
a)



b)



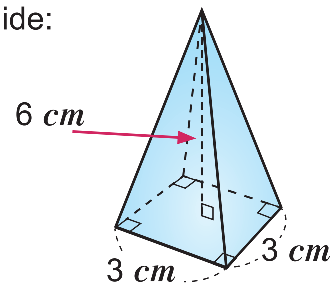
c)



Contenido 5: Volumen de una pirámide

P

Calcule el volumen de la siguiente pirámide:

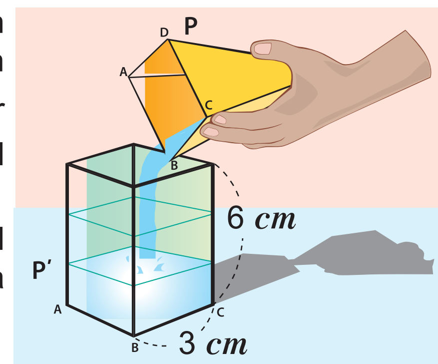


S

Se obtiene el volumen de la pirámide dada utilizando el siguiente recurso:

Se llena con agua la pirámide y se vierte el líquido en un prisma con la misma base y altura de la pirámide. Se observa que el volumen que ocupa el agua vertida es $\frac{1}{3}$ del volumen total del prisma. Por tanto, el volumen de esta pirámide cuadrada es la tercera parte del volumen del prisma elegido.

A continuación se aplica este resultado para calcular el volumen del prisma cuya base es un cuadrado con lado igual a 3 cm y una altura de 6 cm. En detalles:

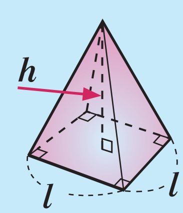


Volumen del prisma con base cuadrada de lado 3 cm y altura de 6 cm	Volumen de la pirámide
$V_1 = A_b h$ $= (3^2)\,(6)$ $= (9)\,(6)$ $= 54$ El volumen es 54 cm^3.	$V = \frac{1}{3}(3^2)(6)$ $= \frac{1}{3}(54)$ $= 18$ El volumen es **18 cm^3**.

C

El volumen V de una pirámide cuadrada es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de su base A_b por su altura h, es decir

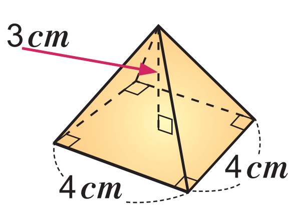
$$V = \frac{1}{3} A_b\, h$$



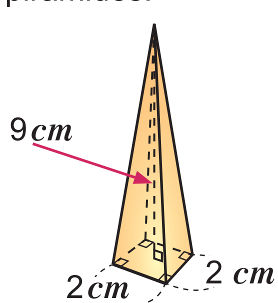
E

Calcule el volumen de las siguientes pirámides:

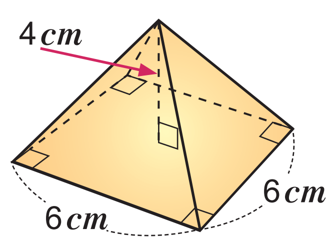
a)



b)



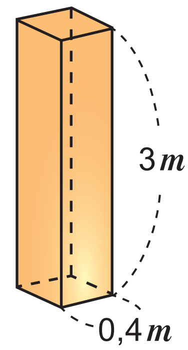
c)



Contenido 6: Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un poliedro

P

Juan necesita pintar un pilar de madera cuya base es un cuadrado de lado 0,4 m, y su altura de 3 m. ¿Cuál es el área total de las caras de este pilar que Juan debe pintar?



S

Como la base es un cuadrado de lado 0,4 m, entonces

$$A_1 = (0{,}4)^2 = 0{,}16$$

Luego, cada base tiene un área de 0,16 m^2.

Las cuatro caras laterales son rectángulos congruentes, por lo que basta encontrar el área de uno de ellos. Esto es,

$$A_2 = (3)(0{,}4) = 1{,}2$$

Por lo tanto, cada cara lateral tiene un área de 1,2 m^2.

El área total A_t de la superficie del pilar es la suma de las áreas de las caras laterales y el área de las dos bases, es decir

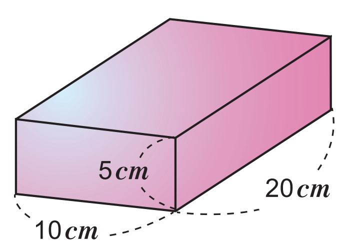
$$\begin{aligned} A_t &= (2)(0{,}16) + (4)(1{,}2) \\ &= 0{,}32 + 4{,}8 \\ &= 5{,}12 \end{aligned}$$

Por tanto, el área total de la superficie del prisma que Juan necesita pintar es **5,12** m^2.

E

Hay un ladrillo como el de la figura:

a) Calcule el área total de la superficie del ladrillo.

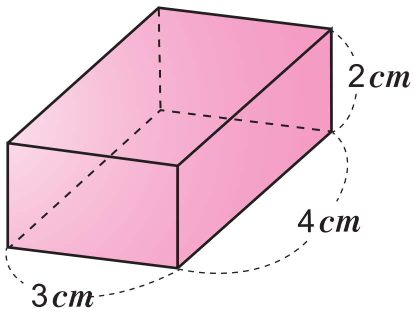


b) Calcule su volumen.

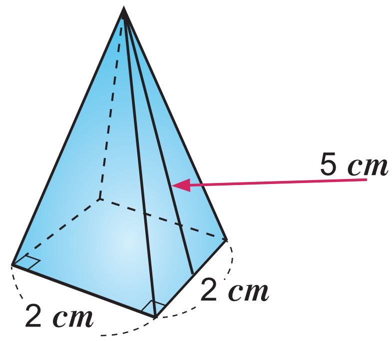
Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 1

1. Calcule el área total de la superficie de los siguientes sólidos:

a)



b)



2. Calcule el volumen de un prisma sabiendo que:

a) su altura es 7 cm y su base es un cuadrado de lado 4 cm.

b) su altura es 3 cm y su base es un rectángulo de área 12 cm^2.

3. Calcule el volumen de una pirámide sabiendo que:

a) su altura es 5 m y su base es un cuadrado de área 12 m^2.

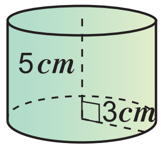
b) su altura es 4 m y su base es un cuadrado de lado 3 m.

4. Las dimensiones de una caja rectangular son 19 cm, 9 cm y 6 cm. Calcule el área total y el volumen de la caja.

Contenido 1: Área total de la superficie de un cilindro

P

Calcule el área total de la superficie del siguiente cilindro:

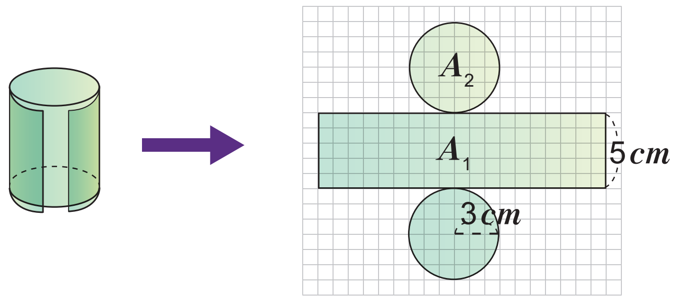


El **cilindro** es un sólido formado por una superficie lateral curva y dos círculos paralelos de igual área llamados base.

S

Se observa que si se corta el cilindro como se indica en la figura y se extiende en el plano, entonces se forman el rectángulo y los círculos de igual área que aparecen en la figura de la derecha.

La base del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia de cualquiera de los círculos y su altura es la del cilindro.



A continuación se calculan las áreas del rectángulo y un círculo.

Área del rectángulo	Área del círculo
$A_1 = bh$ $= (2\pi)(3)(5)$ $= (6\pi)(5)$ $= 30\pi$ El área del rectángulo es $30\pi\ cm^2$.	$A_2 = \pi r^2$ $= \pi(3^2)$ $= 9\pi$ El área del círculo es $9\pi\ cm^2$.

El área total de la superficie del cilindro es igual a la suma de las áreas de los dos círculos más el área del rectángulo, luego

$$A_t = A_1 + 2A_2 = 30\pi + (2)(9\pi) = 30\pi + 18\pi = \mathbf{48\pi}$$

El área total de la superficie del cilindro es $48\pi\ cm^2$.

C

El área total de la superficie de un cilindro es el doble del área del círculo que forma la base más el área de un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia de la base y el ancho igual a la altura del cilindro. Su fórmula es

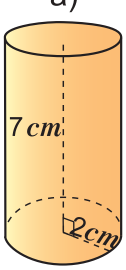
$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

donde r y h son el radio y la altura del cilindro.

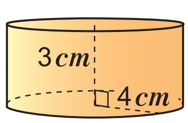
E

Calcule el área total de la superficie de cada uno de los siguientes cilindros:

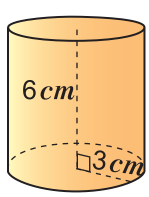
a)



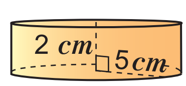
b)



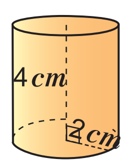
c)



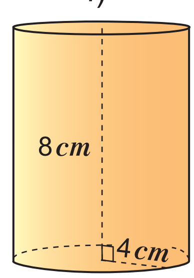
d)



e)



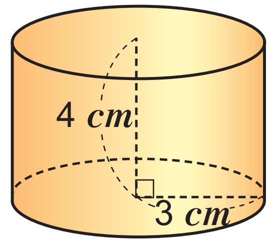
f)



Contenido 2: Volumen de un cilindro

P

Calcule el volumen del siguiente cilindro:

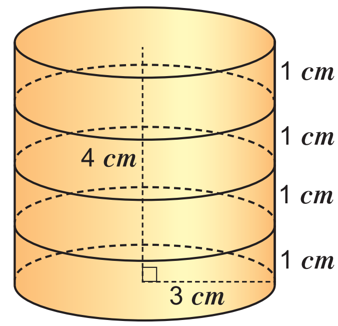


πr^2 cm^3 es el volumen de un cilindro de 1 cm de altura y radio r.

S

El cilindro tiene 4 cm de altura y se puede imaginar como la superposición de 4 cilindros con 1 cm de altura y 3 cm de radio como se muestra en la figura de la derecha.

Luego, el volumen del cilindro original es cuatro veces el volumen de los cilindros de altura 1 cm, entonces



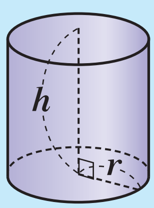
$$\begin{aligned} V &= (4)(\pi)(3^2)\,(1) \\ &= (4)\,(\pi)\,\,(9) \\ &= (4)\,(9\pi) \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del cilindro es **36π cm^3**.

Se observa que el volumen del cilindro dado es el resultado de multiplicar 4 cm que es su altura con 9π cm^2 que es el área de su base.

C

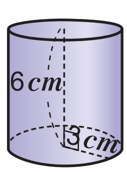
El volumen V de un cilindro de radio r es igual al producto del área de la base A_b por su altura h. Siendo $A_b = \pi r^2$, se tiene

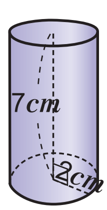


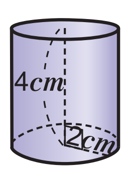
$$V = A_b h = \pi r^2 h$$

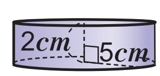
E

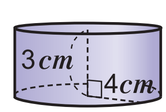
Calcule el volumen de cada uno de los siguientes cilindros:

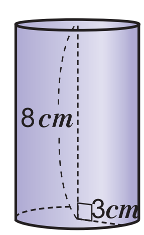
a)


b)


c)


d)


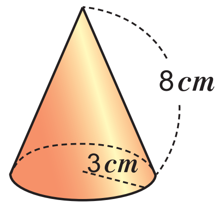
e)


f)


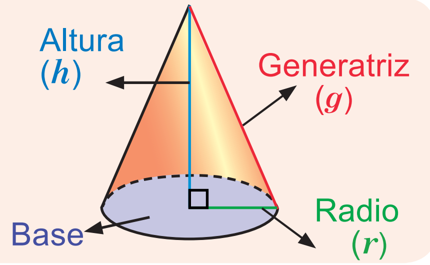
Contenido 3: Área total de la superficie de un cono

P

Calcule el área total de la superficie del siguiente cono:

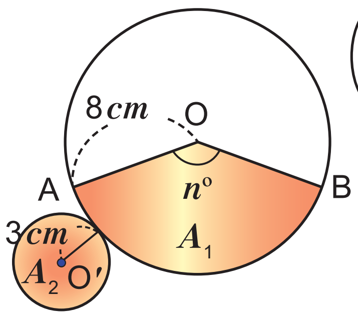


El **cono** es un cuerpo geométrico limitado por una superficie lateral curva que termina en un vértice y un círculo llamado base.



S

Al descomponer el cono en piezas se obtiene un sector circular y un círculo como base:



(Área de la superficie del cono) = (Área de la base del cono A_2) + (Área del sector circular formado por la superficie lateral A_1)

Se sabe que si l es la longitud de $\overparen{AB}$ y L la longitud de la circunferencia de mayor radio, entonces:

$$\frac{l}{L} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{Área del sector circular} = \left(\begin{array}{c}\text{Área del círculo}\\ \text{de mayor radio}\end{array}\right)\left(\frac{n^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{Área del círculo}\\ \text{de mayor radio}\end{array}\right)\left(\frac{l}{L}\right)$$

En la figura, la longitud del $\overparen{AB}$ es igual a la longitud de la circunferencia de radio 3 cm, así:

Área del sector circular	Área del círculo de radio menor (base del cono)
$A_1 = [\pi(8^2)]\left[\frac{\cancel{2\pi}(3)}{\cancel{2\pi}(8)}\right]$ $= \pi(8)(\cancel{8})\left(\frac{3}{\cancel{8}}\right)$ $= \pi(8)(3) = 24\pi$ El área del sector circular es $24\pi\ cm^2$.	$A_2 = \pi(3^2)$ $= 9\pi$ El área del círculo es $9\pi\ cm^2$.

La suma del área del sector circular y el área del círculo de radio 3 cm es:

$$A_1 + A_2 = 24\pi + 9\pi = 33\pi$$

El área total de la superficie del cono es **$33\pi\ cm^2$**.

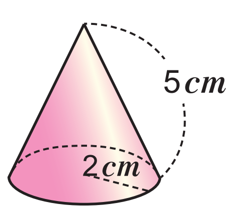
C

El área total de la superficie de un cono es la suma del área de la base πr^2 con el producto πrg del radio de la base r, la generatriz g y π, esto es $A = \pi r^2 + \pi rg$.

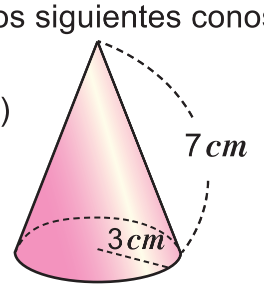
E

Calcule el área total de la superficie de los siguientes conos:

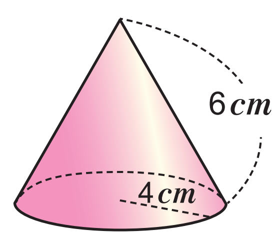
a)



b)



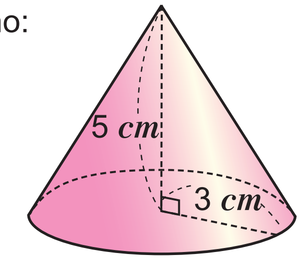
c)



Contenido 4: Volumen de un cono

P

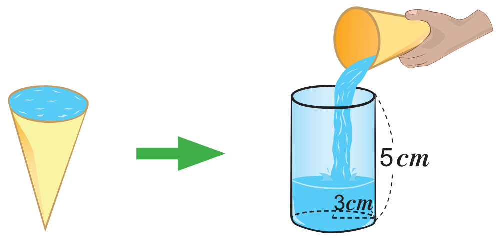
Calcule el volumen del siguiente cono:



El segmento que va del centro de la base al vértice del cono es la **altura** de este.

S

Al llenar con agua un cono de 3 cm de radio y 5 cm de altura y verterla en un cilindro de base y altura iguales a las del cono, el volumen que ocupa es $\frac{1}{3}$ del volumen total del cilindro.

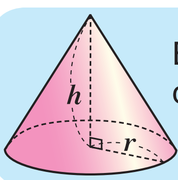


Con los datos dados se calcula el volumen del cilindro, este resultado se multiplica por $\frac{1}{3}$ obteniéndose así el volumen del cono.

Volumen del cilindro con base de radio 3 cm y altura de 5 cm	Volumen del cono
$V_1 = \pi r^2 h$ $= \pi(3^2)(5)$ $= \pi(9)(5)$ $= 45\pi$ El volumen es $45\pi\ cm^3$.	$V = \frac{1}{3}(45\pi)$ $= 15\pi$ El volumen es $15\pi\ cm^3$.

El volumen del cono con radio 3 cm y altura 5 cm es, 15 π cm^3.

C

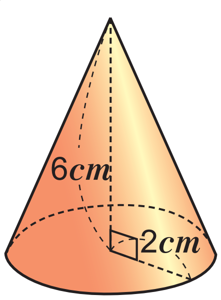


El volumen de un cono se calcula utilizando la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde V es el volumen del cono, r el radio de la base y h la altura.

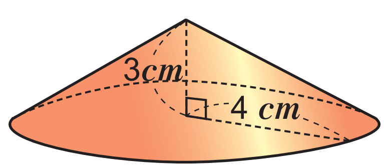
E

Calcule el volumen de cada uno de los siguientes conos:

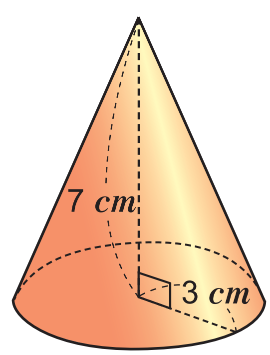
a)



b)



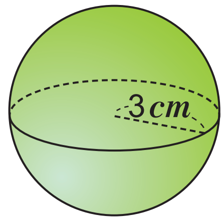
c)



Contenido 5: Área total de la superficie de una esfera

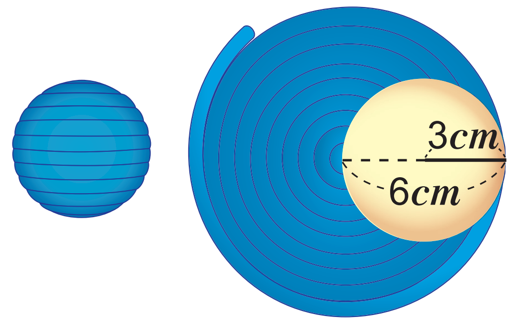
P

Calcule la superficie de la siguiente esfera:



S

Si se enrolla una cuerda alrededor de la esfera de radio 3 cm hasta que la cubra completamente y luego se desenrolla para formar un círculo, según aparece en las figuras se ve que el radio de este tiene el doble de la longitud del radio de la esfera. Entonces el área de esta es igual al área del círculo recién formado, luego

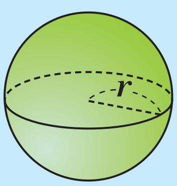


$$
\begin{aligned}
A_t &= \pi[(2)(3)]^2 \\
&= \pi(2^2)(3^2) \\
&= 36\pi
\end{aligned}
$$

El área total de la superficie de la esfera de radio 3 cm es **36π cm^2**.

El área de la superficie de la esfera de radio 3 cm es igual a 4π multiplicada por el cuadrado de 3 cm.

C

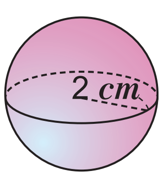


El área de la superficie de una esfera se calcula utilizando la fórmula $A_t = 4\pi r^2$, donde A_t es el área total de la superficie de la esfera y r es su radio.

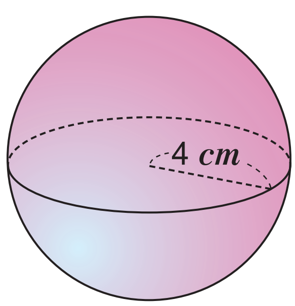
E

Calcule en cada inciso el área total de la superficie de las siguientes esferas:

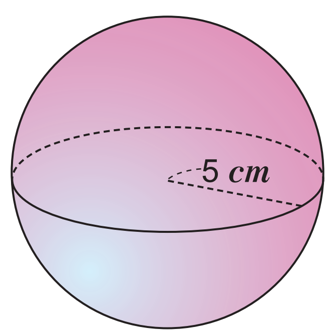
a)



b)



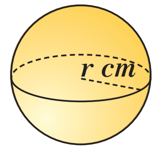
c)



Contenido 6: Volumen de una esfera

P

Calcule el volumen de la siguiente esfera:



El volumen de la semi esfera es la mitad del de la esfera.

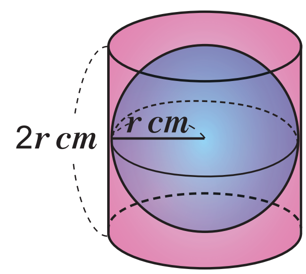
S

Se llena de agua una semi esfera y se vierte el líquido en un cilindro cuya base tiene el radio de la esfera y la altura es el doble de este, para constatar que la cantidad de agua depositada es la tercera parte del volumen del cilindro.

Entonces el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.

El radio de la base del cilindro es r y la altura es $2r$.

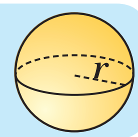
Volumen del cilindro	Volumen de la esfera
$V_1 = \pi r^2 h$ $= \pi r^2 (2r)$ $= 2\pi r^3$ El volumen es $2\pi r^3\ cm^3$.	$V = \frac{2}{3}(2\pi r^3)$ $= \frac{4}{3}\pi r^3$ El volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3\ cm^3$.



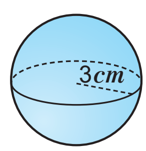
C

El volumen de una esfera de radio r es dos tercios del volumen de un cilindro de radio r y altura $2r$, es decir,

$$V = \frac{2}{3}(\pi r^2)(2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Ejemplo Calcule el volumen de la siguiente esfera:



Se aplica directamente la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, con $r = 3\ cm$.

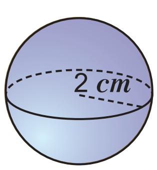
$$V = \frac{4}{3}\pi(3^3) = 36\pi$$

Luego, el volumen de la esfera es **$36\pi\ cm^3$**.

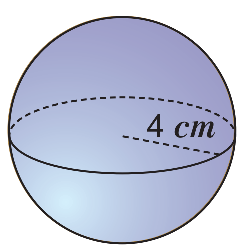
E

Calcule el volumen de las siguientes esferas:

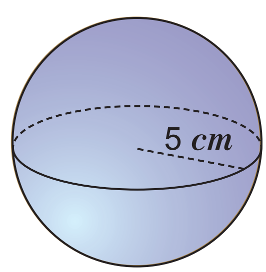
a)



b)



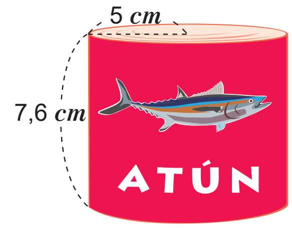
c)



Contenido 7: Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un cuerpo redondo

$\mathcal{P}_1$

Una lata de atún tiene forma cilíndrica, con 7,6 cm de altura y radio de la base igual a 5 cm. ¿Cuántos cm^2 de metal se necesita para hacer una de estas latas?



$\mathcal{S}_1$

Se tiene que el radio de la base es $r=5\ cm$ y la altura $h=7{,}6\ cm$.

Se calcula la longitud de la base de la lata sustituyendo el radio en la fórmula de la longitud de la circunferencia, se tiene:

$$2\pi r=2\pi(5)=10\pi.$$

En consecuencia, la base tiene longitud $10\pi\ cm$.

Área de una de las bases del cilindro	Área del rectángulo de base $10\pi\ cm$ y altura 7,6 cm	Área total de la superficie del cilindro
$A_1 = \pi r^2$ $= (\pi)(5^2)$ $= 25\pi$ El área de la base es $25\pi\ cm^2$.	$A_2 = bh$ $= (10\pi)(7{,}6)$ $= 76\pi$ El área de la superficie lateral es $76\pi\ cm^2$.	$A_3 = 2A_1 + A_2$ $= 2(25\pi)+(76\pi)$ $= 126\pi$ El área total de la superficie es $126\pi\ cm^2$.

Se necesitan $126\pi\ cm^2$ de metal para fabricar una de esas latas.

$\mathcal{P}_2$

Calcule el volumen del cono formado por el sombrero de un disfraz para carnaval, con altura de 18 cm y radio de la base 10 cm.

$\mathcal{S}_2$

Los datos son los siguientes:

Radio de la base $\quad r=10$

Altura $\quad h=18$

Se sustituyen los datos anteriores en la fórmula del volumen $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\pi(10^2)(18) \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(100)(18) \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(1800) \\ &= 600\pi \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen del cono del sombrero es $\mathbf{600\pi\ cm^3}$.

$\mathcal{E}$

Resuelva las siguientes situaciones:

a) Calcule el área total de la superficie de un tarro de café que tiene forma de cilindro con 8 cm de diámetro y 9 cm de altura.

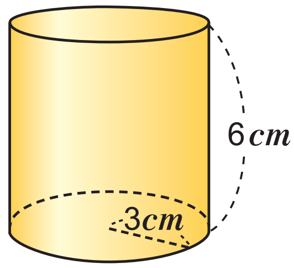
b) Calcule el volumen de la porción que tiene forma de cono en un helado, si su altura es 7 cm y el radio de la base 4 cm.

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 2

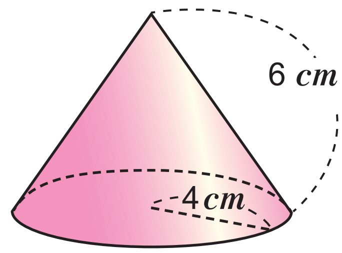
E

1. Calcule el área total de la superficie de los siguientes sólidos:

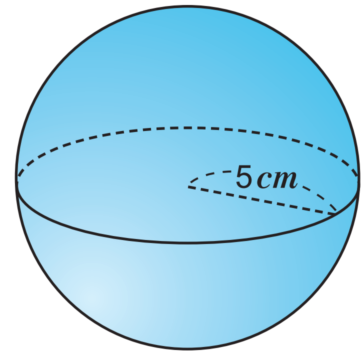
a)



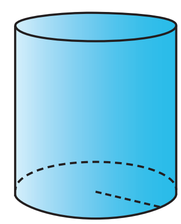
b)



c)



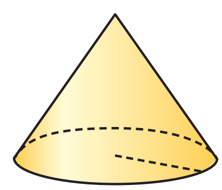
2. Calcule en cada inciso el volumen de un cilindro sabiendo que:



a) su altura es 10 cm y su base tiene radio 5 cm

b) su altura es 12 cm y su base tiene radio 4 cm

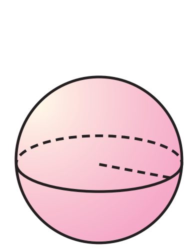
3. Calcule en cada inciso el volumen de un cono sabiendo que:



a) su altura es 4 cm y su base tiene radio 2 cm

b) su altura es 6 cm y su base tiene radio 1 cm

4. Calcule en cada inciso el volumen de una esfera sabiendo que:



a) su radio es 1 cm

b) su radio es $\frac{1}{2}$ cm

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

	Nro de términos	Clasificación	Grado
a)	1	Monomio	2
b)	2	Binomio	2
c)	3	Trinomio	3
d)	3	Trinomio	2

S1C2

a) $14x+9y$ d) $10a-5b$

b) $16x+11y$ e) $-12x^2-14x$

c) $13a-2b$ f) $13x^2-11x$

S1C3

a) $8x+6y$ d) $-15y$
b) $10x+3y$ e) $9y^2-6y$
c) $15x-y$ f) $3x^2-14x$

S1C4

a) $5x+y$ e) $-17x-15y^2$
b) $4x+6y$ f) $8x^2-5y$
c) $12x+3y$
d) $15x^2-4y^2$

S1C5 E1

	No. de términos	Clasificación	Grado
a)	2	Binomio	1
b)	3	Trinomio	2
c)	2	Binomio	3
d)	3	Trinomio	2

E2

a) $2x^2+7x+6$ c) $-12xy+x$
b) $2x^2+8y$ d) $3xy-4x+10$

E3

a) $7x^2-18x$ c) $13x-10y-z$
b) $9x^3+7x$ d) $6x^3+8x-4$

E4

a) $2x^2-x$ c) $-2x^2+4$
b) $-3x^3-8x$ d) $-5x^3-9x^2+x-7$

S2C1

a) $42x^2$ b) $-72x^2$ c) $6ab$
d) $36x^2$ e) $6x^3$

S2C2

a) $6x+24$ d) $-24ab+12b$
b) $3y-15$ e) $5x+5y-35$
c) $3x^2-6xy$

S2C3

a) $xy+4x+5y+20$
b) $xy+4x+2y+8$
c) $xy+x+6y+6$
d) $xy-6x+7y-42$
e) $xy+2x-3y-6$
f) $xy-3x-4y+12$

S2C4

a) $x^2+9x+14$
b) $x^2+4x-21$
c) $x^2-5x-24$
d) $x^2-13x+36$

S2C5

a) $x^2+7x+12$ b) x^2-x-6
c) $x^2+3x-10$ d) $x^2-13x+42$

S2C6 E1

a) $21x^2$ b) $-32y^2$ c) $30z^2$
d) $-15x^2$ e) $18x^3$ f) $-6x^4$
g) $56y^3$ h) $54x^2y^3$

E2

a) $4x+20$ d) $8a^2+12ab$
b) x^2-2x e) $3x^2-xy$
c) $12a^2-21a$ f) $-8x^2+6xy$

E3

a) $xy+5x+4y+20$
b) $xy+5x-y-5$
c) $xy-2x+6y-12$
d) $xy-10x-3y+30$
e) $x^2+8x+15$
f) $x^2-4x-12$
g) $x^2+6x-16$
h) x^2-7x+6

E4

a) $x^2+7x+10$ c) $x^2-13x+42$
b) $x^2+4x-21$ d) $2x^2-x-1$

S3C1

a) $5b$ b) $2x$ c) $-5m$ d) -5

S3C2

a) $2x-y$ b) $-2y-\dfrac{3}{2}$

S3C3

a) $x+10$ b) $3x+4$ c) $4x-3$

S3C4 E1

a) $5y$ b) $-4y$ c) $-2x$ d) 5
e) $3x$ f) $-4x$ g) $-2y$ h) -4

E2

a) $9x^2-5x$ b) $-7x-5$ c) $6x+4$

E3

a) $x+5$ b) $7x-3$

UNIDAD 2

S1C1

a) $x=4$ b) $x=5$ c) $x=6$ d) $x=10$
e) $x=5$ f) $x=-5$ g) $x=7$ h) $x=-3$

S1C2

a) $x=3$ b) $x=3$ c) $x=-2$ d) $x=2$
e) $x=1$ f) $x=5$ g) $x=-2$ h) $x=-3$

S1C3

a) $x+y=13$ d) $2x+y=700$
b) $x+y=18$ e) $3x+2y=70$
c) $3x+y=20$

S1C4

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	8	7	6	5	4

b) Si $(x,y)=(1{,}9)\longrightarrow 1+9=10$

S1C5

(2,1)

S1C6 E1

a) $x=7$ b) $x=4$ c) $x=2$

E2

x	0	1	2	3	4
y	12	9	6	3	0

E3

a) Si b) Si

S2C1

a) $(x,y)=(2{,}5)$ b) $(x,y)=(5,3)$
c) $(x,y)=(1{,}3)$ d) $(x,y)=(7{,}4)$

S2C2

a) $(x,y)=(3{,}1)$ b) $(x,y)=(16{,}4)$
c) $(x,y)=(1{,}4)$ d) $(x,y)=(2{,}3)$

S3C1

a) $(x,y)=(3{,}1)$ b) $(x,y)=(3{,}4)$
c) $(x,y)=(-2{,}1)$ d) $(x,y)=(3,5)$

S3C2

a) $(x,y)=(1{,}4)$ b) $(x,y)=(2{,}3)$
c) $(x,y)=(-3{,}12)$ d) $(x,y)=(-1,-2)$

S3C3

a) $(x,y)=(3{,}4)$ b) $(x,y)=(2,5)$
c) $(x,y)=(-1{,}3)$ d) $(x,y)=(4{,}3)$

S3C4

a) $(x,y)=(1{,}3)$ b) $(x,y)=(2,4)$
c) $(x,y)=(7{,}2)$ d) $(x,y)=(3{,}4)$

S3C5

a) $(x,y)=(1,2)$ b) $(x,y)=(-1,2)$
c) $(x,y)=(5,3)$ d) $(x,y)=(3,2)$

S3C6 E1

a) $x=3, y=10$ b) $x=5, y=3$

E2

a) $x=2, y=1$ b) $x=5, y=3$
c) $x=4, y=3$ d) $x=5, y=1$
e) $x=3, y=5$ f) $x=3, y=4$
g) $x=1, y=2$ h) $x=4, y=1$
i) $x=-1, y=2$ j) $x=4, y=5$

S4C1

a) $(x,y)=(4{,}1)$ b) $(x,y)=(3{,}7)$
c) $(x,y)=(1{,}6)$

S4C2

a) $(x, y) = (8,1)$ b) $(x, y) = (6, 4)$
c) $(x, y) = (4,6)$

S4C3

a) $(x, y) = (3,2)$ b) $(x, y) = (3, 4)$
c) $(x, y) = (-3,9)$

S4C4

a) $x = 7, y = 4$ b) $x = -1, y = 2$
c) $x = 4, y = 3$ d) $x = 4, y = 6$
e) $x = 13, y = 10$ f) $x = 3, y = 2$
g) $x = 5, y = 2$ h) $x \quad = 13, \quad = 6$

S5C1

a) Costo de un marcador: C$ 20
Costo de un borrador: C$ 18
b) Costo de cada uno: C$ 80 *y* C$ 20

S5C2

a) Base: 4 cm, Altura: 3 cm
b) Base: 12 cm, Altura: 18 cm

Desafío (Método de reducción de sistemas de tres ecuaciones)

E1

a) $(x, y, z) = (4, 2, -1)$ b) $(x, y, z) = (3, 0, 1)$

UNIDAD 3

S1C1 $y = 2x$

S1C2 $y = 2x + 6$

S1C3

a) Es una función de primer grado
Proporcional a x: $3x$, Constante:0
b) No es una función de primer grado
c) Es una función de primer grado
Proporcional a x: $4x$, Constante:1
d) Es una función de primer grado
Proporcional a x: $-2x$, Constante:3

S1C4 E1

Son funciones de primer grado:
a) $y = -2x + 3$ b) $y = 1 + 3x$
c) $y = \frac{3}{2}(x - 4)$

E2

a) $y = 5x$ y c) $y = \frac{x}{20}$

E3

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	9	12	15	18	21	24	27	30	33

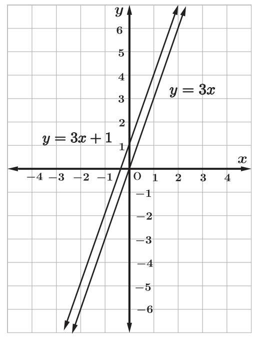
b) $y = 3x + 9$

S2C1

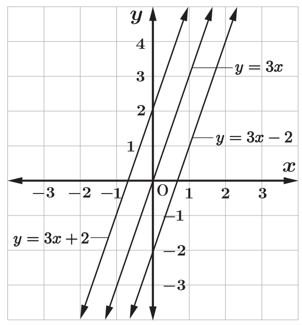
a)

x	-2	-1	0	1	2
$3x$	-6	-3	0	3	6
$3x+1$	-5	-2	1	4	7

b)



S2C2



S2C3

a) 3
b) 3

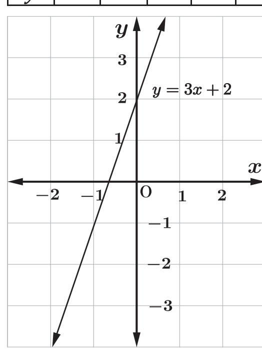
S2C4

a) $a = 3$ b) $a = -5$
c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = -\frac{4}{3}$

S2C5 E1

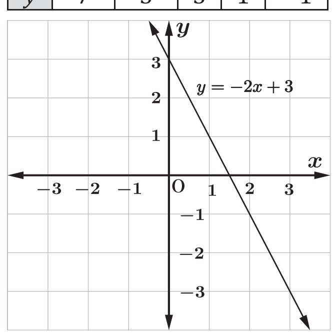
a) $y = 3x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8



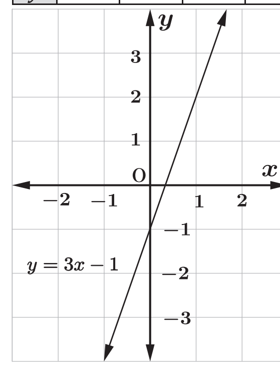
b) $y = -2x + 3$

x	-2	-1	0	1	2
y	7	5	3	1	-1



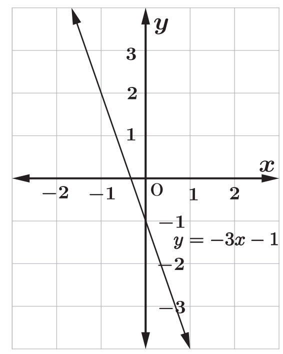
c) $y = 3x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-4	-1	2	5



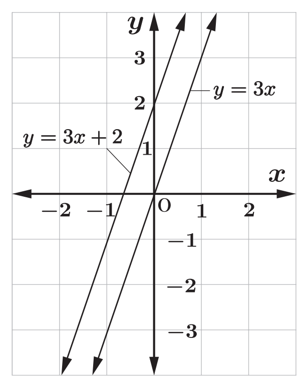
d) $y = -3x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	-1	-4	-7

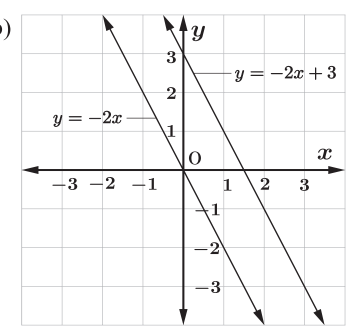


E2

a)



b)

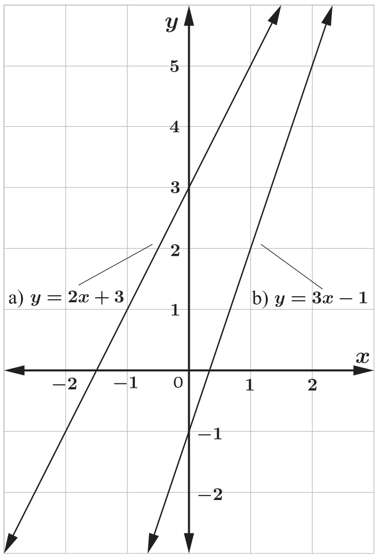


E3 *Depende opinión del estudiante.*

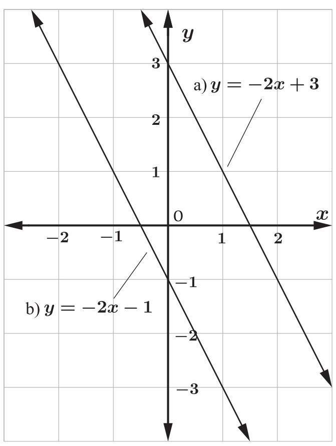
E4

a) $a = 3$ b) $a = -5$
c) $a = 3$ d) $a = \frac{3}{2}$

S2C6



S2C7



S2C8

a) $1 \leq y \leq 11$ b) $-8 < y < 1$

S2C9 E1

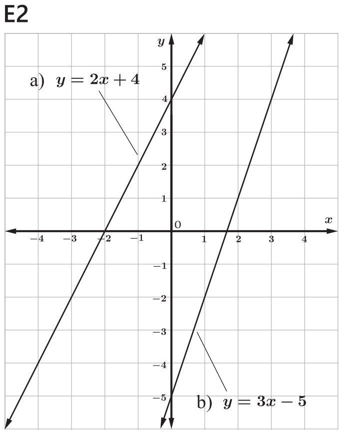
a)Pendiente: -1, Intercepto:2

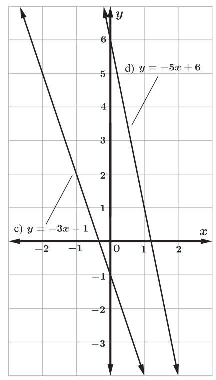
b)Pendiente: 7, Intercepto:1

c)Pendiente:-3, Intercepto:1

d)Pendiente:$2/3$, Intercepto:-4

E2





E3

a) $5 \leq y \leq 11$ b) $-5 \leq y \leq 9$

c) $0 < y < 4$

S3C1

a) $y = 3x + 2$ b) $y = 5x + 1$

c) $y = -2x + 4$ d) $y = -4x - 5$

S3C2

a) $y = 4x - 3$ b) $y = -2x + 5$

c) $y = 3x + 9$

S3C3

a) $y = 2x$ b) $y = -4x + 7$

S3C4 E1

a) $y = -x + 3$ b) $y = 2x - 4$

c) $y = 3x + 1$ d) $y = -4x + 1$

E2

a) $y = 4x - 1$ b) $y = -3x - 5$

c) $y = x + 7$ d) $y = 5x + 3$

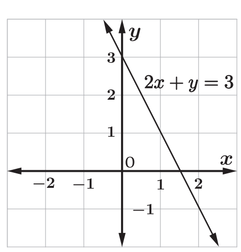
E3

a) $y = 5x - 3$ b) $y = 7x - 2$

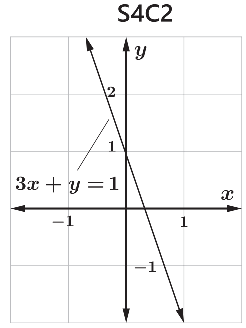
c) $y = -x + 3$ d) $y = -2x + 4$

S4C1

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
y	5	4	1

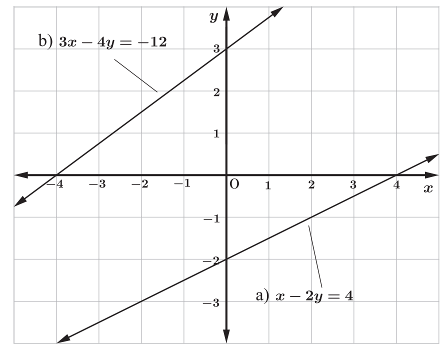


S4C2



$3x + y = 1$
$y = -3x + 1$

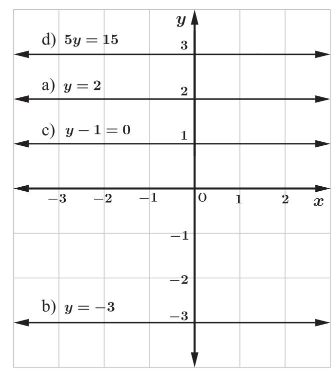
S4C3



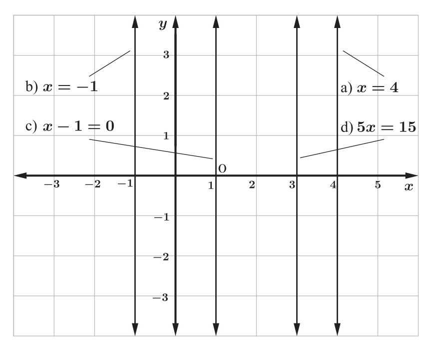
a) Intercepto con el eje x (4,0)
Intercepto con el eje y $(0,-2)$

b) Intercepto con el eje x $(-4,0)$
Intercepto con el eje y $(0, 3)$

S4C4



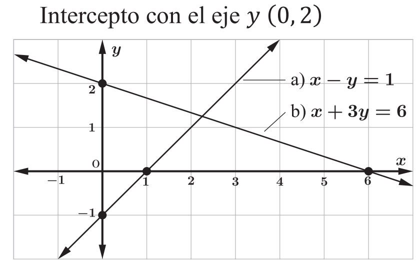
S4C5 E



S4C6 E1

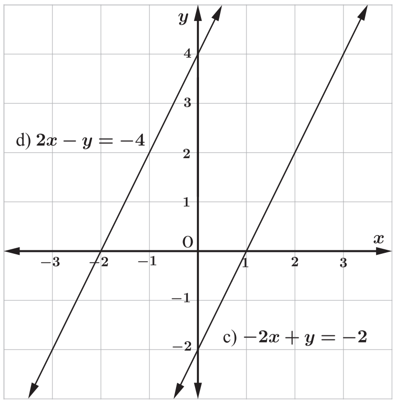
a) Intercepto con el eje x $(1, 0)$
Intercepto con el eje y $(0, -1)$

b) Intercepto con el eje x $(6, 0)$
Intercepto con el eje y $(0, 2)$

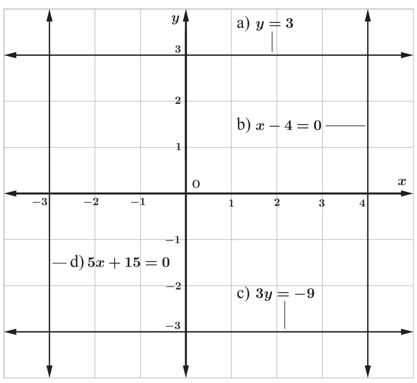


c) Intercepto con el eje x: $(1,0)$
Intercepto con el eje y: $(0,-2)$

d) Intercepto con el eje x: $(-2,0)$
Intercepto con el eje y: $(0,4)$



E2

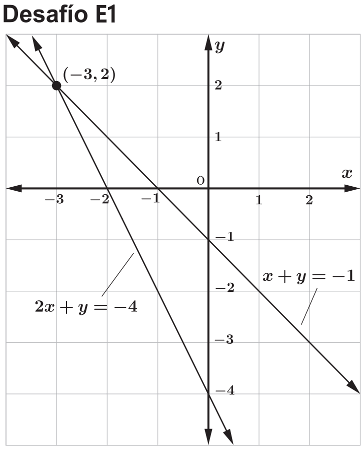


S5C1 E
$y = 4x + 20$

S5C2 E1
a) $y = 100x + 1000$ b) C\$ 1500

E2
a) $y = -100x + 2000$ b) C\$ 1000
c) 20 meses

Desafío E1



$(-3, 2)$ es la solución del sistema.

Desafío E2
$\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

Desafío E3
a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

UNIDAD 4

S1C1 E
a) $2, -2$ b) $5, -5$ c) $6, -6$
d) $7, -7$ e) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$ f) $\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}$

S1C2 E1
a) $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ b) $\sqrt{11}, -\sqrt{11}$
c) $\sqrt{31}, -\sqrt{31}$

E2
a) 2,2361 b) 3,3166 c) 5,5678

S1C3 E
a) 5 b) 6 c) -7

S1C4 E
a) $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ b) $\sqrt{11} < \sqrt{13}$
c) $3 < \sqrt{10}$ d) $-\sqrt{3} < \sqrt{7}$

S1C5 E
a) es no periódico.
b) es periódico, período es 13.
c) es periódico, período es 1234.

S1C6 E
a) Racional b) Irracional
c) Racional d) Racional

S1C7
1.
a) $1, -1$ b) $8, -8$ c) $10, -10$ d) $\frac{6}{7}, -\frac{6}{7}$

2.
a) 6 b) 5 c) -5 d) $-\frac{6}{7}$

3.
a) 8 b) 5 c) 11 d) 12

4.
$-\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{5}$

5.
a) Irracional
b) Racional
c) Racional
d) Racional

Desafío
$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

S2C1 E
a) 8 b) $\sqrt{35}$ c) -9 d) $\sqrt{42}$

S2C2 E
a) 4 b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) -3 d) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

S2C3
E1
a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{72}$
E2
a) $-\sqrt{28}$ b) $-\sqrt{32}$

S2C4 E
a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{5}$
d) $-5\sqrt{3}$ e) $-5\sqrt{6}$

S2C5 E
a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ d) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

S2C6 E1
a) $\sqrt{30}$ b) $-2\sqrt{10}$ c) $\sqrt{30}$
d) 5 e) -2 f) -2

E2
a) $\sqrt{175}$ b) $\sqrt{288}$
c) $\sqrt{147}$ d) $-\sqrt{486}$

E3
a) $2\sqrt{2}$ b) $-3\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{5}$ d) $-7\sqrt{5}$
e) $7\sqrt{7}$

E3
a) $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\frac{\sqrt{30}}{6}$
d) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ e) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

S2C7 E
a) $10\sqrt{5}$ b) $14\sqrt{7}$ c) $6\sqrt{6}$
d) $6\sqrt{8}$ e) $5\sqrt{7} - 6$ f) $6\sqrt{13} - 5\sqrt{11}$

S2C8 E
a) $5\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $17\sqrt{11}$ d) $15\sqrt{2}$

S2C9 E
a) $3 + 7\sqrt{3}$ b) $\sqrt{42} - 7$
c) $2\sqrt{15} + \sqrt{6}$ d) $35 - \sqrt{30}$

S2C10 E
a) $24\sqrt{5}$ b) $-7\sqrt{11}$ c) $16\sqrt{7}$
d) $9\sqrt{3}$ e) $37\sqrt{2}$ f) $4\sqrt{2}$
g) $-23\sqrt{3}$ h) $\sqrt{55} + \sqrt{35}$
i) $6\sqrt{15} - 3\sqrt{10}$ j) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{15}$
k) $2\sqrt{6} - 6$ l) $3\sqrt{35} + 10\sqrt{21}$
m) $22\sqrt{10}$

UNIDAD 5

S1C1 E

a) $a = 20°$
b) $b = 45°$
c) $c = 53°$

S1C2 E

a) $a = 140°$
b) $b = 50°$
c) $c = 150°$

S1C3 E

a)
$a = 48°$
$b = 132°$
$c = 48°$

b)
$a = 39°$
$b = 51°$
$c = 129°$

S2C1 E

a) $\angle b$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle e$
b) $\angle a$ y $\angle h$, $\angle c$ y $\angle f$
c) $\angle a$ y $\angle e$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$, $\angle d$ y $\angle h$

S2C2 E

a) $a = 30°$
b) $c = 150°$

S2C3 E

a) $a = 150°$
b) $c = 30°$

S2C4 E

a) c = 150°
b) $a = 30°$

S2C5 E

a) $c = 50°$
$d = 70°$
b) $c = 30°$
$d = 50°$

S2C6 E

1.
$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n}$

2.
a) $a = 52°$ b) $a = 118°$

S2C7 E1

a) $x = 120°$
$y = 60°$

b) $x = 75°$
$y = 105°$

E2

a) $c = 52°$
$d = 75°$

b) $c = 67°$
$d = 65°$

E3

a) Como ángulos correspondientes entre $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ tienen la misma medida (52°), entonces $\overleftrightarrow{m} \parallel n$

b) Como $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$, entonces $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n}$.

c) $x = 72°$
$y = 56°$

d) 180°

S3C1 E

a) 50°
b) 30°

S3C2 E

a) $x = 130°$
b) $x = 40°$

S3C3 E

a) 1080°
b) 1440°

S3C4 E

a) 128,571 ... °
b) 135°

S3C5 E1

a) $x = 150°$
$y = 63°$

b) $x = 36°$
$y = 56°$

c) $x = 65°$
$y = 135°$

d) $x = 37°$
$y = 143°$

e) $x = 110°$
$y = 125°$

f) $x = 122°$
$y = 134°$

E2

$x = 110°$

E3

a) 90°
b) 144°

UNIDAD 6

S1C1 E

a) ② es congruente al triángulo ①
b) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

S1C2 E

a) Los lados correspondientes son:
$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$; $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$
Los ángulos correspondientes son:
$\angle A$ y $\angle D$; $\angle B$ y $\angle E$; $\angle C$ y $\angle F$
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) Los lados correspondientes son:
$\overline{AB}$ y $\overline{ED}$; $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$; $\overline{CA}$ y $\overline{FE}$
Los ángulos correspondientes son:
$\angle A$ y $\angle E$; $\angle B$ y $\angle D$; $\angle C$ y $\angle F$
$\Delta ABC \cong \Delta EDF$

S1C3 E

a) $DE = BA = 7\ cm$
$EF = AC = 6\ cm$
$DF = BC = 5\ cm$

b) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

S1C4 E

a) Como $\measuredangle A = \measuredangle D = 56°$, $AB = DE = 2\ cm$, $\measuredangle B = \measuredangle E = 70°$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) Como las medidas de $\angle A$ y $\angle D$ son diferentes, entonces ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S1C5 E

a) Como $AB = DE = 5\ cm$, $BC = EF = 6\ cm$, $CA = FD = 4\ cm$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
b) Como las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son diferentes, ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S1C6 E

a) Como $AB = DE = 3\ cm$, $\measuredangle A = \measuredangle D = 35°$, $AC = DF = 2\ cm$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
b) Como las medidas de $\angle A$ y $\angle D$ son diferentes, entonces ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S1C7 E1

$\Delta ABC \cong \Delta MON$ (LLL)
$\Delta DEF \cong \Delta PQR$ (LAL)
$\Delta GHI \cong \Delta JKL$ (ALA)

E2

a) Como $AB = DB$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$, $CB = EB$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DBE$ (LAL)
b) Como $AB = AD$, $BC = DC$, $AC = AC$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ (LLL)
c) Como $\measuredangle A = \measuredangle D$, $AB = DB$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DBC$ (ALA)

S2C1 E

a) Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
$AC = DC$
Tesis: $\Delta ACB \cong \Delta DCE$

b)

Pasos
2. $\measuredangle A = \measuredangle D$
5. $\Delta ACB \cong \Delta DCE$

Justificación
1. Hipótesis
4. Por ser opuestos por el vértice
3. Hipótesis

S2C2 E

a) Hipótesis: $AB = AD$
$BC = DC$
Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

b)

Pasos
3. $AC = AC$

Justificación
1. Hipótesis
2. Hipótesis
4. LLL en pasos 1,2 y 3

S2C3 E

a) Hipótesis: $AB = DB$
$BC = BE$
Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DBE$

b)

Pasos
2. $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$
4. $\Delta ABC \cong \Delta DBE$

Justificación
1. Hipótesis
3. Hipótesis
4. LAL en pasos 1,2 y 3

S3C1 E

a) $\measuredangle A = 40°$
$\measuredangle C = 100°$

b) $\measuredangle B = 50°$
$\measuredangle C = 80°$

c) $\measuredangle A = 47°$
$\measuredangle B = 47°$

S3C2 E

a) $AB = 6\ cm$ b) $AB = 2\ cm$ c) $\measuredangle B = 50°$

S3C3 E

ΔABC ($\measuredangle BAC = \measuredangle BCA$)
ΔCDE ($\measuredangle CDE = \measuredangle CED$)
ΔEDA ($\measuredangle EDA = \measuredangle EAD$)

S3C4 E

a) Hipótesis: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$
Tesis: $AB = BC = AC$ (ΔABC es equilátero)

b)

Pasos
4. $AC = AB$

Justificación
1. Hipótesis
2. Teorema del triángulo isósceles
3. Hipótesis
4. Teorema del triángulo isósceles
6. Definición del triángulo equilátero en paso 5

S3C5 E1

a) $\measuredangle A = 36°$
$\measuredangle C = 108°$

b) $\measuredangle A = 40°$
$\measuredangle C = 100°$

c) $\measuredangle A = 30°$
$\measuredangle B = 30°$

E2

a) Hipótesis: $AC = BC$ (ΔABC es isósceles)
Tesis: $x = y$

b) Pasos

3. $x + \measuredangle A = 180° = y + \measuredangle B$

Justificación

1. Hipótesis
2. Teorema del triángulo isósceles
3. Ángulos suplementarios
4. Por pasos 2 y 3

E3

a) Hipótesis: $AC = BC$, y $AD = BE$
Tesis: $BD = AE$

b) Pasos

2. $AD = BE$
4. $AB = BA$
6. $BD = AE$

Justificación

1. Hipótesis
2. Hipótesis
3. Teorema del triángulo isósceles
5. Por pasos 2, 3 y 4 (LAL)

S4C1 E

a) Como en los triángulos se tiene $\measuredangle B = 90°$ y $\measuredangle E = 90°$, son rectángulos.
Las hipotenusas tienen la misma medida:
$$AC = DF = 3cm$$
Un par de ángulos agudos tiene la misma medida:
$$\measuredangle A = \measuredangle D = 50°$$
Por HA resulta que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) Como las hipotenusas de los rectángulos tienen diferentes medidas
$$(AC = 4\ cm, DF = 2\ cm),$$
ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S4C2 E

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$
Como en los triángulos se tiene $\measuredangle B = 90°$ y $\measuredangle E = 90°$, son rectángulos.
Las hipotenusas tienen la misma medida:
$$AC = DF = 5\ cm$$
Un par de catetos tiene la misma medida:
$$BC = EF = 3\ cm$$
Por HC resulta que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

S4C3 E1

a) Hipótesis: $AC = BC$ (ΔABC es isósceles)
$$\measuredangle AHC = 90°$$
Tesis: $\Delta ACH \cong \Delta BCH$

b) Pasos

4. $CH = CH$

Justificación

1. Hipótesis
3. $\measuredangle BHC = 180° - \measuredangle AHC = 90°$
5. HC en pasos 1,2,3 y 4

E2

a) Hipótesis: $\overline{AC}$ es bisectriz de $\angle BAD$
Tesis: $\Delta CAD \cong \Delta CAB$

b) Pasos

3. $\measuredangle CAD = \measuredangle CAB$
4. $AC = AC$
5. $\Delta CAD \cong \Delta CAB$

Justificación

1. Hipótesis
2. Hipótesis
3. Por paso 2

E3

a) Hipótesis: $DB = CA$
Tesis: $AD = BC$

b) Pasos

3. $AB = BA$
4. $\Delta DBA \cong \Delta CAB$

Justificación

1. Hipótesis
2. Hipótesis
4. HC en pasos 1,2 y 3
5. Por paso 4

UNIDAD 7

S1C1 E

a) $\measuredangle A = 70°$
$\measuredangle D = 110°$
$AD = 5\,cm$
$DC = 14\ cm$

b) $AC = 8\,cm$

S1C2 E

a) Pasos

1. $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle BAC$
2. $\measuredangle DCB = \measuredangle DCA + \measuredangle BCA$
3. $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$

Justificación

1. Hipótesis
2. Hipótesis
3. Por pasos 1 y 2, y pasos 2 y 4 del ejemplo

b) Pasos

1. $\Delta CAB \cong \Delta ACD$
2. $\measuredangle CBA = \measuredangle CDA$

Justificación

1. Por paso 5
2. Por paso 5 y $\angle CBA$ coincide con $\angle CDA$

S1C3 E

Pasos

1. $\measuredangle AOE = \measuredangle COF$
3. $\measuredangle EAO = \measuredangle FCO$

Justificación

2. Las diagonales de cuadrilatero se interceptan en su punto medio.
4. ALA en pasos 1,2 y 3

S1C4 E1

$AB = 8\ cm$ $\quad$ $BC = 6\ cm$
$\measuredangle A = 105°$ $\quad$ $\measuredangle B = 75°$

E2

$EI = 3\ cm$ $\quad$ $IH = 2\ cm$
$\measuredangle A = 60°$ $\quad$ $\measuredangle AEF = 120°$

E3

a) Pasos

3. $\measuredangle ABE = \measuredangle CDF$
5. $\Delta ABE \cong \Delta CDF$

Justificación

2. Hipótesis
4. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo
6. Por paso 5

S2C1 E

Pasos

5. $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$
7. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Justificación

3. LLL en pasos 1 y 2
4. Por paso 3
6. Por paso 3
8. Por pasos 5 y 7

S2C2 E

a) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, porque tiene los ángulos opuestos con la misma medida.
$$\measuredangle A = \measuredangle C = 100°$$
$$\measuredangle B = \measuredangle D = 80°$$

b) El cuadrilátero EFGH no es un paralelogramo, porque los ángulos opuestos no tienen la misma medida.

S2C3

La respuesta se ha omitido.

S2C4 E1

Cuadrilátero ABCD
Condición sobre los lados opuestos
($AB = CD = 4\ cm, AD = BC = 2\ cm$)

Cuadrilátero EFGH
Condición sobre los ángulos opuestos
($\measuredangle E = \measuredangle G = 125°, \measuredangle F = \measuredangle H = 55°$)

Cuadrilátero IJKL
Condición sobre las diagonales
($IM = KM = 2\ cm, JM = LM = 3\ cm$)

E2

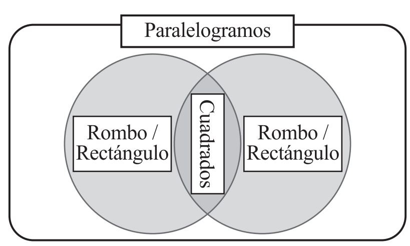
Pasos

5. $EO = FO$

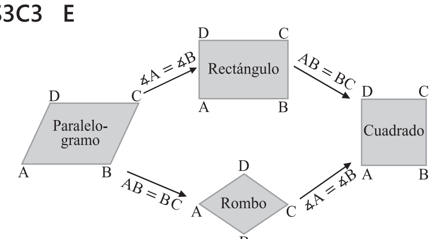
Justificación

1. Punto O es el punto medio de la diagonal AC de paralelogramo ABCD
2. Punto O es el punto medio de la diagonal BD de paralelogramo ABCD
3. Hipótesis
6. Condición sobre las diagonales en 2 y 5

S3C1 E



S3C3 E



S3C4 E1

a) Cuadrado b) Rectángulo
c) Rombo

E2

a) $BD = 5\,cm$ b) $\measuredangle ADB = 60°$

E3

Pasos
4. $AO + OC = BO + OD$
6. $AO = BO$

Justificación
1. Hipótesis
2. Las diagonales de un rectángulo tienen la misma medida.
5. Por pasos 3 y 4

UNIDAD 8

S1C1 E

a) Cono b) Prisma rectangular
c) Esfera d) Pirámide
e) Cilindro f) Pirámide
g) Prisma triangular

S1C2 E

a) $88\ cm^2$ b) $94\ cm^2$
c) $150\ cm^2$

S1C3 E

a) $90\ cm^3$ b) $80\ cm^3$
c) $72\ cm^3$

S1C4 E

a) $45\ cm^2$ b) $84\ cm^2$
c) $105\ cm^2$

S1C5 E

a) $16\ cm^3$ b) $12\ cm^3$
c) $48\ cm^3$

S1C6 E

a) $700\,cm^2$ b) $1000\,cm^3$

S1C7 E1

a) $52\ cm^2$ b) $24\ cm^2$

E2

a) $112\ cm^3$ b) $36\ cm^3$

E3

a) $20\ cm^3$ b) $12\ cm^3$

E4

Área total: $678cm^2$
Volumen: $1026\,cm^3$

S2C1 E

a) $36\pi\ cm^2$ b) $56\pi\ cm^2$
c) $54\pi\ cm^2$ d) $70\pi\ cm^2$
e) $24\pi\ cm^2$ f) $96\pi\ cm^2$

S2C2 E

a) $54\pi\ cm^3$ b) $28\pi\ cm^3$
c) $16\pi\ cm^3$ d) $50\pi\ cm^3$
e) $48\pi\ cm^3$ f) $72\pi\ cm^3$

S2C3 E

a) $14\pi\ cm^2$ b) $30\pi\ cm^2$
c) $40\pi\ cm^2$

S2C4 E

a) $8\pi\ cm^3$ b) $16\pi\ cm^3$
c) $21\pi\ cm^3$

S2C5 E

a) $16\pi\ cm^2$ b) $64\pi\ cm^2$
c) $100\pi\ cm^2$

S2C6 E

a) $\frac{32}{3}\pi\ cm^3$ b) $\frac{256}{3}\pi\ cm^3$
c) $\frac{500}{3}\pi\ cm^3$

S2C7 E

a) $104\pi\,cm^2$ b) $\frac{112}{3}\ cm^3$

S2C8 E1

a) $54\pi\ cm^2$ b) $40\pi\ cm^2$
c) $100\pi\ cm^2$

E2

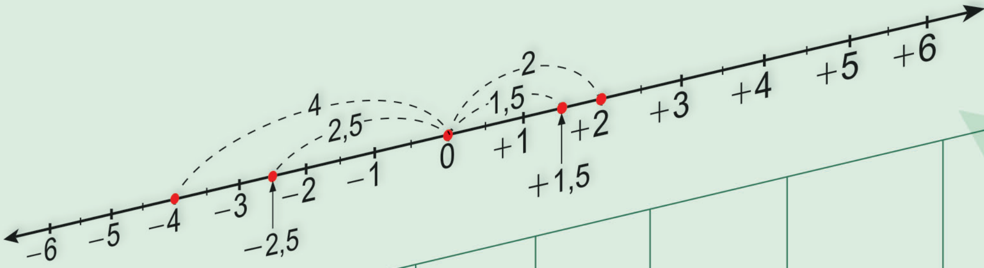
a) $250\pi\ cm^3$ b) $192\pi\ cm^3$

E3

a) $\frac{16}{3}\pi\ cm^3$ b) $2\pi\ cm^3$

E4

a) $\frac{4}{3}\pi\ cm^3$ b) $\frac{1}{6}\pi\ cm^3$



NICAMATE

Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria

MATEMÁTICA

Portal Educativo