REPÚBLICA DE NICARAGUA

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional

UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

El Pueblo, Presidente!

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

UNIÓN EUROPEA

Programa de Apoyo al Sector de Educación en Nicaragua

PROSEN

¡Orgullo de mi País!

MÓDULO Autoformativo de

MATEMÁTICA

7° Grado

2016

¡Vamos Adelante!

EN BUENA ESPERANZA, EN VICTORIAS!

CRISTIANA, SOCIALISTA, SOLIDARIA!

EDUCACIÓN SECUNDARIA A DISTANCIA EN EL CAMPO

Serie Educativa:
"Educación Gratuita y de Calidad, Derecho Humano Fundamental de las y los Nicaragüenses"

Coordinación General, Revisión y Asesoría Técnica
Profesora María Elsa Guillén
Profesora Rosalía Ríos Rivas

Autores:
MSc. Mayra Azucena Blandón Gutiérrez
MSc. Julia Argentina Granera Rugama

Revisión Técnica General
Profesora Rosalía Ríos Rivas

Revisión y Asesoría Técnica Científica
Profesor Francisco Emilio Díaz Vega
Profesor Humberto Antonio Jarquín López

Diseño y Diagramación
Miguel Ángel Mendieta

Fuente de Financiamiento
Recursos del Tesoro - PROSEN

Primera Edición 2016

«La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Unión Europea a través del Programa de Apoyo al Sector Educación en Nicaragua (PROSEN). El contenido de la misma es responsabilidad exclusiva del MINED y en ningún caso debe considerarse que refleja los puntos de vista de la Unión Europea».

PRESENTACIÓN

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través del Ministerio de Educación (MINED), entrega a docentes y a estudiantes de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, el módulo autoformativo el cual ha sido elaborado con el propósito de fortalecer el proceso de aprendizaje de las y los estudiantes y los valores de la cultura campesina.

El módulo es un instrumento de trabajo independiente para el estudiante con actividades de iniciación, desarrollo y consolidación, que permitirán alcanzar los indicadores de logro en cada una de las disciplinas.

Las diversas actividades que se orientan en el módulo contribuyen a promover el autoestudio, el autocontrol, la autoevaluación y el "aprender a aprender" en la que el estudiante apliquen los conocimientos, habilidades, actitudes y valores adquiridos a través de su formación, transformar su entorno, su comunidad y país.

El módulo contiene información diversificada que propiciará en las y los educandos empoderarse y fortalecer sus conocimientos, lo cual evidentemente servirá como instrumento didáctico muy valioso que le facilitará valorar, corregir y perfeccionar sus habilidades respetando la cultura campesina de trabajar y estudiar, a fin de que se sienta miembro fundamental de su comunidad.

Este documento es propiedad social, por tanto debe cuidarse para que también le sea de provecho a otros estudiantes, razón por la que le sugerimos lo forre, evite mancharlo, ensuciarlo, romperlo o deshojarlo. Esa será su contribución desinteresada y solidaria, con los próximos estudiantes que utilizarán este módulo.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INTRODUCCIÓN

Apreciables niñas, niños y adolescentes:

El presente módulo corresponde a séptimo grado de Matemática en la modalidad de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, el cual se ha elaborado con mucho esfuerzo y dedicación, haciendo realidad una vez más la restitución de derechos que promueve nuestro Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional.

Se pretende que este recurso didáctico sea un instrumento eficaz para su el aprendizaje y desarrollo de sus habilidades y destrezas, utilizando las operaciones y propiedades del conjunto de los números enteros y racionales, así como las magnitudes proporcionales y aplicación del Sistema Internacional de Unidades en la resolución de problemas que a diario acontecen en la vida cotidiana.

El módulo está estructurado en cuatro unidades:

I. El conjunto de los números enteros en la naturaleza.
II. El conjunto de los números racionales en la vida cotidiana.
III. Aplicaciones de las magnitudes proporcionales al trabajo.
IV. Aplicaciones de la Geometría Euclidiana.

Esta herramienta didáctica se elaboró utilizando un lenguaje sencillo y comprensible. En él se proporcionan: conceptos, definiciones, propiedades, ejemplos y problemas de aplicación a la vida del al campo, así como ilustraciones, imágenes y mapas conceptuales, que facilitarán el análisis y comprensión de la Matemática.

Se recomienda realizar las “Actividades de aprendizaje” propuestas en el módulo, así como las soluciones correspondientes a las mismas. De igual manera, les sugerimos exponer sus dudas en los encuentros presenciales y tutoriales.

Estas actividades les brindan la oportunidad de poner en práctica la creatividad, adaptada a sus capacidades e intereses y encaminados hacia el logro de los desempeños de aprendizaje e indicadores del logro propuestos en el programa de Matemática.

Al finalizar el estudio de cada unidad, se les presentan actividades de autoevaluación, donde aplicarán los conocimientos y habilidades adquiridos durante el desarrollo del módulo; lo que permitirá una valoración del avance de su aprendizaje.

Es importante recordar que los módulos son propiedad social, razón por la cual se deben cuidar con esmero, no rayarlos ni destruirlos; lo que permitirá que otros estudiantes que están en los grados que les anteceden, también puedan hacer uso de ellos. De esta forma se demuestra el sentido de responsabilidad, compañerismo y solidaridad, valores que deben prevalecer en ustedes y que son promovidos y fortalecidos permanentemente por el Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional (GRUN).

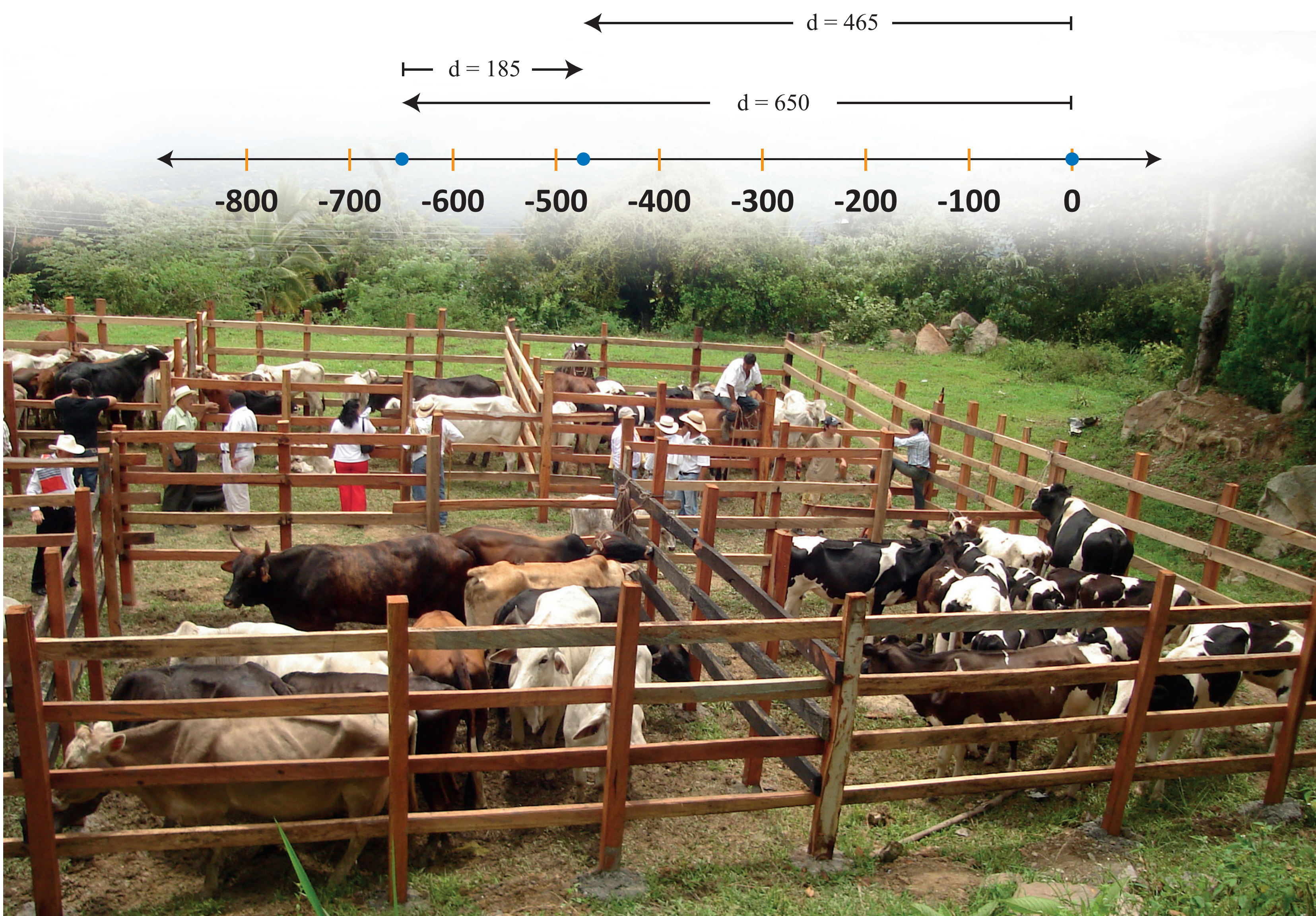
CONTENIDO

DESEMPEÑOS DE APRENDIZAJE

- Aplica operaciones y propiedades del conjunto de los números enteros en la resolución de problemas de su entorno.
- Resuelve problemas de su entorno , utilizando las operaciones y propiedades del conjunto de los números racionales.
- Interpreta y utiliza las magnitudes proporcionales para darle solución a situaciones del trabajo rural.
- Aplica el sistema internacional de unidades en la resolución de problemas de área y perímetro asociados a situaciones propias de mediciones agrarias.

I UNIDAD

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN LA NATURALEZA ($\mathbb{Z}$)



I Unidad El conjunto de los números enteros en la naturaleza (ℤ)

Desempeño de aprendizaje

Aplica las operaciones y propiedades del conjunto de los números enteros en la resolución de problemas asociados a su entorno.

Ejes transversales

Practica y promueve acciones de sensibilización para la protección, conservación y preservación del medio ambiente y los recursos naturales, en el hogar, escuela y comunidad, con perspectiva de alcanzar un comportamiento amigable con el medio ambiente.

1 Números Enteros

Indicador de logro

Represente el conjunto de los números enteros en la recta numérica, a partir de la resolución de problemas en situaciones de su realidad.

1.1 Necesidad del surgimiento de los números enteros

Recordemos

¿Qué números utilizamos para contar o escribir cantidades?

Los números naturales y el cero.

Desde que nos levantamos por la mañana para realizar nuestras labores diarias, utilizamos los números naturales. Por ejemplo: si observamos a nuestro alrededor el número de objetos que existen, si contamos el número de personas que conforman nuestra familia, el número de árboles que hemos plantado para proteger el medio ambiente, el número de plantas, las plagas que afectan los cultivos, entre otros.

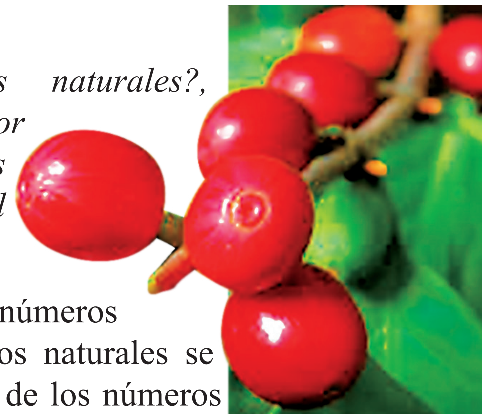
Mencionemos otros ejemplos que existen en nuestra comunidad y nuestro país, donde refleje la importancia de los números naturales:____

Sabemos que el ser humano aprendió a tomar notas de las cosas que poseía, unas veces haciendo nudos en una cuerda, mediante el uso de piedras y haciendo marcas en los árboles. Al hacer este tipo de anotación fue cuando empezaron a existir los primeros numerales.

Un numeral es un símbolo o grupos de símbolos que se emplean para representar números.

Reflexionemos

Sabemos que el café es el principal producto de exportación, es el rubro de mayor importancia en el sector agrícola de Nicaragua.



¿Qué pasaría si no conociéramos los números naturales?, conoceríamos la información si no se utilizaran símbolos? Por en Nicaragua existen aproximadamente 45 000 productores quienes utilizan más de 189 219 manzanas para cultivar el grano.

Debemos estar claros de la necesidad del conocimiento de los números para el desarrollo de nuestro quehacer diario. Los números naturales se para contar objetos. A continuación se presenta el conjunto de los números

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Recordemos que el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) los describimos en forma de conjunto de la siguiente manera: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

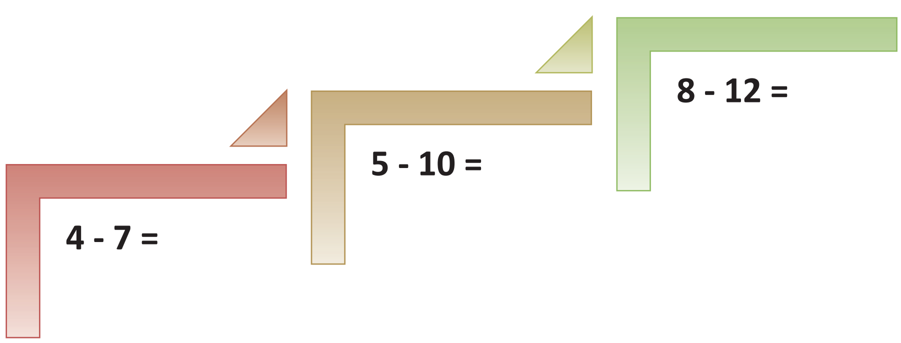
Su representación gráfica en la recta numérica es como se muestra a continuación:

Observamos que la recta numérica se extiende indefinidamente de forma horizontal hacia la izquierda y hacia la derecha.

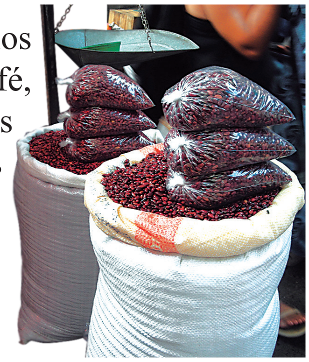
El conjunto de los números naturales no se puede extender antes del uno. Por lo tanto, presentan insuficiencia ya que no satisfacen algunas situaciones como las siguientes:

1. **El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es cerrado en la operación de sustracción.**

Analicemos los siguientes ejemplos:



¿Cuál es el resultado de la operación de 4 – 7? Sabemos que 7 es mayor que 4; es decir el sustraendo es mayor que el minuendo, entonces tenemos una insuficiencia en la sustracción, porque si **$4 - 7 = x$**, observamos que la variable x no representa un número natural. **¿Cómo se escribirá el resultado? ¿Cómo se leerá?**



Igualmente ocurre cuando compramos los productos básicos; utilizamos los números naturales para saber los precios del arroz, frijoles, maíz, aceite, café, jabón, entre otros. Si el costo de los productos es C$650,00 (seiscientos cincuenta córdobas) y solamente contamos con C$ 500,00 (quinientos córdobas). ¿Cuánto dinero me falta para pagar el total de los productos que solicité?

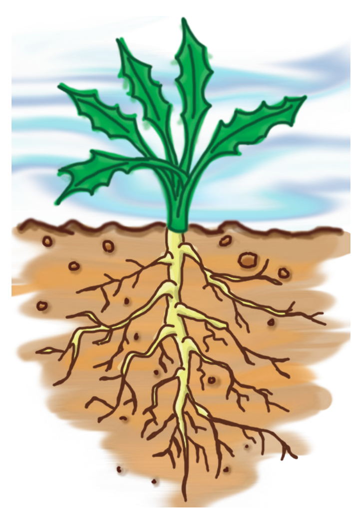
Actividades

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios

Escriba en el espacio indicado con una línea el número entero que representa cada una de las siguientes expresiones:

1. La ganancia de la cosecha de café fue C$ 5 000. ______________________________
2. La maquinaria que se perdió costaba C$ 200 000. ______________________________
3. El dinero ahorrado en CARUNA es C$ 6 500. ______________________________
4. En el Banco Produzcamos debo C$ 18 500. ______________________________
5. El bono productivo de las mujeres es de C$ 5 000. ______________________________
6. Las pérdidas en la cosecha de café son C$ 6 000. ______________________________
7. Ayer la temperatura en Managua fue 38º *C*. ______________________________
8. Invertimos en la producción de café C$ 45 000. ______________________________
9. El maíz que se perdió costaba C$ 2 000. ______________________________

1.2 Concepto y definición de los números enteros ($\mathbb{Z}$)



Como hemos mencionado, hay ocasiones en las que los números naturales no responden a algunas situaciones que enfrentamos en la vida cotidiana. Respondamos las siguientes preguntas:

¿Cuál es la altura de la planta que está ubicada en la imagen que se muestra a continuación? ¿Cuál es la altura de las raíces de la planta?

En la imagen observamos una planta que muestra dos partes: una parte sobre la superficie y la otra debajo de la superficie.

Podemos afirmar que sobre la superficie está la palmera y debajo de la superficie se encuentran las raíces.

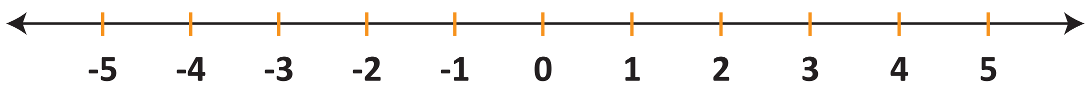
Sabemos que podemos expresar la altura de la palmera con números naturales porque está sobre la superficie (origen); pero¿Cuáles son los números que nos permiten representar la profundidad de las raíces?

Nosotros podemos medir la altura de la palmera porque está sobre la superficie de la tierra y representar con números naturales; pero la profundidad de las raíces no podríamos medirlas ni represetarlas, porque necesitaríamos ampliar el conjunto de los naturales, aumentando además del cero, los números negativos, que es conjunto que necesitamos para representar la profundidad y formar **el conjunto de los números enteros.**

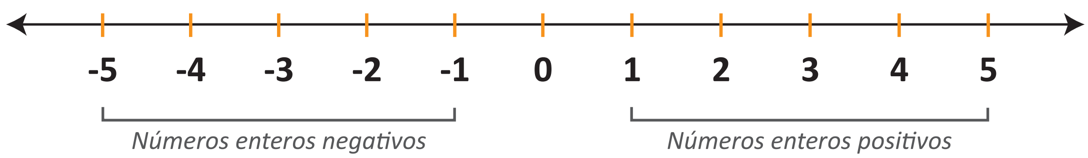
El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$ y se expresa en forma de conjunto, de la forma siguiente:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

La representación gráfica en la recta numérica es como se muestra a continuación:



El conjunto de los números enteros que aparece a la derecha del cero son los positivos y los que aparecen a la izquierda son los negativos.



Ahora podemos representar 6 metros bajo el agua, 4 metros bajo el agua y 2 metros bajo el agua con los números enteros de la siguiente forma:

- 6 metros bajo el agua se representa por el número entero -6
- 4 metros bajo el agua se representa por el número entero -4
- 2 metros bajo el agua se representa por el número entero -2

Actividades

I. Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios.

Escriba en el espacio indicado con una línea el número entero que representa cada una de las siguientes expresiones:

1. Un submarino se encuentra a 5 metros bajo el agua. ____________________
2. En Rusia, la temperatura estuvo en 7º C bajo cero. ____________________
3. Mi deuda en el Banco Produzcamos es C$ 5 000. ____________________
4. La roca se encuentra 7 metros bajo el agua. ____________________
5. La raíz del árbol de pino está a 1 metro de profundidad. ____________________

1.3 El conjunto de los números enteros($\mathbb{Z}$)

Recordemos

¿Cuáles son los números que utilizamos para representar cantidades negativas, positivas y nulas?

Los Números Enteros

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ está formado por todos los enteros positivos y negativos, junto con el número cero.

Por lo tanto, podemos afirmar que: el conjunto de los números enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) *están incluidos en el conjunto de los números enteros* ($\mathbb{Z}$).

De igual manera, podemos enunciar que: el conjunto de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) *está incluido en el conjunto de los números enteros* ($\mathbb{Z}$).

El conjunto de los números enteros facilita resolver situaciones que se representan con números negativos. A continuación se mencionan:

ENTEROS
- ENTEROS NEGATIVOS
- CERO
- ENTEROS POSITIVOS

- El día de ayer en Japón la temperatura bajó a 5° C
- El gran matemático y físico Arquímedes nació en Siracusa en el año 287 a. C.
- Las pérdidas al efectuar un estado financiero fueron C$ 5 000.
- Melissa se sumergió 2 metros en las profundidades del Río Coco.
- Los gastos en la semilla de frijoles son C$ 2 000.
- Los gastos mensuales en los servicios básicos del hogar son C$500.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y realicemos los siguientes ejercicios

I. Observen los siguientes conjuntos de números enteros y ordénenlos de menor a mayor:

1. {5, -3, -6, -8, 0, 2, -10, 9, 13}
2. {0, -2, 1, - 7, -4, -12, 12, -15}
3. {-25, 100, -5, 15, 0, 28, -100, 59, -45}

II. En una ciudad de Rusia, se registran las siguientes temperaturas:

Hora	1 a.m.	3 a.m.	4 a.m.	10 a.m.	4 p.m.
Temperatura (° *C*)	-3	-1	5	16	18

1. ¿A qué hora se registra la menor temperatura?
2. ¿A qué hora se registra la mayor temperatura?
3. Ordenemos la temperatura de mayor a menor

III. Los productores de papa dicen que la cosecha se realiza entre los 90 y 120 días y recomendaron que se debe cortar el follaje entre los 10 y 15 días, después del corte del follaje se procede a realizar la cosecha.

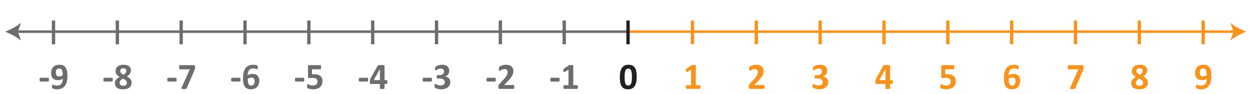
1. Representemos en la recta numérica los días que se ejecutarán las actividades propuestas por los productores.

1.4 Números enteros opuestos

Recordemos

a. *El conjunto de los números enteros es infinito, es decir $\mathbb{Z}$ es infinito, ya que no posee ni primero, ni último elemento. Por lo tanto no podemos contar sus elementos.*

b. *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es discreto, esto significa que entre cada par de números enteros consecutivos no existe otro número entero. Esto se puede observar en la recta numérica a continuación se presenta:*



c. *En el conjunto de los números enteros existe antecesor y sucesor. Por ejemplo: –1 es el antecesor de 0 y 1 es el sucesor de 0.*

En la recta numérica también podemos observar números opuestos o simétricos. A continuación observaremos ejemplos gráficos de pares de puntos opuestos o simétricos con respecto al origen (0).

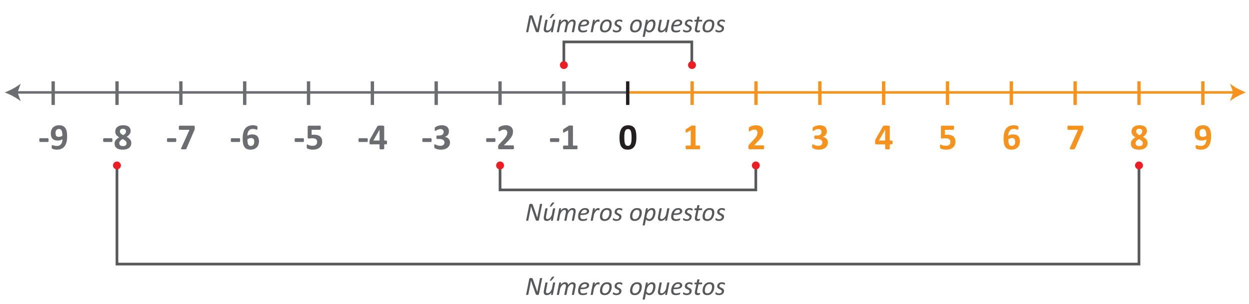
Podemos afirmar que:

Todo número entero "a" tiene su opuesto o simétrico " - a" y están asociados a sus puntos correspondientes a la misma distancia en la recta numérica con respecto al punto asociado al cero.

Ejemplo 1

Los pares de puntos correspondientes a los números enteros –1 y 1 son simétricos, ya que poseen una unidad de longitud de distancia con respecto al punto asociado al cero.

Igualmente, los números enteros –2 y 2 son simétricos, ya que poseen dos unidades de longitud de distancia con respecto al punto asociado al cero. A continuación se representan en la recta numérica:



Así podemos expresar que:

El opuesto de –1 es 1 y el opuesto de 1 es –1.

El opuesto de –2 es 2 y el opuesto de 2 es –2.

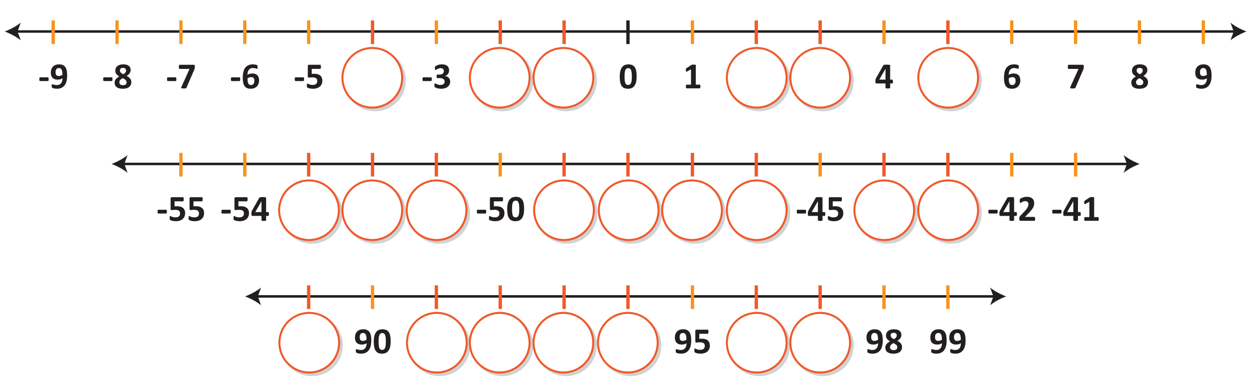
El opuesto de – 3 es 3 y el opuesto de 3 es – 3.

El opuesto de – 4 es 4 y el opuesto de 4 es –4; y así sucesivamente podemos expresar los opuestos de los números enteros.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios.

I. Completemos en la recta numérica los números enteros que faltan en los círculos.

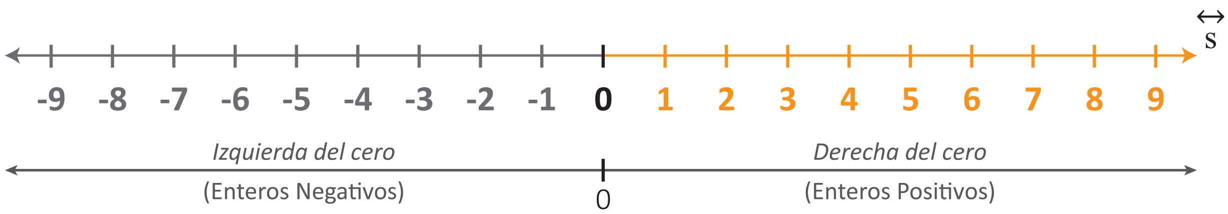


Recordemos

¿Cómo se representan gráficamente los números enteros en la recta numérica?

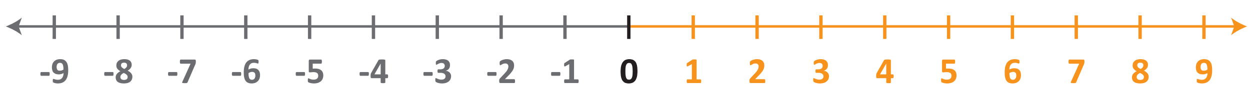
1.5 Representación gráfica de los números enteros en la recta numérica

A continuación ubicaremos los números enteros y sus opuestos en la recta numérica y de esta manera hemos ampliado el dominio numérico de los números naturales $\mathbb{N}$.



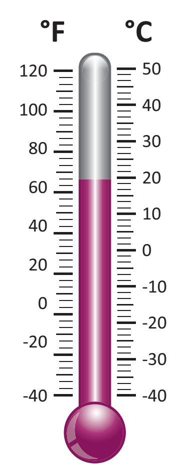
Los números enteros los podemos representar mediante puntos en una recta $\overleftrightarrow{s}$, de modo que cada número entero ***a***, le corresponda un punto de $\overleftrightarrow{s}$, y que a cada punto ***P***, en $\overleftrightarrow{s}$, le corresponda un número entero. A esto se le llama **correspondencia biunívoca.**

Primero escogeremos un punto arbitrario 0, llamado origen o punto de referencia, y a él relacionamos el número entero 0 (cero). Los puntos asociados a los enteros los determinamos trazando segmentos de rectas sucesivos de igual longitud a uno y otro lado del 0. A la izquierda del cero ubicamos los números enteros negativos y a la derecha los números enteros positivos. A continuación se muestra en la figura.



En la recta numérica se ubicó: El –1 (se lee “menos uno”); –2 (menos dos); –3 (menos tres), y así sucesivamente hasta el –∞ (se lee “menos infinito”); de igual manera está ubicado el 1 (uno), 2 (dos), 3 (tres) y así sucesivamente hasta el ∞ (infinito). También, en la recta numérica podemos representar algunas situaciones.

Ejemplo 2



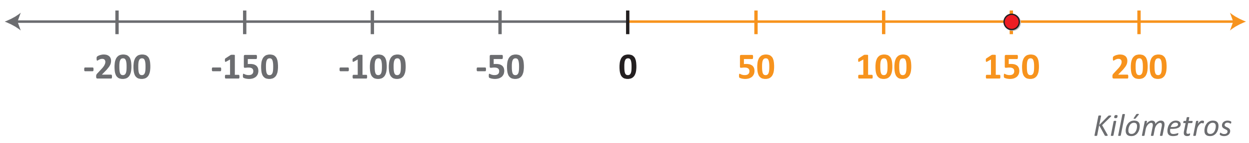
La temperatura de algunos países que a veces se encuentra bajo cero. En la figura presentamos un termómetro que está marcando la temperatura en grados Celsius y en grados Fahrenheit. Aproximadamente está señalando 19º *C* (19 grados Celsius) o 64º F (64 grados Fahrenheit).

Observemos que para la lectura de la temperatura, los números enteros positivos representan las temperaturas sobre cero y están ubicados arriba del cero y los números enteros negativos que representan las temperaturas bajo cero están ubicados debajo del cero.

Cuando graficamos en la recta numérica cantidades muy grandes debemos utilizar escalas de mayor magnitud proporcionales al número.

Ejemplo 3

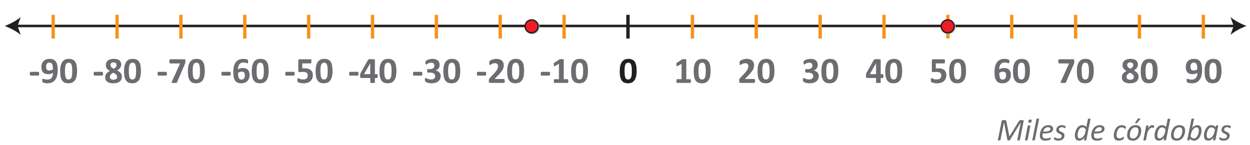
La distancia entre la ciudad de Estelí y Managua es de 150 kilómetros aproximadamente.



En este caso utilizamos una escala de 1: 50, es decir cada unidad corresponde a 50. En la recta se ubicaron los números de 0, 50, 100, 150 y 200 hacia la derecha y hacia la izquierda los números –50, –100, –150 y –200 para ubicar las marcas de la distancia en kilómetros.

Ejemplo 4

Los ingresos de la cosecha del año pasado fueron C$ 50 000 y los gastos en los insumos y pago de trabajadores fueron 15 000.



Observamos que en la recta numérica utilizamos una escala de 1:1 000. Se dividió la recta numérica de diez en diez unidades y cada diez unidades representa 10 000, 20 000, 30 000 hacia la derecha y hacia la izquierda son –10 000, –15 000 y así sucesivamente.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Grafiquemos en la recta numérica cada una de las siguientes situaciones:

1. La longitud del escritorio de la maestra es 1 metro.
2. La distancia recorrida por un niño es 2 metros.
3. Debo en la Cooperativa la cuota de este mes que equivale a C$560.
4. En la Cooperativa tengo ahorrado C$ 200.
5. La temperatura está a 18º *C* bajo cero.
6. Los peces están en el río a una profundidad de 2 metros.
7. El avión vuela a una altura de 1 500 metros.
8. La montaña mide 500 metros de altura.

II. El presidente de la Cooperativa de Productores de café presentó a todos los socios un resumen del estado financiero. A continuación se muestra:

Enero - Mayo:	Pérdidas de 2 500 córdobas mensuales.
Junio - Agosto:	Ganancias de 8 000 córdobas mensuales.
Septiembre:	Ganancias de 2 000 córdobas mensuales.
Octubre - Diciembre:	Pérdidas de 3 500 córdobas mensuales.

Describamos de forma simbólica en una recta numérica la información sobre las pérdidas y ganancias obtenidas.

2 Valor Absoluto

Indicador de logro

Grafica en la recta numérica situaciones que expresan el valor absoluto y las relaciones de orden.

Observemos

Nota: Se sugiere que se redacte así.

¿Cuánto mide la pizarra de derecha a izquierda? Anotemos los resultados en el cuaderno de trabajo.

Observamos que las medidas son iguales.

Al medir la pizarra de izquierda a derecha observamos que mide 2 m, aplicando el valor absoluto de un número, esto es $|2| = 2$ m. Cuando medimos de derecha a izquierda la pizarra, resultó -2 m, aplicando el valor absoluto, $|-2| = 2$ m. Podemos concluir que las medidas son iguales.

Geométricamente, la distancia que separa a un número y a su opuesto de cero siempre es la misma. Así podemos afirmar que el valor absoluto de un número entero, corresponde al número de unidades que separan a dicho número de cero, es decir, a la distancia del número respecto a cero. Simbólicamente, la expresión "valor absoluto" la denotaremos con el signo $|4|$ y la leemos "valor absoluto de".

Ejemplo 1

El valor absoluto de 2 que se representa por $|2|$ es igual a 2, ya que se encuentra a dos unidades del cero en la recta numérica. De la misma manera, el valor absoluto de -2 se representa por $|-2|$ y es igual a 2, porque el número 2 se encuentra a dos unidades del cero.

En conclusión, el valor absoluto para cualquier número entero es la distancia de su punto al origen en la recta numérica. Esto quiere decir que "Si el número es positivo el valor absoluto es el mismo número y si el número es negativo el valor absoluto es el mismo número, pero positivo". Por tanto:

1. $|7| = 7$
2. $|-7| = -(-7) = 7$
3. $|100| = 100$
4. $|0| = 0$
5. $|-100| = -(-100) = 100$
6. $-|375| = -(375) = 375$

Si x es un número entero ($x \in \mathbb{Z}$), el valor absoluto de x que denotamos por $|x|$ es igual a:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \text{ es positivo } (x > 0) \\ 0, \text{ si } x \text{ es igual a cero } (x = 0) \\ -x, \text{ si } x \text{ es negativo } (x < 0) \end{cases}$$

Ejemplo 2

María, coordinadora de la Cooperativa, supervisa el área de cultivo de hortalizas y camina largas distancias todos los días. En su caminata bajó al huerto de tomates una distancia de 650 m. y luego al regreso subió 185 m y descansó. ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra María?.

Solución

Como bajó 650 m, esto es -650 m.
Al subir 185 m, esto es $+185$ m $= 185$ m.
Luego aplicando el valor absoluto a los números obtenemos:
$|-650| - |185| = 650 - 185 = 465$ m.
De este resultado concluimos que María se encuentra a 465 m. de su punto de partida.

Ejemplo 3

En Nicaragua ha aumentado la temperatura debido al cambio climático. Ayer al medio día la temperatura en Estelí alcanzó 37º *C*, por la noche la temperatura descendió 15º *C*. ¿A qué temperatura amaneció el día de hoy?

Solución

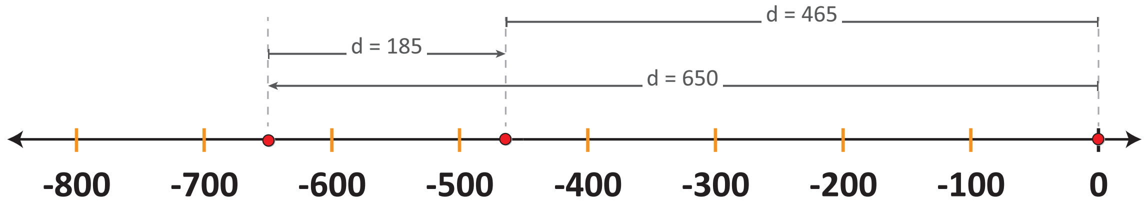
Como la temperatura inicial fue de 37º *C*, esto es + 37º *C* = 37º *C*.

Como la temperatura descendió por la noche 15º *C*, esto es –15º *C*.
Aplicando el valor absoluto a los números obtenemos:
$|37| - |-15| = 37 - 15 = 22$.

Podemos concluir que la temperatura amaneció a 22º *C*.

Ejemplo 4

En el ejemplo 1, observamos que:
María en su caminata bajó al huerto de tomates una distancia de 650 m.
Después, subió 185 m y descansó.
Esta situación la podemos representar en la recta numérica.



También podemos establecer comparaciones entre las distancias recorridas por María. Cuando María bajó al huerto de tomates recorrió una distancia de 650 m y cuando bajó 185 m. Por tal razón, podemos afirmar que entre las distancias recorridas 650 m es mayor que 185 m.

2.1 Propiedades de valor absoluto.

1. El valor absoluto de cero es cero. Simbólicamente: $|x| = 0$, sí y solo sí $x = 0$. Ejemplo: $|0| = 0$
2. El valor absoluto de x es igual al valor absoluto de $-x$. $\forall\ x \in \mathbb{Z}$. Simbólicamente:

$|x| = |-x| = x,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: Si $|10| = |-10| = 10$

El valor absoluto cuando $a \geq 0$ y $|x| = a$.

Ejemplo: Si $|x| = 7$, entonces $x = 7$ ó $x = -7$.

3. Para toda $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, se cumple que:

$|x| + |y| \geq |x + y|$

Ejemplo: Si $x = 9$, $y = 7$

$|9| + |-7| \geq |9 + (7)|$

$|9| + |-7| \geq |9 + (7)|$

$9 + 7 \geq |16|$

$16 = 16$

4. Para todo $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$, se cumple que:

$|x|\ .\ |y| \geq |x \cdot y|$

Ejemplo: Si $x = 3$, $y = 5$

$|-3| \cdot |5| = |3 \cdot 5|$

$3 \cdot 5 = |15|$

$15 = 15$

Actividades

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios.

I. Resolvamos correctamente el valor absoluto de los números enteros y las operaciones indicadas:

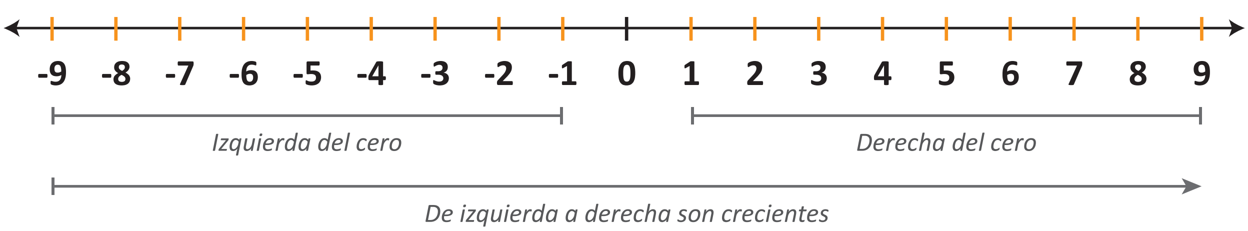
1. $|25| =$
2. $|-35| =$
3. $|25| + |-35| =$
4. $|25| + |-35| =$
5. $|25| \cdot |-35| =$
6. $|5| + |-15| =$
7. $|-9| - |8| =$
8. $|-105| =$
9. $|10| + |-5| =$
10. $|-1150| =$
11. $|-575| =$
12. $|7150| =$
13. $|-1575| =$
14. $|85 - 55| =$
15. $|855 - 575| =$
16. $|25| \cdot |35| =$
17. $|125| \cdot |264| =$
18. $|258| \cdot |375| =$

2.2 Relaciones de orden.

Los elementos del conjunto de los números enteros:

$\mathbb{Z} = \{\ldots -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Y su representación en la recta numérica:



Podemos expresar que:

1. Están ordenados de forma creciente o ascendente de menor a mayor en sentido de izquierda a derecha.
2. El cero es mayor que cualquier entero negativo. Cualquier entero positivo es mayor que cero.
3. Cualquier entero positivo es mayor que cualquier entero negativo y finalmente:

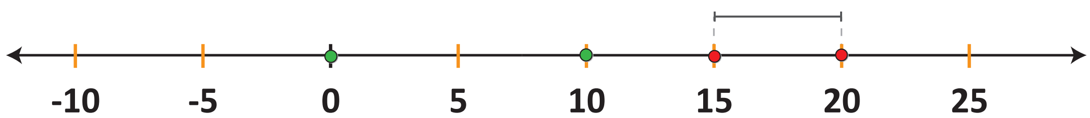
Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, a es mayor que b, si a y b es un entero positivo, que denotamos $a > b$. Además, si el punto asociado al número entero a está ubicado a la derecha del punto asociado al número b sobre la recta numérica decimos que "*a* es mayor que *b*". También podemos escribir $b < a$ y se lee "*b* es menor que *a*".

Propiedad de Tricotomía: Si a y b son números enteros ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$), entonces solo una de las expresiones siguientes es cierta: $a < b$, $a = b$ ó $a > b$.

A continuación analizaremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5

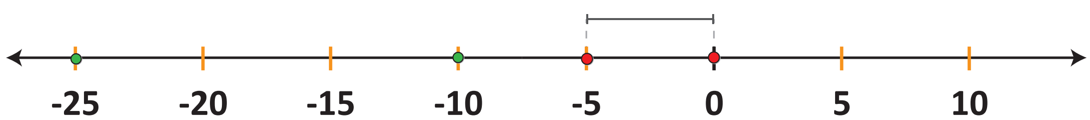
Si comparamos los números 0 y 10, observamos que 0 es menor que 10, ya que el punto que corresponde a 0 está ubicado a la izquierda del punto asociado a 10 en la recta numérica. Simbólicamente se escribe: $0 < 10$. ¿Qué sucede si comparamos los números 20 y 15?.



Ejemplo 6

Si comparamos los números –25 y –10, observamos que –25 es menor que –10, ya que el punto que corresponde a –25 está ubicado a la izquierda del punto asociado a –10 en la recta numérica. Simbólicamente se escribe:

$-25 < -10$. ¿Qué sucede si comparamos los números 0 y –5?



Hemos observado que los signos de igualdad y desigualdad los denotamos por $=$, $<$, $>$; a estos signos se les da el nombre de “signos de relación de orden”, donde el vértice del signo $<$ ó $>$ apunta al número menor y la abertura al número mayor.

A continuación se presentan las conclusiones:

- Todo número entero positivo es mayor que cero.
- Todo número entero positivo es mayor que cualquier entero negativo.
- Todo número entero negativo es menor que cero.
- Todo número entero negativo es menor que cualquier entero positivo
- Entre dos enteros positivos, es mayor el que tiene un valor absoluto mayor. Mientras más lejos de cero este un número entero mayor, su valor es mayor porque se encuentra a la derecha.
- En los enteros negativos sucede lo contrario: mientras más lejos de cero, su valor es menor porque se encuentra más a la derecha de la recta numérica.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Comparemos los siguientes números enteros y escribamos verdadero (V) o falso (F) a las proposiciones que se presentan:

1. $5 > -5$ ___
2. $-1 < 0$ ___
3. $50 = 50$ ___
4. $9 = -9$ ___
5. $4 > -20 > -30$ ___
6. $56 < -25 > -30$ ___
7. $15 < -25 < -35$ ___
8. $5 > -2 > 7$ ___
9. $12 > 10 < 6$ ___
10. $-23 < -27 > 0$ ___

II. Ordenemos los siguientes números enteros de menor a mayor y ubiquemos en la recta numérica:

1. +7, –6, +4 y –2
2. –4, +15, +10, –12 y –8
3. +8, –20, –24, +13 y –15
4. +17, –26, +14 y –12
5. +14, –15, +12, –18 y +18
6. +18, –22, +28, +15 y –35
7. –17, +26, +18y –10
8. +24, –18, +15, –15 y –18
9. +15, –20, +28, +14 y –25
10. +28, –24, +18, +11 y –15

A continuación resolveremos los siguientes problemas.

2.3 Problemas de aplicación.

Ejemplo 7

La distancia de Estelí a Managua es 150 kilómetros aproximadamente y la distancia de Managua a Sébaco es 104 kilómetros. Si en la recta numérica consideramos a Estelí como punto de partida y representamos las distancias de norte a sur con números enteros positivos y de sur a norte con números enteros negativos, al comparar las distancias entre los diferentes departamentos, ¿qué relación de orden podemos establecer?

Al comparar las distancias entre los diferentes departamentos, observamos que la distancia de Estelí a Managua es mayor que la distancia de Managua a Sébaco. Simbólicamente, estas distancias se pueden escribir:

$$\mathbf{150 > 104 \text{ ó } 104 < 150}$$

Ejemplo 8

Un grupo de estudiantes de la Universidad del Campo plantearon que en la pre-siembra se debe seleccionar el terreno, 30 días antes de la siembra, esto se simboliza –30; la aplicación del fertilizante completo el mismo día de la siembra y la siembra se ejecuta el día 1, que se denota por +1 = 1 y en el manejo el control de babosa se ejecuta 10 días después de la siembra, esto es igual a +10.

¿Cómo podemos representar en la recta numérica el tiempo de ejecución de las actividades? ¿Qué relaciones de orden podemos establecer?

Las relaciones de orden son las siguientes:

–30 < 1 y 1 < 10, esto es lo mismo que escribamos:

1 > –30 y 10 > 1. Además podemos afirmar que: **–30 < 10 y 10 > –30**

Actividades

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios.

Resolvamos correctamente los siguientes problemas aplicando el valor absoluto, representación gráfica y relaciones de orden:

1. Un joven midió un terreno de izquierda a derecha y la medida que resultó fue de 850 metros; y luego midió de derecha a izquierda y obtuvo una medición de 850 metros. ¿Cómo se representan estas cantidades?

2. En Nicaragua ha aumentado la temperatura debido al cambio climático. Ayer al medio día la temperatura en Estelí alcanzó 38º *C*, por la noche la temperatura descendió 13º *C*. ¿A qué temperatura amaneció el día de hoy?

3. La distancia de Estelí a Sébaco es 50 Kilómetros aproximadamente y la distancia de Sébaco a Managua es 104 kilómetros. Si en la recta numérica consideramos a Estelí como punto de partida y representamos las distancias de norte a sur con números enteros positivos y de sur a norte con números enteros negativos, al comparar las distancias entre los diferentes departamentos, ¿qué relación de orden podemos establecer?

4. Ana, responsable del grupo de estudios camina largas distancias todos los días para reunirse con sus compañeros. En su caminata subió una distancia de 350 m. Después, bajó 220 m y descansó. ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra Ana?

5. Un grupo de estudiantes decidió que en la pre-siembra seleccionaran el terreno, 28 días antes de la siembra; que la aplicación del fertilizante completo el mismo día de la siembra, que siembra se ejecuta el día 1 y en el manejo, el control de babosa se ejecuta 12 días después de la siembra. ¿Cómo podemos representar en la recta numérica el tiempo de ejecución de las actividades de la siembra? ¿Qué relaciones de orden podemos establecer?

3 Operaciones con números enteros

Indicador de logro

Resuelve problemas de su realidad aplicando las operaciones con números enteros y sus propiedades.

Recordemos

¿Por qué son importantes las operaciones con números enteros?

Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades.

Para introducir las operaciones con números enteros utilizaremos segmentos de rectas orientadas en forma de flechas (→) que trazaremos en forma paralela a la recta numérica. Las operaciones que estudiaremos son la adición, sustracción, multiplicación y división.

Recordemos que los signos – y + significan orientación o sentido. Esta orientación la asociamos con la dirección y sentido del segmento.

3.1 Adición

Iniciaremos la adición de números enteros de forma gráfica y partiremos del origen asociado al cero. Para sumar gráficamente un número positivo, la flecha la orientaremos hacia la derecha y para sumar gráficamente un entero negativo, la flecha la orientaremos hacia la izquierda. El resultado es la distancia del cero al punto donde arriba la última flecha.

Casos de la adición de números enteros.

En la suma de $3 + 4 = 7$, 3 y 4 son los sumandos y 7 es la suma total.

De manera general:

Si a, b y $s \in \mathbb{Z}$, $a + b = s$, donde a y b son los sumandos y s es la suma o total.

En la suma de dos enteros, de acuerdo al signo de los sumandos existen dos casos que a continuación describiremos:

3.2 Primer caso: Los sumandos poseen el mismo signo.

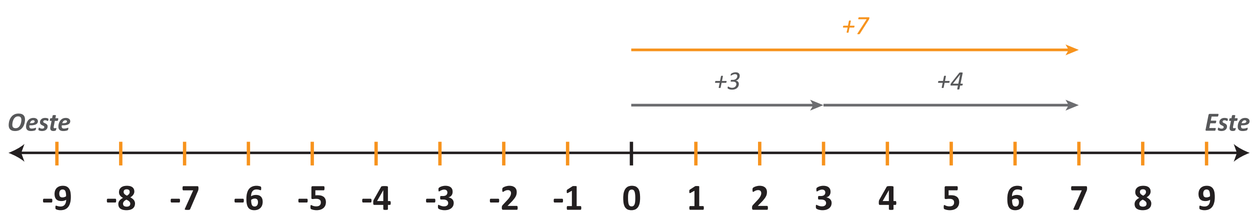
Ejemplo 1

Un grupo de estudiantes se reúne en un punto para ir a su centro de estudios. Para llegar caminan 3 kilómetros al este (3 km.). Después de un descanso siguen caminando 4 kilómetros al este (4 km.) ¿A qué distancia del punto de reunión se encuentra el centro de estudios?

Solución

Para llegar al centro de estudios, primero caminaron una distancia de 3 km al este y luego caminaron 4 km. al este; entonces a partir de cero orientamos la flecha 3 unidades a la derecha hasta +3. A continuación de la primera recta orientada, agregamos la segunda 4 unidades más a la derecha, arribando la punta de la segunda flecha a +7.

A continuación se presenta la solución gráficamente:

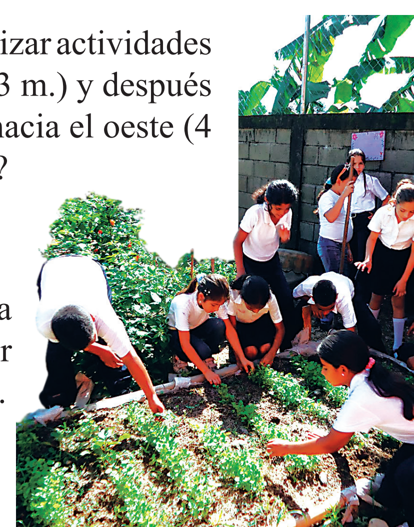


La recta resultante es la recta que va de 0 a 7, entonces su longitud es 7 unidades; por lo tanto: 3 + 4 = 7.

Observamos que la suma o total es el número entero +7, cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de +3 y +4 y el signo es el mismo de ambos sumandos, que en este caso es positivo. Por consiguiente la distancia que se encuentra el grupo de estudiantes es 7 kilómetros.

Ejemplo 2

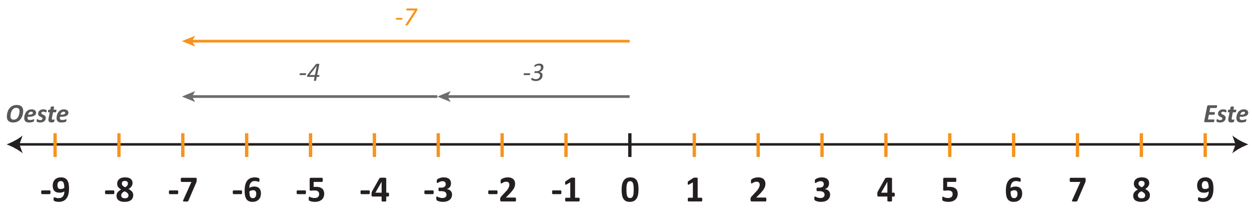
Un grupo de estudiantes salen del aula para ir al huerto escolar y realizar actividades de siembra. Para sembrar los árboles midieron 3 metros al oeste (3 m.) y después decidieron ampliar la siembra y midieron 4 metros más siempre hacia el oeste (4 m.) ¿Cuál es la distancia entre el primer y último árbol sembrado?



Solución

Para sembrar los árboles midieron 3 m al oeste y luego para ampliar la siembra midieron 4 m más al oeste, entonces a partir de cero orientamos la flecha 3 unidades a la izquierda hasta –3. A continuación de la primera recta orientada, agregamos a la segunda 4 unidades más a la izquierda, arribando la punta de la segunda flecha a –7.

Posteriormente se presenta la solución gráficamente:



La recta resultante es la recta que va de 0 a –7.

Por lo tanto: (–3) + (–4)= –7.

Observamos que la suma o total es el número entero negativo –7, cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de –3 y –4 y el signo es el mismo ambos sumandos que en este caso es negativo.

Para encontrar la distancia donde se encuentra el grupo de estudiantes del aula de clases, aplicamos el valor absoluto y obtenemos:

|–3| + |–4| = 3 + 4 = 7, de donde la longitud es 7 unidades, entonces la distancia recorrida es 7 kilómetros.

De los ejemplos 1 y 2 concluimos que:

1. ***Si sumamos enteros positivos, obtenemos un número positivo que corresponde a la suma de sus valores absolutos.***
2. ***Si sumamos enteros negativos, obtenemos un entero negativo equivalente a la suma de los valores absolutos de los sumandos.***

El procedimiento para sumar dos números enteros con el mismo signo se describe a continuación:

1. ***Encontramos la suma de los valores absolutos de los sumandos.***
2. ***Le asociamos a esta suma el signo común.***

Ejemplo 3

Sumemos:

a. +8 y +11

|+8| + |+11| = 8 + 11 = 19

b. –10 y –35

|–10| + |–35| = 10 + 35 = 45

c. –100 y –50

|–100| + |–50| = 100 + 50 = 150

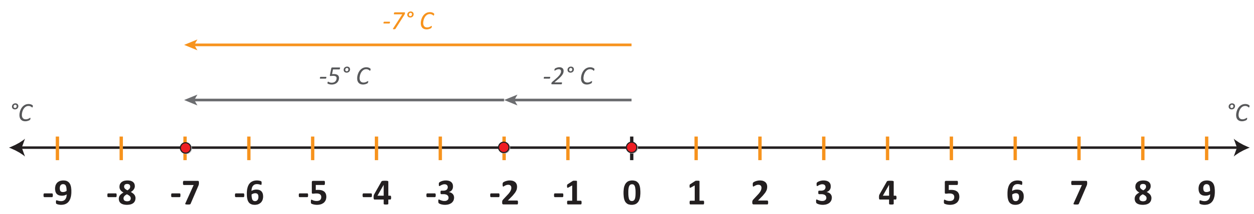
Ejemplo 4

Una sustancia se encuentra a una temperatura de $-2^{o}\ C$. Se somete a más enfriamiento y disminuye su temperatura en $-5^{o}\ C$. ¿Cuál es la temperatura final de la sustancia?

Sumando de forma horizontal obtenemos:

$(-2^{o}\ C) + (-5^{o}\ C) = -(2^{o}\ C + 5^{o}\ C) = -7^{o}\ C.$

A continuación observamos el resultado de forma gráfica:



Actividades

Copiemos en el cuaderno y realicemos los siguientes ejercicios.

I. Represente en la recta numérica la suma de los números enteros

1. +3 y +6
2. –3 y –5
3. +4 y –6
4. –5 y –4
5. –8 y +7
6. –9 y +9
7. 0 y +5
8. –7 y 0
9. –4 y +4
10. +12 y –7

II. Escribamos verdadero (V) o falso (F) sobre la línea que se presenta a la izquierda de cada expresión.

1. _______ La suma de dos números enteros positivos es positivo.
2. _______ La suma de dos números enteros negativos es positivo.
3. _______ La suma de dos números enteros negativos es negativo.
4. _______ La suma de dos números enteros cualesquiera es un número entero.
5. _______ $(-5) + 0 = 0$
6. _______ $(-5) + 0 = -5$
7. _______ $2 + 3 = 5$
8. _______ $(-5) + (-6) = -11$
9. _______ $(-5) + (-6) = 11$
10. _______ $15 + 15 = 0$

III. Resolvamos correctamente las siguientes sumas de números enteros aplicando el valor absoluto.

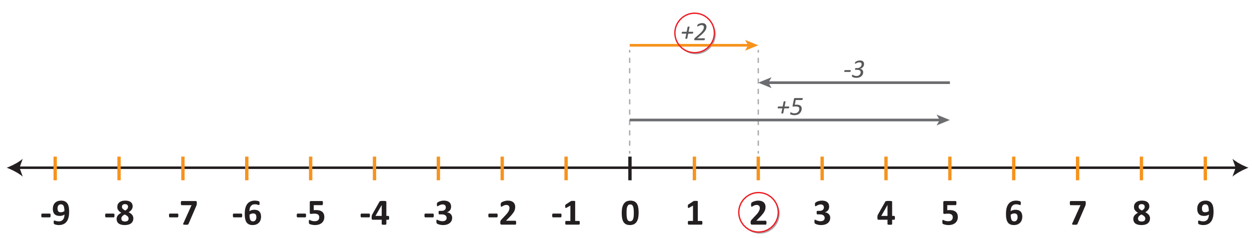
1. 1 500 + 7 050 =
2. 12 850 + 15 340 =
3. –12 500 + (–540) =
4. 10 001 + 10 000 =
5. (–1 678) + (–5 680) =
6. (–2 500) + (–1 390) =
7. 2 350 + (–2 400) =
8. 1 878 + 7 690 =
9. (–4 500) + (–7 390) =
10. (–3 450) + (–5 670) =

3.3 Segundo caso: Los sumandos son de signos diferentes

Ejemplo 1

Sumemos los números enteros de diferentes signos: +5 y –3.

Para sumar estos números enteros de diferentes signos los haremos gráficamente. Partiremos del origen 0, luego nos ubicamos 5 unidades a la derecha, a continuación no ubicamos 3 unidades a la izquierda a partir de la punta de la flecha anterior, llegando a 2.



La flecha resultante es la que va de 0 a 2.

Por lo tanto, podemos resolver: (+5) + (–3) = + 2

Observamos que la suma es el número entero +2.

Luego podemos decir que +2 es un número entero cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de +5 y –3, el signo es el mismo que tiene el número de mayor valor absoluto, que es en este caso |+5|.

También podemos sumar +5 y –3 de la siguiente forma:

(+5) + (–3) = [|+5| – |–3|]

= + [5 – 3]

= 2. Esto es lo mismo que resolvamos:

(+5) + (–3) = + (5 – 3)

= +2

= 2

Recordemos que en la sustracción [|+ 5| – |–3|] el minuendo es el número entero de mayor valor absoluto que en este caso es |+5| = 5 y el sustraendo es el número entero de menor valor absoluto que en este caso es |–3| = 3.

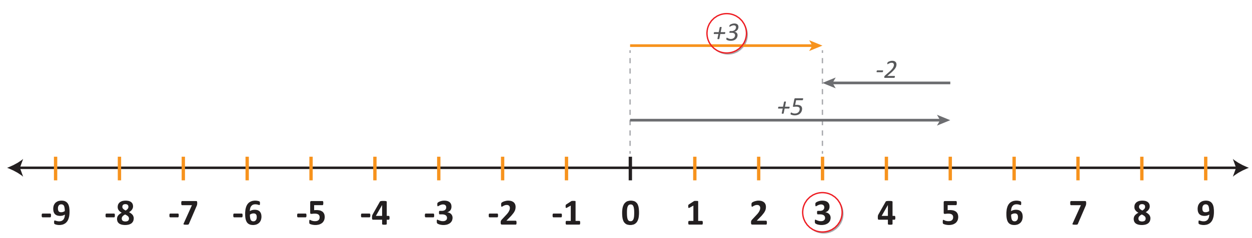
Ejemplo 2

Un grupo de estudiantes realiza actividades de riego en el huerto escolar y antes de iniciar, el representante del grupo distribuyó el área que le corresponde a cada equipo. Después caminaron 5 metros hacia el este (5 m) y luego 2 metros al oeste (2 m) del huerto. ¿A qué distancia del punto de reunión se encuentran los estudiantes?

Solución

Para iniciar la actividad de riego, primero caminaron una distancia de 5 m al este y luego 2 m al oeste; entonces a partir de cero nos ubicamos 5 unidades a la derecha hasta +5.

Posteriormente nos ubicamos 2 unidades a la izquierda a partir de la punta de la flecha anterior, llegando a +3.



En esta situación la flecha resultante es la que va de o a 3.

Por lo tanto podemos resolver: (+5) + (–2) = +3.

Observamos que la suma es el número entero +3. Luego podemos decir que +3 es un número entero, cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de +5 y –2, el signo es el mismo que tiene el número de mayor valor absoluto, que es en este caso |+5|.

Así podemos sumar +5 y –2 de la siguiente forma:

(+5) + (–2) = [|+ 5| – |–2|]

= + [5 – 2]

= 3.

Esto es lo mismo que resolvamos:

(+5) + (–2) = + (5 – 2)

= + 3

= 3

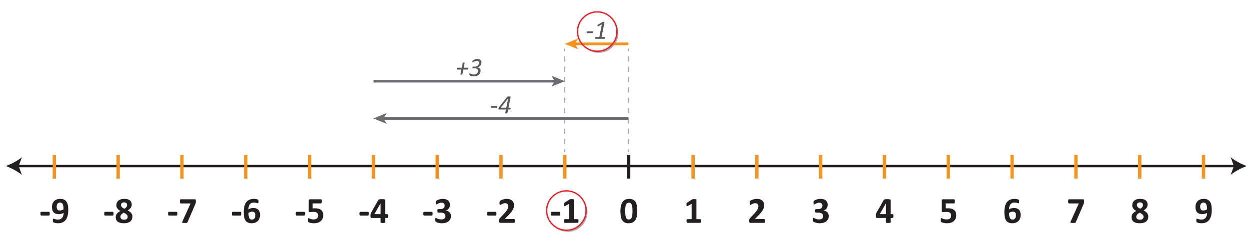
Ejemplo 3

Un grupo de estudiantes participan en la recolección de rábanos y el huerto está 4 metros (4 m.) al oeste del centro de estudios. Después de cortar los rábanos los trasladaron a unos canastos que estaban ubicados 3 metros al este (3 m.) ¿A qué distancia del centro de estudios se encuentran, si después caminaron 1 metro al oeste?

Solución

Para llegar al huerto, inicialmente caminaron una distancia de 4 m al oeste y después de cortar los rábanos caminaron 3 m. al este para trasladarlos a unos canastos.

A partir de cero nos ubicamos 4 unidades a la izquierda hasta –4. Posteriormente nos ubicamos 3 unidades a la derecha a partir de la punta de la flecha anterior. Seguidamente nos ubicamos en cero una unidad a la izquierda llegando a –1.



En esta situación la flecha resultante es la que va de 0 a –1. Por lo tanto, la respuesta es –1.

Así podemos sumar –4 y +3 de la siguiente forma:

$(-4) + (+3) = -[|-4| - |+3|]$

$= -[4 - 3]$

$= -1$ ó lo que es lo mismo:

$(-4) + (+3) = -(4 - 3)$

$= -1$

Para sumar dos números enteros con distinto signo:

1. ***Se calcula el valor absoluto de cada número entero.***
2. ***Se restan los valores absolutos de cada número entero.***
3. ***Al resultado se le antepone el signo del número que tiene mayor valor absoluto.***

Ejemplo 4

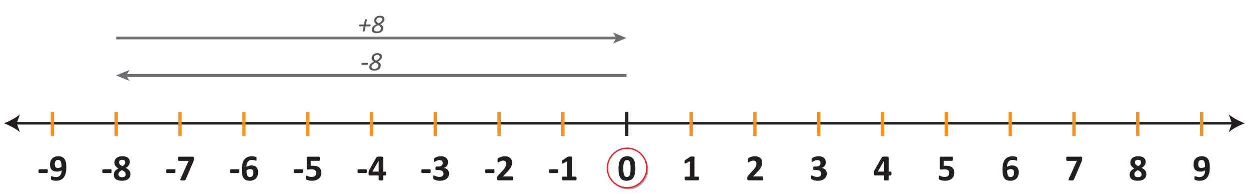
Sumemos:

a. -8 y $+8$
$(-8) + (+8)$
$= 8 - 8$
$= 0$

b. -10 y $+10$
$(-10) + (+10)$
$= 10 - 10$
$= 0$

c. -100 y $+100$
$(-100) + (+100)$
$= 100 - 100$
$= 0$

A continuación observamos el resultado del inciso (a.) de forma gráfica:



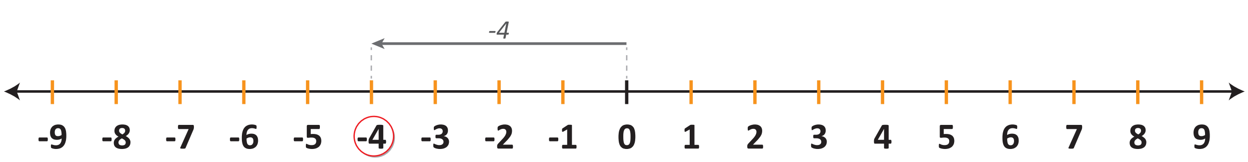
De manera general:

Para cualquier número entero a : a + (- a) = 0. Esto significa que la suma de dos números enteros opuestos o simétricos es igual a cero.

Propiedad de adición del cero: Para cualquier número entero *a* existe un único número entero cero, tal que: $a + 0 = 0 + a = a$

Ejemplo 5

Si **sumamos 0 y –4**, podemos ver que a partir de cero no nos ubicamos hacia ningún sentido y nos quedamos en cero. A continuación, nos situamos 4 unidades a la izquierda hasta –4, llegando a –4. Por tanto, la respuesta es –4. **Gráficamente se representa:**

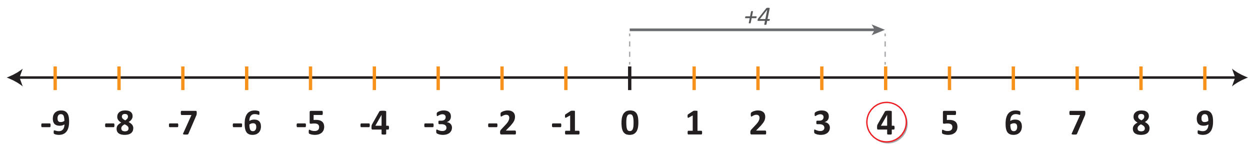


Lo anterior significa: $-4 + 0 = 0 + (-4) = -4$

Ejemplo 6

Si **sumamos 0 y +4**, podemos observar que a partir de cero no nos ubicamos ni hacia la izquierda ni hacia la derecha, nos quedamos en cero. A continuación, nos situamos 4 unidades a la derecha hasta +4, llegando a +4. Por consiguiente, la respuesta es 4.

Posteriormente observamos el resultado de forma gráfica:



Lo anterior significa: $4 + 0 = 0 + (+4) = 4$

De acuerdo a lo anterior, podemos sumar más de dos sumandos sin olvidar que la adición es una operación binaria, lo que significa que los sumandos se asocian de dos en dos.

Ejemplo 7

Sumemos los números enteros +8, +10, –11 y –15.

Primeramente agrupemos o asociemos los sumandos de igual signo:

$(+8) + (+10) + (–11) + (–15)$

$= [(+8) + (+10)] + [(–11) + (–15)]$

$= (8 + 10) + [–(11 + 15)]$

$= (+18) + (–26)$

$= –(26 – 18)$

$= –8$

3.4 Propiedades de la Adición de números enteros.

PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS ENTEROS				
	Conmutativa	Asociativa	Neutro	Distributiva
SUMA	Si se cambia el orden de los sumandos, la suma no varía. $a + b = b + a$ *Ejemplo:* $2 + 3 = 3 + 2$ $5 = 5$	Los sumandos se pueden agrupar de diferentes formas sin que varíe el resultado. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *Ejemplo:* $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$ $5 + 4 = 2 + 7$ $9 = 9$	El 0 es el elemento neutro de la suma, ya que al sumarlo el resultado no varía. $0 + (–5) = –5$	El producto de un número por la suma es la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *Ejemplo:* $5\,(4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$ $5\,(7) = 20 + 15$ $35 = 35$

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Sustituyamos la variable x por el número entero que haga verdadera cada igualdad:

1. $(-4) + (x) = -3$
2. $x + 3 = 7$
3. $x + 0 = -6$
4. $x - 5 = -2$
5. $(-8) + (x) = -12$
6. $x + (-9) = 0$
7. $x + 0 = 5$
8. $5 + (x) = 12$
9. $(-6) + (x) = -12$
10. $(-20) + (x) = 40$

II. Lea y resuelva correctamente los siguientes problemas aplicando la suma de números enteros.

1. María fue a comprar a la distribuidora los productos básicos, compró C$ 560 y pagó con un billete C$ 500. ¿Cuál fue la deuda adquirida?
2. Un productor de hortalizas recibió C$ 1 250 en la venta de tomates y C$ 1 850 en la venta de chiltomas. Al finalizar la recolección perdió C$500 en los tomates y C$ 650 en los chiltomas. ¿Cuánto le quedó de ganancia al final de la cosecha?
3. Un productor de café debe un préstamo de C$ 28 000 en el Banco Produzcamos. Después de la venta de la cosecha el productor recibió C$ 55 000, ¿cuánto le quedó después de cancelar la deuda?
4. Un grupo de trabajadores midieron la longitud y el ancho de un terreno y observaron que las mediciones son 8 kilómetros al este y 5 kilómetros al sur. Luego se detuvieron. ¿A qué distancia del punto donde iniciaron la medición se encuentran?
5. Un grupo de socios de la Cooperativa decidieron ir al área de cultivo para apoyar en la recolección del café. El grupo de socios cortaron 550 latas de café y el grupo de trabajadores cortaron 1 150 latas. ¿Cuántas latas de café cortaron los dos grupos?
6. Un grupo de mujeres levantaron la cosecha de tomates en tres momentos. Primero cortaron 350 libras en el segundo momento recogieron 240 libras y finalmente cortaron 500 libras. Al ubicar los tomates en sus respectivas cajas observaron que 89 libras estaban en malas condiciones. ¿Cuántas libras de tomates quedaron al final de la recolecta?

3.5 Sustracción

Recordemos

Con el propósito de recaudar fondos para la actividad de fin de año, un equipo de trabajo del grupo de Séptimo Grado llevó 50 güirilas para vender a sus compañeros. Se vendieron 38 güirilas. ¿Cuántas güirilas quedaron?

$$50 - 38 = 12$$

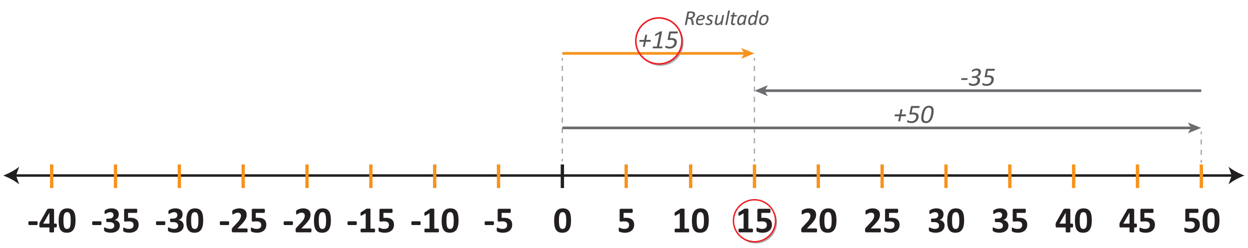
Si comparamos dos números enteros, por ejemplo 50 y 38, necesitamos saber cuántas unidades uno excede del otro o cuál es la diferencia o resto entre ambos, empleamos el término sustracción, así decimos:

Sustraer 35 de 50, lo escribimos **50 – 35** y decimos **“la diferencia entre 50 y 35”** ó bien **“50 menos 38”**.

Observemos que 50 – 35 es equivalente a escribir 50 + (–35), o sea la sustracción 50 – 35 la podemos convertir en una suma.

Simbólicamente: 50 – 35 = 50 + (–35), esto se expresa: “La diferencia entre 50 y 35 es igual a la suma del minuendo (50), con el inverso aditivo del sustraendo de 35 (–35). Luego, en la recta numérica encontremos la diferencia entre 50 y 35. Así tenemos: 50 + (–35).

En la recta numérica decidimos usar la escala de 5 en 5 para ubicar los números enteros.



Por la regla: **8 – 4 = 8 + (–4) = + (8 – 4) = 4**

En general:

Se denomina sustracción en los números enteros $\mathbb{Z}$, a la operación que tiene por objeto encontrar la diferencia, resto o exceso entre dos números enteros.

Si m, s y $d \in \mathbb{Z}$ entonces $m - s = d$. También podemos expresar que la diferencia entre los números enteros a y b es igual a la suma del minuendo con el inverso del sustraendo. Simbólicamente $m - s = m + (-s)$. Donde m es el minuendo, s es el sustraendo y $-s$ es el inverso del sustraendo.

Ejemplo 1

Sustraer o restar 8 de 10

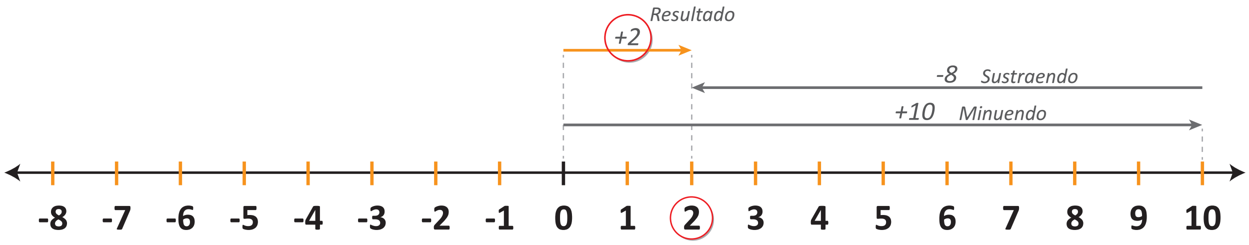
Observemos que el minuendo va asociado a la palabra de (de 10) y que el sustraendo va asociado a la palabra restar o réstese (restar 8), por lo que:

$m = 10$, $s = 8$ y su inverso aditivo es (–8).

La operación es $m - s = d$

10 – 8 = 10 + (–8) = 2.

Así obtenemos $d = 2$



Ejemplo 2

¿De cuántos años murió una persona que nació en el año 40 a.C. y falleció en el año 40 d.C.?

Nació en el año 40 a.C. es –40 y $s = -40$

Murió en el año 40 d.C. es +40 y $m = +40$

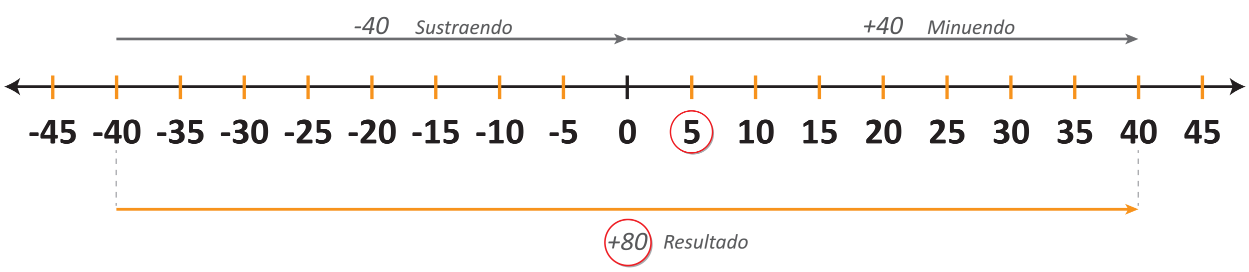
La operación es $m - s = d$

$40 - (-40) = 40 + (40)$

$= + (40 + 40)$

$= + 80.$

Por lo tanto, la persona murió de 80 años



Ejemplo 3

El Comandante Daniel Ortega Saavedra, Presidente de la República, informó que en el programa USURA CERO recibieron créditos 119 581 mujeres socias, organizadas en 22 332 grupos solidarios por un monto de C$ 737,1 millones, con una recuperación de C$602,4 millones. ¿Qué cantidad de dinero no se ha recuperado todavía?

Recopilado del Informe del Comandante Presidente Daniel al pueblo y la Asamblea Nacional, 2 013. Managua, 28 de mayo 2014.

Observamos que el grupo de mujeres socias recibieron C$ 737,1 millones, esto es iguala C$ 737 100 000, por lo tanto el minuendo es 737 100 000

El gobierno ha recuperado C$602,4 millones, esto es igual a C$602 400 000, por tanto, el sustraendo es 602 400 000.

Resolviendo de forma vertical, obtenemos:

$$\begin{array}{r} 737\ 100\ 000 \\ -\ \underline{602\ 400\ 000} \\ 134\ 700\ 000 \end{array}$$

Por lo tanto, falta que recuperar C$134 700 000 (córdobas)

Ejemplo 4

El Presidente de Nicaragua expresó que en el programa Hambre Cero o Bono Productivo Alimentario se entregaron 12 361 nuevos bonos y se conformaron 152 nuevos núcleos, para un acumulado de 1 713 núcleos desde el año 2 007, manejando ahorros por C$ 96,2 millones. ¿Cuántos núcleos habían antes que se conformaran los 152 núcleos nuevos?

Recopilado del Informe del Comandante Presidente Daniel al pueblo y la asamblea nacional, 2 013. Managua, 28 de mayo 2 014.

Para responder la pregunta, observamos que había 1 713 núcleos y este es el minuendo. Los 152 núcleos nuevos son el sustraendo. Por esta razón, para saber cuántos núcleos existían antes, se aplica la resta:

$$\begin{array}{r} 1\ 713 \\ -\ \underline{152} \\ 1\ 561 \end{array}$$

Antes que se conformaran los 152 núcleos nuevos habían 1 561núcleos.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios:

I. Revisemos si las sumas fueron realizadas correctamente, en caso contrario, resolver y escribir la respuesta correcta.

1. $-4 + 5 = 1$
2. $-9 + 7 = 5$
3. $11 + (-9) = 20$
4. $-8 + (-3) = 5$
5. $-34 + (-50) = -16$
6. $-22 + (-27) = -49$
7. $-35 + (-58) = -23$

II. Realicemos correctamente las siguientes sustracciones:

1. $4 - 8 =$
2. $6 - 12 =$
3. $-19 - 5 =$
4. $-8 - 7 =$
5. $-18 - (-31) =$
6. $(-41) - (-18) =$

III. Escribamos en el espacio indicado con una línea el nombre de la propiedad que se cumple en cada expresión.

1. $-17 + 0 = 7$:______________________________
2. $5 + [(-8) + (-3)] = [5 + (-8)] + (-3)$:________________________
3. $(-13) + (13)$:______________________________
4. $(-12 + 15) \in \mathbb{Z}$______________________________

IV. Leamos y resolvamos correctamente los siguientes problemas aplicando la suma y resta de números enteros.

1. Un grupo de compañeras realizó un préstamo de C$ 5 000 en Usura Cero. ¿Cuánto debe el grupo de mujeres si ha abonado C$ 2 800?

2. Manuel debe subir por las faldas de un cerro para realizar su trabajo en la hacienda donde corta café. Transcurrida una hora, logra avanzar 30 metros, pero resbala y desciende 8 metros; nuevamente con mucho esfuerzo logra avanzar cuesta arriba 15metros, pero resbala nuevamente y desciende 6 metros.¿A cuántos metros del punto de partida se encuentra Manuel?

3. Un bloque de hielo se encuentra a 6º *C* bajo cero. Si se calienta hasta conseguir una temperatura de 17º *C*. ¿En cuánto aumentó la temperatura?

4. Ana se sumergió hasta los 3 m bajo el nivel del río. Pedro dice que se sumergió más que Ana porque llegó a 5 m bajo el nivel del río. ¿Estás de acuerdo con Pedro? Explica.

5. Al vender una propiedad en C$ 180 000 ganó C$35 000. ¿Cuánto le costó la propiedad?

3.6 Multiplicación

Analicemos la siguiente situación:

María y José se dispusieron para ir a pescar al río. El anzuelo de José se encuentra a –2 metros con respecto al nivel del río. El anzuelo de María se encuentra sumergido tres veces más que el de José. ¿A qué profundidad se encuentra el anzuelo de María? ¿Qué operación nos sugiere la pregunta?

Para calcular a qué profundidad se encuentra el anzuelo de María, debemos encontrar que es igual 3 veces –2 o sea:

$(-2) + (-2) + (-2) = -6$

Lo que podemos sintetizar de la siguiente manera:

$(3)(-2) = -6$

El anzuelo de María se encuentra a –6 m, o sea a 6 m bajo el nivel del río.

Ejemplo 1

Sabemos que la multiplicación se considera como una suma repetida. Por ejemplo $6 \cdot 3$ significa $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$.

Luego, $6 \cdot 3 = 18$.

Apliquemos esta interpretación para copiar y completar la siguiente tabla. ¿Qué conclusiones sacamos de ellas?

Factor	Factor	Suma repetida	Multiplicación
3	4	4 + 4 + 4	3·4
7	–8	(–8) + (–8) + (–8) + (–8) + (–8) + (–8) + (–8)	
6	7		
5	–7		
4	–34		
2	–45		(–2)(–45)

Multiplicación de números enteros positivos

Ejemplo 2

Efectuemos los siguientes productos:

1. $4 \cdot 8 = 32$
2. $7 \cdot 8 = 56$
3. $20 \cdot 5 = 100$
4. $40 \cdot 4 = 160$

De acuerdo a los resultados obtenidos podemos deducir la regla siguiente:

La multiplicación de dos números enteros diferentes de cero, es otro número entero cuyo signo es positivo, si los factores tienen signos positivos.

Ejemplo 3

Un agricultor planifica sembrar 20 manzanas de musáceas (plátano y banano) en el departamento de Rivas y en cada manzana sembrará 15 filas de plantas. ¿Cuántas filas de plantas de bananos se sembrarán en total?

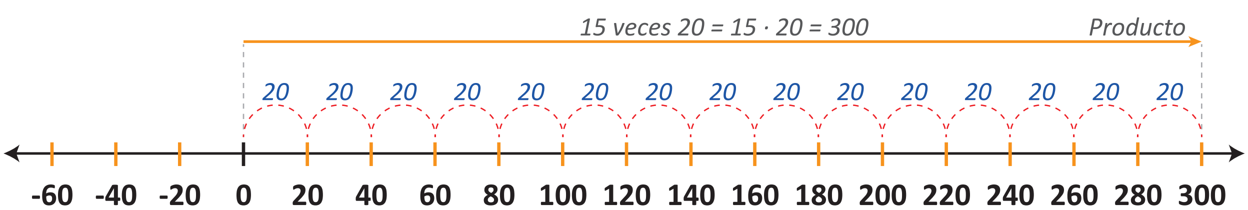
Para responder a la pregunta tenemos que analizar que si María sembró 20 manzanas y en cada manzana 15 filas de plantas, entonces resolviendo el producto resulta:

$$20 \cdot 15 = 300$$

Observemos que el número entero 20 indica las veces que 15 se repetirá como sumando. O sea que el resultado 300 significa que 20 se ha multiplicado 15 veces.

Esta relación la podemos escribir **"20 veces 15" equivale a decir "20 multiplicado por 15" que simbólicamente lo escribimos "20 · 15 = 300"**.

Luego 20 veces 15 = **20 · 15 = 300**. Otra forma de escribirlo es: **(20)(15) = 300**.



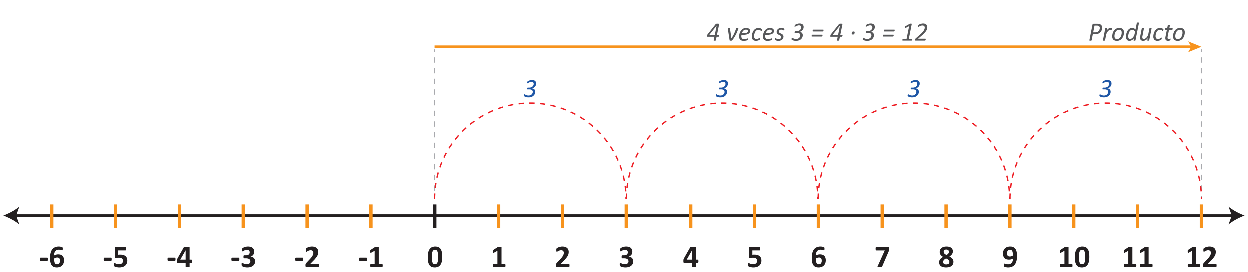
A la operación 20 · 15 = 300 se le llama **Multiplicación**, donde 20 y 15 son los factores y 300 es el producto.

Ejemplo 4

Multipliquemos los números enteros +4 y +3.

4 · 3 = 3 · 4 = 12. Luego sabemos que **4 · 3 = 12**.

Podemos observar que el "orden de los factores no altera el producto".



Multiplicación de números enteros positivos y negativos

Ejemplo 5

Efectuemos los siguientes productos:

1. $4 \cdot (-7) = -28$
2. $(-7) \cdot 8 = -56$
3. $20 \cdot (-5) = -100$
4. $(-40) \cdot 4 = -160$

De acuerdo a los resultados obtenidos podemos deducir la regla siguiente:

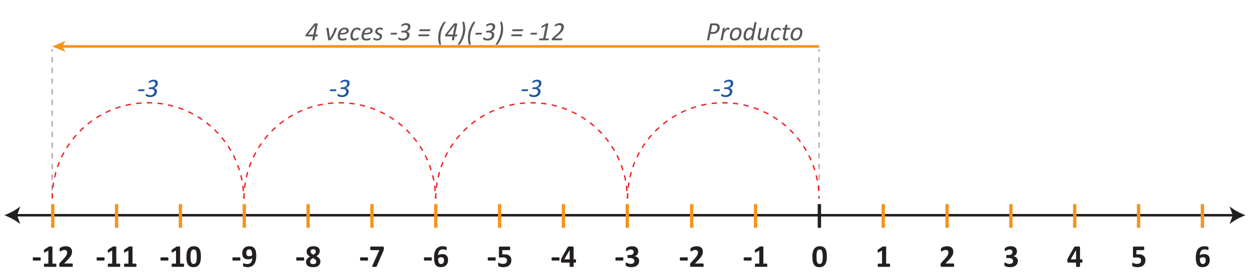
La multiplicación de dos números enteros diferentes de cero, es otro número entero cuyo signo es negativo, si los factores tienen signos diferentes.

Ejemplo 6

Multipliquemos los números enteros +4 y −3.

$(4)(-3) = (-3)(4) = -12.$

Podemos observar que el "orden de los factores no altera el producto".



Multiplicación de dos números enteros negativos.

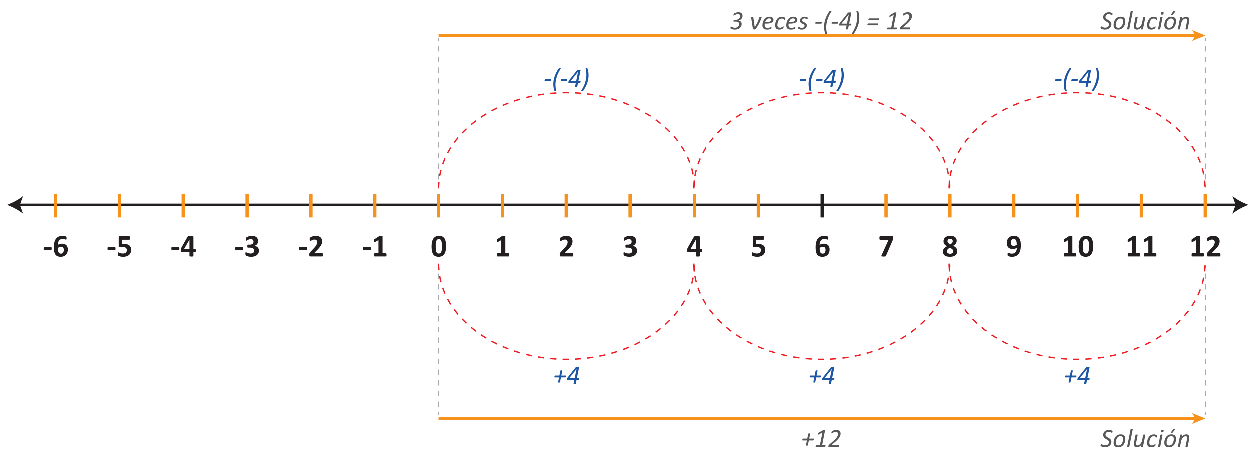
La multiplicación de dos números enteros diferentes de cero, es otro número entero cuyo signo es positivo, si los factores tienen signos negativos.

Ejemplo 7

Multipliquemos los números enteros **–4** y **–3**.

(–3)(–4) = (–4)(–3) = 12

–3 veces –4 equivale a una recta orientada "3 veces 4 hacia la derecha" que es lo mismo que decir 3 veces al opuesto de –4, que es +4. Luego la gráfica de "–3 veces –4 equivale a 3 veces +4"



La respuesta es **+12**. De tal manera que:

−3 veces −4 = (−3)(−4) = + 12 el producto es positivo.

De los ejemplos anteriores, podemos concluir que:

- La multiplicación de dos números enteros positivos es siempre otro número entero positivo.
- La multiplicación de un número entero positivo y un entero negativo es siempre otro número entero negativo.
- La multiplicación de dos números enteros de signos negativos es siempre otro número entero positivo.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS				
	Conmutativa	Asociativa	Identidad	Distributiva
M U L T I P L I C A C I Ó N	Si se cambia el orden de factores, el producto no varía: $a \cdot b = b \cdot a$ *Ejemplo:* $5 \cdot 8 = 8 \cdot 5$ $40 = 40$	Los factores se pueden agrupar de diferentes formas sin que varíe el resultado: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *Ejemplo:* $(5 \cdot 6) \cdot 7 = 5 \cdot (6 \cdot 7)$ $30 \cdot 7 = 5 \cdot 42$ $210 = 210$	El 1 es el elemento identidad de la multiplicación, ya que al multiplicarlo el resultado no varía: $1 \cdot 5 = 5$	El producto de un número por la suma es la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *Ejemplo:* $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$ $5\,(7) = 20 + 15$ $35 = 35$

Leamos y analicemos las siguientes situaciones:

Ejemplo 8

Una distribuidora de plantas medicinales ha decidido vender su producción directamente a las Farmacias de Medicina Natural. En el primer pedido le solicitaron 80 libras de Manzanilla, 150 libras de chía y 100 libras de linaza. Si la libra de manzanilla vale C$ 50, la libra de chía C$ 80 y la libra de linaza a C$ 90. ¿Cuántas libras vendieron en total?, Si el administrador de la farmacia entregó C$ 15 000 ¿Cuál será la deuda adquirida por la Farmacia?

Para conocer el total del dinero recibido por cada producto utilizamos la multiplicación:

Las 80 libras de Manzanilla a C$50 es igual a:

$$\begin{array}{r} 80 \\ \cdot \quad 50 \\ \hline 4\,000 \end{array}$$

Por lo tanto, por las 80 libras de manzanilla recibirá **C$ 4 000**.

Las 150 libras de Chía a C$ 80 es igual a:

$$\begin{array}{r} 150 \\ \cdot \quad 80 \\ \hline 12\,000 \end{array}$$

Por lo tanto, por las 150 libras de Chía recibirá **C$ 12 000**.

Las 100 libras de Linaza a C$90 es igual a:

$$\begin{array}{r} 100 \\ \cdot \quad 90 \\ \hline 9\ 000 \end{array}$$

Por lo tanto, por las 100 libras de Linaza recibirá **C$ 9 000**.

Para saber el total de libras vendidas se realiza una Suma:

$$\begin{array}{r} 80 \\ 150 \\ +\ 100 \\ \hline 330 \end{array}$$

Por lo tanto, vendieron **330 libras** en total.

Para conocer el total que recibirá la distribuidora por el pago del producto utilizamos la suma:

$$\begin{array}{r} 4\ 000 \\ 12\ 000 \\ +\ 9\ 000 \\ \hline 25\ 000 \end{array}$$

Por lo tanto, para saber cuánto quedarán pendiente de pagar, restamosla cantidad que pagaron C$ 15 000 del total 25 000 y obtenemos:

$$\begin{array}{r} 25\ 000 \\ -\ 15\ 000 \\ \hline 10\ 000 \end{array}$$

La farmacia quedó con una deuda de **C$ 10 000**.

Ejemplo 9

En una finca se siembran 20 manzanas de árboles de mandarinas. En cada manzana se siembran 12 filas de árboles. ¿Cuántas árboles de mandarinas se sembraron?, Si en promedio por manzana se perdieron 15 árboles, ¿cuántas árboles se perdieron y cuántos quedan?

Para que conozcamos cuántos árboles de mandarinas se sembraron debemos multiplicar el número el número de filas por manzana. Esto es:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot \quad 12 \\ \hline 24 \\ +\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

Como hay **144 árboles** en una manzana, en 20 manzanas se sembrarán:

$$\begin{array}{r} 144 \\ \cdot \quad 20 \\ \hline 2\,880 \end{array}$$

Por lo tanto se sembraron **2 880 árboles** de mandarinas.

Si en promedio por manzana se perdieron 15 árboles, entonces:

$$\begin{array}{r} 144 \\ - \quad 15 \\ \hline 129 \end{array}$$

Como son 20 manzanas y se perdieron 15 por manzana, entonces:

$$\begin{array}{r} 20 \\ \cdot \quad 15 \\ \hline 300 \end{array}$$

Por lo tanto se perdieron **300 árboles** de mandarinas.

Ahora, veremos cuántos árboles quedaron, restamos 2 280 menos 300:

$$\begin{array}{r} 2\,280 \\ - \quad 300 \\ \hline 1\,980 \end{array}$$

Por lo tanto quedaron **1 980 árboles** de mandarinas.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Resolvamos correctamente las siguientes multiplicaciones.

1. $567 \cdot 52 =$
2. $826 \cdot (-639) =$
3. $(-936) \cdot (36) =$
4. $12\,575 \cdot 126 =$
5. $(-587)(-320) =$

II. Leamos y resolvamos correctamente los siguientes problemas de aplicación.

1. Con un buen invierno, una manzana cultivada de maíz produce 40 quintales. Cada quintal tiene un valor de C$ 400. ¿Cuánto recibirá el productor de dinero, si sembró 200 manzanas?
2. Una pequeña empresa de Tortillas tiene invertido C$ 10 000 en maíz, leña, bolsas de cal y utensilios para el uso en la tortillería. En el banco tiene una deuda de C$ 15 000 y en efectivo tiene C$ 8 000. Además le deben C$ 2 500 de tortillas que ha entregado al crédito. ¿Cuál es el estado de cuentas de la pequeña empresa?

3. Un productor decide realizar la siembra de frijoles tecnificada y el área del terreno que tiene para sembrar son 50 manzanas y para sembrar una manzana tiene que utilizar 50 libras de semilla. ¿Cuántas libras de semilla de frijoles necesita para realizar esta siembra?
4. Una Cooperativa productora de frijoles sembró 10 manzanas y decidió realizar la siembra de frijoles al espeque y se conoce que para sembrar una manzana de frijoles tiene que utilizar 25 libras de semilla. ¿Cuántas libras de semilla de frijoles necesita para realizar esta siembra?
5. Una Cooperativa productora de maíz tiene proyectado sembrar 15 manzanas y ha decidido realizar la siembra de maíz tecnificada y se conoce que para sembrar una manzana tiene que utilizar un quintal (o 100 libras) de semilla. ¿Cuántas libras de semilla de frijoles necesita para realizar esta siembra?

3.7 División

Analicemos la siguiente situación:

Ejemplo 1

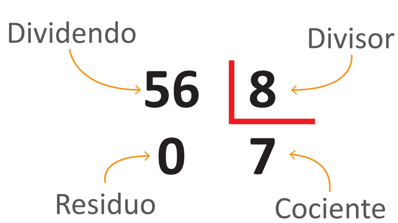
Juan cortó 56 naranjas para regalar a sus compañeros del equipo de trabajo y pidió bolsas para empacar 8 naranjas para cada uno. ¿Cuántas bolsas necesita para empacar las naranjas?

Para saber cuántas bolsas necesitamos, debemos dividir:

$56 \div 8 = 7$

Para encontrar el número, buscamos un número que multiplicado por 8 sea igual a 56. El número es 7, porque $8 \cdot 7 = 56$. Por lo tanto se necesitan 7 bolsas para empacar 8 naranjas para cada compañero del equipo.

Esto es lo mismo que:



La división de Números Enteros es la operación inversa de la multiplicación, ya que permite encontrar el factor desconocido de una multiplicación en la que se conoce el producto y un factor.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$ se llama cociente exacto de a y b al número $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot c = a$.

Para simbolizar la división de a entre b se utiliza la notación $a \div b = \dfrac{a}{b}$ donde "a" es el dividendo y b el divisor.

Ejemplo 2

Un grupo de una cooperativa prepara la tierra para la siembra de granos básicos. Solicitaron al Banco un préstamo de C$ 180 000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno si son 15 socios y los quieren repartir de forma equitativa?

Si el Banco les entregó C$ 180 000 y son 15 socios, entonces vamos a dividir 180 000 entre 15 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} 180\,000 & 15 \\ \cline{2-2} 30 & 12\,000 \\ 0 & \end{array}$$

Dividimos 180 entre 15 igual a 12 y le agregamos tres ceros, el cociente es 12 000

Por lo tanto, a cada socio le corresponde C$ 12 000.

Ejemplo 3

Resolver correctamente los siguientes cocientes:

1. $(-24) \div (-8) = 3$
2. $45 \div 5 = 9$
3. $(-24) \div (8) = -3$
4. $45 \div (-5) = -9$

De los ejemplos anteriores, podemos concluir que:

- El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo.
- El cociente de dos números enteros de diferente signo es negativo.

Resumiendo

Expresamos que el signo de un número entero es positivo o negativo si el número es positivo o negativo, respectivamente. Dos números enteros tienen el mismo signo si ambos son positivos o negativos. Los números son de signos opuestos o contrarios, si uno es positivo y el otro negativo. Seguidamente, veamos las leyes de los signos:

1. Si a y b tienen el mismo signo, entonces $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$ son positivos
2. Si a y b tienen signos diferentes, entonces $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$ son negativos

Ejemplo 4

Veinte socios de una Cooperativa sembraron 30 manzanas de árboles de naranjas. En cada manzana se sembraron 15 filas de árboles de naranjas. ¿Cuántos árboles de naranjas se sembraron? Y ¿Cuántos árboles de naranjas le corresponde a cada socio?

Para que conozcamos cuántos árboles de naranjas se sembraron debemos multiplicar el número el número de filas por manzana. Esto es:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot \quad 15 \\ \hline 75 \\ +\,15 \\ \hline 225 \end{array}$$

Como hay **225 árboles** en una manzana, en 30 manzanas se sembrarán:

$$\begin{array}{r} 225 \\ \cdot \quad 30 \\ \hline 6\,750 \end{array}$$

Por lo tanto, se sembraron **6 750 árboles** de naranjas. Y para responder cuántos árboles de naranjas le corresponde a cada socio debemos dividir:

$$\begin{array}{r|l} 6\,750 & 15 \\ \cline{2-2} 75 & 450 \\ 0 & \end{array}$$

Por lo tanto a cada socio le corresponde **450 árboles** de naranjas.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Resolvamos correctamente las siguientes divisiones.

1. 5 200 ÷ 52 =
2. 816 ÷ (−12) =
3. (−936) ÷ (36) =
4. 12 575 ÷ 25
5. (−7040) ÷ (−320) =

II. Leamos y resolvamos correctamente los siguientes problemas de aplicación.

1. Un productor de maíz tiene proyectado sembrar 5 manzanas y ha decidido realizar la siembra de maíz por espeque y él tiene conocimientos que para sembrar una manzana de maíz tiene que utilizar un quintal (ó 100 libras) de semilla. ¿Cuántas libras de semilla de maíz necesita para realizar esta siembra?
2. A un ganadero le ofrecen C$ 8 000 por una vaca, pero se niega a venderla. Un día después la vende por su peso que es de 475 libras, dando cada libra a C$ 50. ¿Ganó o perdió en la venta?

3. Un quintal de frijoles tiene un valor de C$ 1 200, ¿Cuánto costarán 50 quintales?
4. Un libro tiene 18 páginas y cada página tiene 736 palabras. ¿Cuántas palabras tiene el libro?
5. En una finca se siembran 18 manzanas de árboles de mango. En cada manzana se siembran 10 filas de árboles de mango. ¿Cuántas filas de árboles de mango se sembraron?
6. Con un buen invierno, una manzana cultivada de maíz produce cuarenta quintales, cada quintal tiene un valor de C$ 645. ¿Cuánto recibirá el productor en dinero si sembró con buen invierno 200 manzanas?
7. A un ganadero le ofrecen C$ 15 000 por un toro, pero se niega a venderlo, un día después lo vende por su peso en libras que era de 475 libras, pagándole cada libra en 30. ¿Ganó o perdió en la venta?
8. En una caja que contiene vacunas para el ganado se acomodan 50 frascos. Cada frasco cuesta 35 córdobas ¿Cuánto hay que pagar por la compra de dos docenas de caja?

3.8 Múltiplos y divisores de un número entero.

Un número entero "*a*" es múltiplo de otro "*b*", si "*a*" contiene a "*b*" un número exacto de veces.

Los múltiplos de un número se forman multiplicando este número por la serie infinita de los números naturales. Por tanto todo número tiene infinitos múltiplos.

- **Todo número entero es múltiplo de 1 y de sí mismo.**
- **Cero es múltiplo de cualquier número.**

Ejemplo 1

18 es múltiplo de 9, porque 18 contiene a 9 dos veces exactamente: $18 = 2 \cdot 9$

63 es múltiplo de 7, porque 63 contiene a 7 nueve veces: $63 = 9 \cdot 7$

Observemos

Si 63 es múltiplo de 7, también decimos que:

- 7 es un divisor de 63
- 7 divide a 63
- 7 es un factor de 63
- 7 es un submúltiplo de 63
- 63 es divisible por 7

Recordemos

- Un divisor de un número es aquél que está contenido en éste un número exacto de veces.
- Un número natural distinto de 1 es un número primo si sólo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.
- Un número natural es un número compuesto si tiene otros divisores además de él mismo y la unidad.

Observemos

- 2 es un número primo porque sus únicos divisores son 1 y 2.
- 3 es un número primo porque sus únicos divisores son 1 y 3.
- 9 es un número compuesto porque sus divisores son 1, 3 y 9.

¿Podríamos decir porqué el cero y el uno no son números primos?

Ejemplo 2

Determinemos los divisores de 2, 6, 7, 8.

- Los divisores de 2 son: {1, 2}
- Los divisores de 6 son: {1, 2, 3, 6}
- Los divisores de 7 son: {1, 7}
- Los divisores de 8 son: {1, 2, 4, 8}

Por lo tanto podemos afirmar que:

Los números enteros 2 y 7 son números primos. Los números 6 y 8 son números compuestos.

3.9 Criterios de divisibilidad de números enteros

Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 o cifra par. Ejemplos: 86, 238, 1256710
Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3. Ejemplos: 1356, ya que $1 + 3 + 5 + 6 = 15$, es múltiplo de 3. 4575, ya que $4 + 5 + 7 + 5 = 21$, es múltiplo de 3
Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o cinco. Ejemplos: 145, 290, 6745

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Tomando en cuenta los criterios de divisibilidad, determine por qué números son divisibles:

a) 42	b) 69	c) 100
d) 121	e) 600	f) 1024

3.10 Cálculo del mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD).

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de dos o más números es el número menor que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos.

Reglas prácticas para calcular el MCM:

Para hallar el MCM de varios números se descomponen los números dados en sus factores primos. El mínimo común múltiplo se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo 1

Encontrar el MCM de 18 y 30:

Múltiplos de 18 = {18, 36, 72, 90, 108, 126...}

Múltiplos de 30 = {30, 60, 90, 120, 150, 180...}

El menor múltiplo común es 90, ya que en ambos conjuntos es el primero que los contiene. Por lo tanto el MCM de 18 y 30 es 90

El máximo común divisor (MCD) de dos o más números enteros es el entero positivo mayor de los divisores comunes de los números dados.

Reglas prácticas para calcular el MCD:

Para hallar el MCD de varios números se descomponen los números dados en sus factores primos. El máximo común divisor se forma con el producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

Ejemplo 2

Calculemos el MCD y MCM de 1800, 420, 1260 y 108

Descomponiendo en factores primos

1 800	2	**420**	2	**1 260**	2	**108**	2
900	2	**210**	2	**630**	2	**54**	2
450	2	**105**	3	**315**	3	**27**	3
225	3	**35**	5	**105**	3	**9**	3
75	3	**7**	7	**35**	5	**3**	3
25	5	**1**		**7**	7	**1**	
5	5			**1**			
1							

Expresando los números enteros 1 800, 420, 1 260 y 108 en forma de potencia:

$1\ 800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$1\ 260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

El MCD de 1 800, 420, 1 260 y 108 es $2^2 \cdot 3 = 12$ y el MCM es: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 37\ 800$

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

I. Encontremos el Mínimo Común Múltiplo (MCM) a través de la descomposición en factores primos entre los números dados.

1. 45, 80 y 125
2. 64, 84 y 120
3. 50, 100 y 200
4. 345 y 850
5. 19 578 y 47 190
6. 425, 800 y 950
7. 840, 960, 7 260 y 9 135
8. 500, 560, 725, 4 350 y 8 200
9. 464, 812 y 870
10. 961, 2 821, 2 418 y 10 571

II. Encontremos el Máximo Común Divisor a través de la descomposición en factores primos entre los números dados.

1. 46 y 69
2. 45, 80 y 125
3. 64, 84 y 120
4. 50, 100 y 200
5. 32, 48 y 108
6. 100, 500, 700 y 1 000
7. 96, 102, 192 y 306
8. 108, 216, 432 y 500
9. 98, 490, 2401 y 4 900
10. 5 476, 6 845, 13 690, 16 428 y 20 535

3.11 Problemas de aplicación a su entorno

Leamos y resolvamos correctamente:

Ejemplo 1

Tres buses tardan 20, 30 y 40 minutos para realizar un recorrido completo. Si salieron los tres de la misma terminal a las 7 a.m. ¿A qué hora volverán a salir simultáneamente?

DESCOMPONER EN FACTORES PRIMOS						FORMA DE POTENCIA	MCM
20	2	**30**	2	**40**	2	**20** = $2^2 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 =$ **120**
10	2	**15**	3	**20**	2	**30** = $2 \cdot 3 \cdot 5$	
5	5	**5**	5	**10**	2	**40** = $2^3 \cdot 5$	
1		**1**		**5**	5		
				1			

El MCM es **120** esto es igual a 120 minutos.

120 minutos son equivalentes a 2 horas. Como los tres buses salieron a las 7 a.m. y 2 horas más que es el tiempo que debe transcurrir para que vuelvan a salir simultáneamente, entonces significa que saldrán a las 9 a.m.

Ejemplo 2

Un camión repartidor tiene un espacio de carga con las siguientes dimensiones: 600 cm de largo, 200 cm de ancho y 300 cm de alto. Se tienen que diseñar cajas para empacar productos, de tal manera que todo el volumen del camión sea ocupado, para que resulte más rentable a la empresa distribuidora.

DESCOMPONER EN FACTORES PRIMOS						FORMA DE POTENCIA	MCD
200	2	**300**	2	**600**	2	**200** = $2^3 \cdot 5^2$	$2^2 \cdot 5^2 =$ **100**
100	2	**150**	2	**300**	2	**300** = $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	
50	2	**75**	3	**150**	2	**600** = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	
25	5	**25**	5	**75**	3		
5	5	**5**	5	**25**	5		
1		**1**		**5**	5		
				1			

El MCD es **100** cm, esto es equivalente a 1 metro (1m).

Por lo tanto, el volumen de las cajas será igual al producto:

(largo)(ancho)(alto) = (1 m)(1 m)(1 m) = 1 m^3.

Las cajas tendrán un volumen de 1 m^3.

Como el volumen del camión es:

(200 cm)(300 cm)(600 cm)= 36 000 000 cm^3.

y sabemos que 1 metro = 100 centímetros,

Entonces convirtiendo los cm a m, resulta que:

(2m)(3m)(6m) = 36 m^3,

Esto permite encontrar el número de cajas dividiendo

36 m^2 ÷ 1 m^2 = 36 Cajas.

Ejemplo 3

En una bodega hay 3 barriles de melaza, cuyas capacidades son: 50 litros, 80 litros y 100 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de botellones iguales. Calculemos la capacidad máxima de estos botellones para que se pueda envasar la melaza contenida en cada uno de los barriles, y el número de botellones que se necesitan.

Para que encontrar la capacidad de los botellones que se necesitan, primero encontraremos el M.C.D. de 50, 80 y 100.

DESCOMPONER EN FACTORES PRIMOS			FORMA DE POTENCIA	MCD
$50 \mid 2$	$80 \mid 2$	$100 \mid 2$	**50** = $2 \cdot 5^2$	$2 \cdot 5 =$ **100**
$25 \mid 5$	$40 \mid 2$	$50 \mid 2$	**80** = $2^4 \cdot 5$	
$5 \mid 5$	$20 \mid 2$	$25 \mid 5$	**100** = $2^2 \cdot 5^2$	
$1 \mid$	$10 \mid 2$	$5 \mid 5$		
	$5 \mid 5$	$1 \mid$		
	$1 \mid$			

Podemos afirmar que:

$50 = 2 \cdot 5^2$;

$80 = 2^4 \cdot 5$;

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

De lo anterior se deduce que:

El MCD es 2 · 5 = 10.

Esto quiere decir que se necesitan botellones con capacidad de 10 litros

Ahora debemos investigar cuántos botellones vamos a necesitar para embotellar la melaza. Para ello dividiremos:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 10 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 80 & 10 \\ \hline 0 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 100 & 10 \\ \hline 0 & 10 \end{array}$$

Luego los resultados: 5, 8 y 10 son el número de botellones que necesitamos. Para saber el total de botellones, sumamos:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 8 \\ +\ 10 \\ \hline 23 \end{array}$$

Esto significa que:

necesitamos **23 botellones** para envasar la melaza que se encuentra en los barriles.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

1. Un estudiante de Medicina va a Cuba cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Cuba. ¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Cuba?
2. ¿Cuál es el menor número que al dividirlo separadamente por 15, 20, 36 y 48, en cada caso, da como residuo cero?
3. En una bodega hay 3 barriles de aceite, cuyas capacidades son: 250 litros, 360 litros, y 540 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de botellones iguales. Calcular las capacidades máximas de estos botellones para que en ellos se puedan envasar el aceite contenido en cada uno de los barriles, y el número de botellones que se necesitan.
4. Juan quiere embaldosar el suelo de la sala de la casa que tiene 5 m de largo y 3 m de ancho. Calculemos el lado de la baldosa y el número de baldosas, tal que el número de baldosas que se coloque sea mínimo y que no sea necesario cortar ninguna de ellas.

5. Un comerciante desea poner en cajas 12 028 guayabas y 12 772 manzanas, de modo que cada caja contenga el mismo número de guayabas o manzanas y, además, el mayor número posible. Hallar el número de guayabas de cada caja y el número de cajas necesarias.
6. ¿Cuánto mide la mayor baldosa cuadrada que cabe en un número exacto de veces en el aula de clases de 8 m de longitud y 6 m de anchura? ¿Y cuántas baldosas se necesitan?
7. Denis visita a su abuela cada 12 días, y su hermana cada 15 días. Hoy han coincidido los dos. ¿De aquí a cuantos días volverán a coincidir en casa de su abuela?

4 Potenciación con base y exponente entero

Indicador de logro

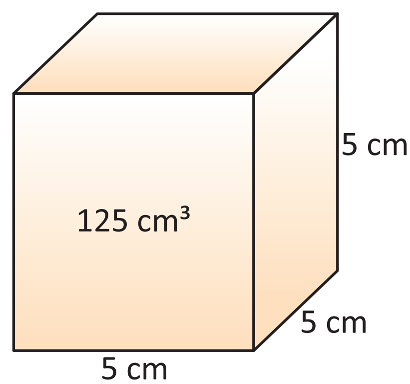
Aplica propiedades de la potenciación en la resolución de ejercicios.

Recordemos

¿Por qué debemos sembrar árboles alrededor de las casas, ríos, quebradas y vertientes de agua?

Veamos el siguiente ejemplo:

Observemos la figura que se presenta a la derecha, es una cajita que tiene 5 cm de largo, 5 cm de ancho y 5 cm de alto. En Geometría esta figura se llama cubo de 5 cm de arista.



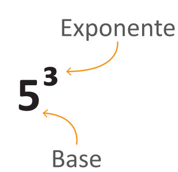
Recordemos que para calcular el volumen elevamos el valor de su arista al cubo. O sea

$V = \ell^3$

$V = (5\text{ cm})^3 = (5\text{ cm})(5\text{ cm})(5\text{ cm})$

$V = 125\text{ cm}^3$

Por lo tanto podemos afirmar que el volumen de la cajita es de **125 cm³**.



En la expresión 5^3, 5 se llama base y 3 es el exponente. La expresión 5^3 se lee "5 al cubo" o "5 a la tercera potencia" 0 "tercera potencia de 5".

Si n es un entero positivo, la notación exponencial, a^n definida por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\text{- factores de } a}$$

Esto representa el producto del número entero positivo a por si mismo n veces. Se dice que "*a* es elevado a la potencia *n*" o simplemente "*a* a la *n*". El entero positivo ***n*** se llama **exponente**, y el número ***a*** se denomina **base**.

Casos especiales	
$a^1 = a$	$2^1 = 2$
$a^2 = a \cdot a$	$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
$a^3 = a \cdot a \cdot a$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$	$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

En los siguientes ejemplos presentamos varios casos numéricos de la notación exponencial.

1. $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
2. $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
3. $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7\,776$
4. $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
5. $(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = -27$
6. $(-5)^4 = -5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 = 625$
7. $(-6)^5 = -6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6 = -7\,776$
8. $(-2)^6 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 64$

A continuación ampliamos la definición de a^n, a exponentes no positivos.

4.1 Potencia de exponente cero.

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Esto significa que cualquier número entero elevado a cero es igual a 1.

a. $(-3)^0 = 1$

b. $(100)^0 = 1$

c. $3^0 = 1$

4.2 Potencia de exponente negativo

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a \neq 0}$$

Esto significa que cualquier número entero diferente de cero elevado a una potencia negativa es igual al cociente de la unidad por entero elevado a la potencia positiva.

a. $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$

b. $(3)^{-3} = \dfrac{1}{(3)^3} = \dfrac{1}{27}$

4.3 Multiplicación de potencias de igual base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto significa que el producto de potencias de igual base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.

a. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$

4.4 División de potencias de igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esto significa que el cociente de potencias de igual base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes.

a. $\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

b. $\frac{(-2)^3}{(-2)^2} = (-2)^{3-2} = (-2)^1 = -2$

4.5 Potencia de una potencia

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Esto significa que la potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

a. $(2^3)^4 = (2)^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4\,096$

b. $[(-2)^2]^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 64$

4.6 Multiplicación de una potencia de exponente igual

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Esto significa que la multiplicación de una potencia de igual exponente es igual a la potencia del producto de las bases.

a. $2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5 = 7\,776$

b. $(-2)^3 \cdot (-3)^3 = [(-2)\,(-3)]^3 = 6^3 = 261$

4.7 División de una potencia de exponente igual.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Esto significa que la división de una potencia de igual exponente es igual a la potencia del cociente de las bases.

a. $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

b. $\frac{(-2)^3}{(-3)^3} = \left(\frac{-2}{-3}\right)^3 = \frac{-8}{-27} = \frac{8}{27}$

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

Resolvamos correctamente las siguientes expresiones:

1. $(3)^{-5} =$
2. $(-7)^2 \cdot (-7)^3 =$
3. $\frac{5^3}{5^2} =$
4. $\frac{(-1)^3}{(-1)^2} =$
5. $(2^3)^2 =$
6. $[(-2)^5]^3 =$
7. $2^3 \cdot 3^3 =$
8. $(-2)^2 \cdot (-3)^2 =$
9. $5^2 =$
10. $2^3 =$
11. $2^5 =$
12. $(-1)^3 =$
13. $(-3)^5 =$
14. $(-5)^0 =$
15. $(150)^0 =$
16. $(-5)^{-2} =$

4.8 Problemas de aplicación

Sabemos que para proteger y conservar el medio ambiente es necesario cultivar árboles alrededor de los ríos, quebradas, vertientes de agua. Por ejemplo si se desean cultivar árboles de pino, se deben distribuir en el terreno cada tres metros.

Para cultivar los árboles en un terreno cuadrangular, lo primero que debemos hacer es ubicar la primera marca en uno de los vértices, luego vamos ubicando los puntos: 0, 3, 6, 9, 12,…(es decir, cada tres metros) hasta completar toda el área que deseamos reforestar.

La fórmula de cantidad de árboles cultivados por fila o columna se denota por:

$n = \frac{L}{d} + 1$ y el total cultivado es el mismo de área de un cuadrado: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n}^2$, donde:

d: distancia entre árboles, ***n***: cantidad de árboles por fila (o columna) y ***x***: total de árboles cultivados por Fila (o columna).

Si es una manzana la que vamos a reforestar, entonces el área es igual a 7 026 m^2, cada lado es igual a 84 metros aproximadamente.

Debemos dividir 84 ÷ 3 para saber cuántos árboles cultivaremos en una fila o columna (lado). Esto es:

$n = \frac{84}{3} + 1 = 29$ (árboles cultivados por fila)

Total: $x = (29)^2 = 841$ (total de árboles cultivados en una manzana)

En una manzana de terreno se pueden cultivar 841 árboles de pino, a tres metros de distancia entre cada uno de ellos.

Actividades

Copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios.

Resolvamos correctamente los siguientes problemas de aplicación:

1. Un grupo de estudiantes deben reforestar las riberas del río y disponen de un terreno que tiene una área de 100 000m^2. ¿Cuántos árboles de Chilamate y Guanacaste necesitan para reforestar toda el área, si sabe que para sembrar cada árbol deben ubicarse a una distancia de 10 metros?

2. Un grupo de estudiantes de Séptimo grado deben sembrar árboles frutales para mejorar los hábitos alimenticios de la población de su municipio y les han asignado un terreno de dos manzanas (esto es igual a 14 052m^2). ¿Cuántos árboles necesitan, si se sabe que deben sembrar cada árbol a una distancia de 6 metros?

3. Un grupo de productores de madera deben sembrar árboles de caoba para mitigar el despale que se ha dado en su municipio y tienen un terreno de 15 manzanas (esto es igual a 105 390m^2). ¿Cuántos árboles necesitan para reforestar toda el área, si se sabe que deben sembrar cada árbol a una distancia de 6 metros?

4. Un grupo de productores de madera deben sembrar árboles Pino para mitigar el despale que se ha dado en su región y tienen un terreno de 10 manzanas (esto es igual a 70 260m^2). ¿Cuántos árboles necesitan para reforestar toda el área, si se sabe que deben sembrar cada árbol a una distancia de 3 metros?

Autoevaluación

Leamos, copiemos en el cuaderno y resolvamos los siguientes ejercicios. Luego encerremos el inciso que corresponde a la respuesta correcta.

1. Si las ganancias de la cosecha de maíz fueron mayores que la inversión. Esta cantidad representa:
    a. Un entero positivo
    b. Un entero negativo
    c. Los incisos a y b son correctos
    d. No representan ningún número entero
2. En el conjunto A {5, –3, –6, –8, 0, 2, –10, 9, 13} se muestran algunos números enteros. Al comparar los números –10 y 9, podemos afirmar que:
    a. $-10 > 9$
    b. $9 < -10$
    c. $9 > -10$
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
3. Al establecer las relaciones de orden entre los siguientes números enteros $11 > 13 < 20$ podemos afirmar que esta relación es:
    a. Verdadera
    b. Falsa
    c. Los incisos a y b son incorrectos
    d. No se le puede asignar valor de verdad
4. Si ahorré C$5 000 en una Cooperativa y luego hice un retiro de C$1850. Entonces ¿Cuánto me quedó en la cuenta?
    a. C$6 850
    b. C$3 250
    c. C$2 850
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

5. El resultado de resolver el valor absoluto de |-585|+|-195|es:
   a. −780
   b. 780
   c. Los incisos a y b son correctos
   d. No es ningún número entero
6. El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de 24, 36 y 48 es:
   a. 48
   b. 84
   c. 144
   d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
7. El Máximo Común Divisor (MCD) de 24, 36 y 48 es:
   a. 24
   b. 12
   c. 48
   d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
8. Al aplicar las propiedades de potenciación en la simplificación de la expresión $(-3)^3(-3)^2(-3)^0$ el resultado es:
   a. 243
   b. 234
   c. −243
   d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
9. Ana, Promotora de la Cooperativa de Producción, supervisa el área de cultivo de árboles frutales y camina largas distancias todos los días. En su caminata subió al área de cultivo una distancia de 450 m. Después, bajó 285 m y se detuvo a descansar. ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra Ana?
   a. A 185 metros de su punto de partida
   b. A 165 metros de su punto de partida
   c. Los incisos a y b son correctos
   d. No representan ningún número entero

10. María realizó un préstamo en USURA CERO por una cantidad de C$ 15 000 para invertir en su Finca. Días más tarde pagó a sus trabajadores C$ 6 500. También gastó C$ 7 800 en materiales y herramientas para el uso de los trabajadores en el área de siembra. ¿Cuánto invirtió en la finca? y ¿Cuánto le quedó?

    a. C$ 7 800 y C$ 7 200

    b. C$ 14 300 y C$ 700

    c. C$ 6 500 y C$ 8 500

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

11. Juan fue a la distribuidora de productos básicos y compró 10 libras de frijoles a C$22. Si pagó con un billete de C$500 ¿Cuánto dinero le entregaron de vuelto o de cambio?

    a. C$200

    b. C$300

    c. C$280

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

12. Una Cooperativa de productores tienen 80 manzanas de tierra y ha decidido repartir las tierras a sus socios para que siembren papas individualmente. ¿Si han decidido repartir la finca en partes iguales y son 16, cuántas manzanas le corresponde a cada uno?

    a. 5 manzanas

    b. 7 manzanas

    c. 10 manzanas

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

13. El resultado de sumar los siguientes números enteros $(-156) + (245)$ es:

    a. 98

    b. 89

    c. 401

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

14. Un grupo de mujeres se organizaron para arrancar la cosecha de frijoles en dos momentos. Primero cortaron 1350 libras de frijoles, en el segundo momento recogieron 2240 libras. ¿Cuántas libras de frijoles arrancaron el grupo de mujeres?

    a. 35 quintales y 90 libras

    b. 3 590 libras de frijoles

    c. a y b son correctas

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

15. El resultado de multiplicar los siguientes números enteros: $(-8)(-5)(-6)$ es:
    a. 240
    b. –240
    c. Los incisos a y b son correctos
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
16. El resultado de resolver esta división $(-252) \div 12$ es:
    a. –21
    b. –24
    c. Los incisos a y b son correctos
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
17. Una manzana bien cultivada de maíz produce 60 quintales. Cada quintal tiene un valor de C$ 500. ¿Cuántos quintales de maíz se cosecharán, si se sembraron150 manzanas?, ¿Cuánto dinero recibirán por la venta del frijol?
    a. 9 000 quintales y C$ 4,3 millones
    b. 6 000 quintales y C$ 4,5 millones
    c. 9 000 quintales y C$ 4,5 millones
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
18. Un productor tiene 5 quintales (500 libras) de frijoles para siembra y sabe que para realizar una siembra de frijoles al espeque necesita 25 libras por manzana. ¿Cuántas manzanas puede sembrar con la semilla que tiene?
    a. 25 manzanas
    b. 20 manzanas
    c. 24 manzanas
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
19. A un ganadero le ofrecen C$ 8200 por una vaca, pero se niega a venderla. Un día después la vende por su peso que es de 195 libras, dando cada libra a C$ 45. ¿Ganó o perdió en la venta?
    a. Ganó en la venta
    b. Perdió en la venta
    c. No ganó, ni perdió en la venta
    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

20. El resultado de resolver esta multiplicación de potencias de igual base $(-5)^2\,(-5)^3\,(-5)^0$ es:

    a. 3 130

    b. 3 125

    c. –3 125

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

21. En una caja que contiene 60 frascos de vacunas para el ganado. Cada frasco cuesta 38 córdobas ¿Cuánto hay que pagar por la compra de dos docenas de cajas?

    a. C$50 500

    b. C$50 450

    c. C$50 400

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

22. Una empresa tiene 3 barriles de refrescos cuyas capacidades son: 60 litros, 90 litros y 120 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de botellones iguales. Calculemos la capacidad máxima de estos botellones para que se pueda envasar el refresco contenida en cada uno de los barriles, y el número de botellones que se necesitan.

    a. 15 litros y 9 botellones

    b. 30 litros y 12 botellones

    c. 30 litros y 9 botellones

    d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

23. José visita a su abuela cada 15 días, y su hermana cada 18 días. Hoy han coincidido los dos. ¿De aquí a cuantos días volverán a coincidir en la casa de su abuela?

    a. 120 días

    b. 90 días

    c. 45 días

    d. Ningún día

24. Un grupo de estudiantes deben sembrar árboles de chilamate para mitigar el despale que se ha dado en su región y tienen un terreno de 10 manzanas (esto es igual a 70 260 m^2). ¿Cuántos árboles necesitan para reforestar toda el área, si les orientaron que deben sembrar cada árbol a una distancia de 8 metros?

    a. 1 156 árboles

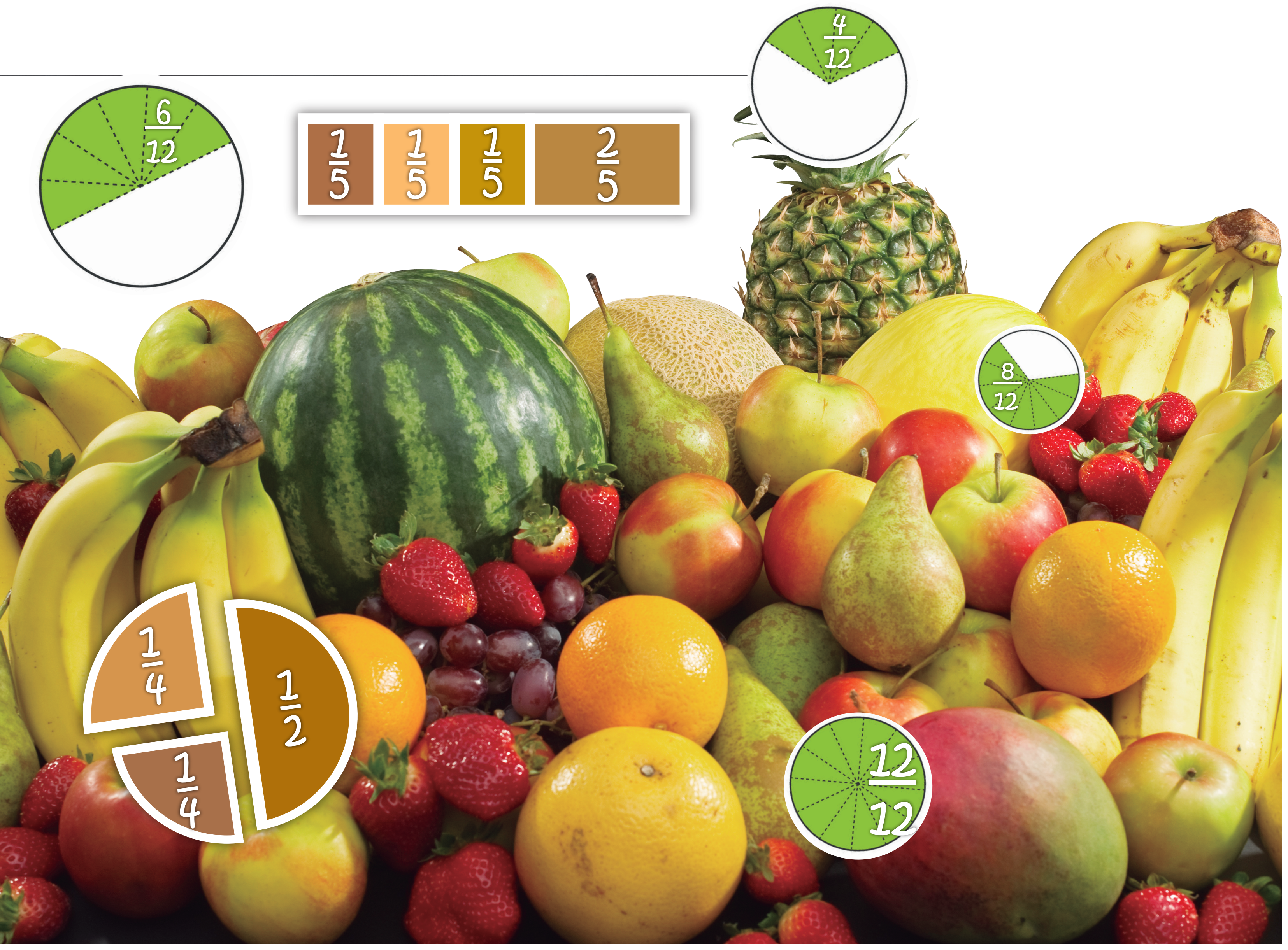
    b. 265 árboles

    c. 7 026 árboles

    d. Ninguna de las respuestas es correcta

II UNIDAD

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN LA VIDA COTIDIANA ($\mathbb{Q}$)



II Unidad El conjunto de los números racionales en la vida cotidiana ($\mathbb{Q}$)

Desempeño de aprendizaje

Resuelve problemas de su entorno, utilizando las operaciones y propiedades del conjunto de los números racionales.

Ejes transversales

Practica y promueve estilos de vida saludable, mediante acciones de protección de la salud individual y colectiva, que contribuya al mejoramiento de la calidad de vida.

1 Números Racionales

Indicador de logro

Establece relaciones de equivalencia entre números racionales que representan situaciones prácticas.

1.1 Necesidad del surgimiento de los números racionales.

¿Qué son los números racionales?

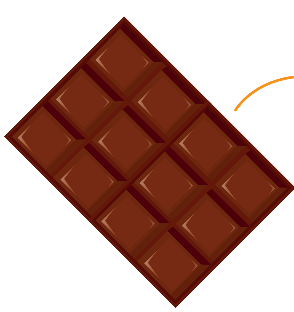
¿Cuáles son los números racionales?

Recordemos

Los números han surgido a lo largo de la historia por la necesidad que ha tenido el hombre de contar, de medir, de repartir, entre otras cosas.

Sabemos que, los primeros números que se utilizaron fueron los naturales ($\mathbb{N}$), sin embargo, estos números no son suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por ello, se dio el surgimiento de otros números como los enteros, los racionales y reales.

Los números racionales presentan una particularidad muy interesante. Supongamos que tenemos un chocolate. Ese chocolate lo podemos representar como "1 chocolate". 1 es un número entero, tenemos "1 chocolate entero".

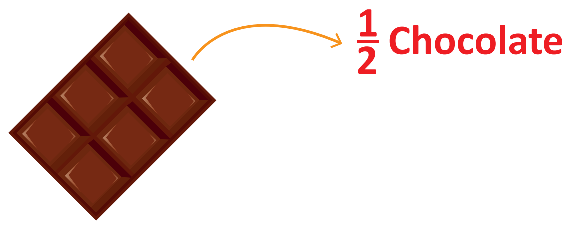


1 Chocolate

Pero...***¿Qué ocurre si nos comemos la mitad del chocolate? ¿Cuánto chocolate nos queda?***

La respuesta, de forma numérica, no la encontramos en el conjunto de los números naturales o de los números enteros. Esta respuesta la encontramos en el conjunto de los números racionales.

La respuesta sería “Nos queda medio chocolate” y en forma numérica:



Este número es una fracción, una fracción de un número, una parte de un número entero.

Así como el hombre empezó a contar con los números naturales, empezó a medir con los Números Racionales cuya idea fundamental históricamente hablando son las fracciones.

En la historia, el primer documento del que se tiene referencia sobre los números racionales es en un "papirus" egipcio que data de 1 900 a. C. (¡hace casi 4 000 años!) escrito por el sacerdote Ahmes. En este papiro se nota las serias dificultades que tuvieron para darle significado a los números racionales, expresado como el cociente de dos números con numerador distinto de 1.

En la vida diaria es común utilizar los números racionales, en distintos contextos: situaciones de compra o consumo, figuras geométricas, informaciones en medios de comunicación, en la medida de medicamentos tanto para personas como de los animales, medir la cantidad de herbicidas, insecticidas que lleva una bomba de fumigar, las medidas que hacemos de maíz, frijoles o cualquier otro grano, que generalmente lo hacemos en medios, que es el equivalente a 20 libras, pero que también es una quinta parte de un quintal, que tiene 100 libras.

Reflexionemos

¿Como haríamos para representar numéricamente la intensidad del terremoto que se produjo el 10 de Abril del 2014, si no existieran los números racionales (6,2 en la escala de Richter)?

Sabemos que Nicaragua tiene una superficie aproximada de 130000 km^2 y de ésta 10 384 km^2 representan cuerpos de agua entre lagos, lagunas y ríos. En términos de porcentaje es aproximadamente el 7,9%. ¿Qué pasaría si no tuviéramos el conjunto de los racionales?

Mencionemos otros ejemplos que existen en nuestra comunidad y en nuestro país donde se refleje la importancia de los números racionales.

1.2 Concepto de fracción

Como mencionamos anteriormente, hay ocasiones en las que los números naturales no nos sirven para expresar algunas situaciones.

Por ejemplo, respondamos las siguientes preguntas:

¿Podemos comernos una libra de queso de una vez?

Si hago pedazos, ¿cómo puedo representar con números ese pedazo? ¿Puedo partirlo entre 2, 3, 4,... personas, en partes iguales? ¿Cómo represento la parte de cada una?; Si tengo dos quesos, ¿puedo repartirlo entre 3 personas? ¿Cómo puedo hacerlo? ¿Puedo representarlo con números esta cantidad?

Vamos a utilizar los números naturales, pero no van a representar unidades completas.

Recordemos que es unidad fraccionaria:

La **unidad fraccionaria** es cada una de las partes que se obtienen al dividir la unidad en partes iguales.

Una de la formas en que se puede expresar un número racional es $\frac{a}{b}$, en la que a y b son números enteros, con $b \neq 0$

$\frac{a}{b}$

Numerador: *indica el número de unidades fraccionarias elegidas*

Denominador: *indica el número de partes en que se ha dividido la unidad*

La expresión anterior de los números racionales se lee así:

- El numerador se lee con el nombre del número
- El denominador se lee así:

  Si es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, se lee: medio, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo y noveno, respectivamente.

  Si es 10, se lee décimos, y si es mayor que 10, se lee el número añadiendo la terminación –avo

Ejemplo:

Número Racional	Numerador	Denominador	Lectura
$\frac{1}{3}$	1	3	Un tercio
$\frac{2}{5}$	2	5	Dos quintos
$\frac{7}{15}$	7	15	Siete quinceavos
$\frac{3}{10}$	3	10	Tres décimos
$\frac{5}{2}$	5	2	Cinco medios

1.3 Número Racional

FRACCIONES

- **Parte de un todo**: Expresan las partes iguales en las que se divide un todo que llamamos unidad y cuántas de esas partes se toman.
- **Cociente**: Expresa el **cociente de dos números enteros a y b** (a ÷ b). Calculamos su valor dividiendo el numerador entre el denominador. Por ejemplo: $\frac{2}{2}$

A continuación analizaremos algunos ejemplos donde se aplica el significado de número racional:

Ejemplo 1

Cuando expresamos: Un depósito contiene $\frac{2}{3}$ de agua.

El todo, en este caso, es el depósito que contiene agua.

La unidad equivale a $\frac{3}{3}$, de manera general es un número racional con el mismo número en el numerador y el denominador.

$\frac{2}{3}$ de agua expresa la relación existente entre el agua y la capacidad del depósito: De sus tres partes dos están ocupadas por agua.

Ejemplo 2

El número racional como cociente.

Tres amigos: Andrés, Juan y Pablo cultivaron 5 manzanas de hortalizas, de las cuales obtuvieron una ganancia de C$15 000, ¿cuánto dinero le correspondió a cada uno?

Solución

Como cociente:

A cada uno le correspondió

$$\frac{15\,000}{3} = C\$5\,000$$

Ejemplo 3

En nuestra comunidad se sabe que $\frac{5}{7}$ de la población son jóvenes y $\frac{2}{7}$ son adultos.

Veamos lo que significa esto, desde los diferentes significados de un número racional.

Representemos gráficamente:

Quiere decir que podemos dividir la población (el todo) en 7 grupos iguales, de los cuales 5 serán jóvenes y 2 serán adultos. También lo podemos decir de otra forma: por cada 7 personas que hay, 5 son jóvenes y 2 adultos.

Si no sabemos cuántas personas hay en la comunidad, no podremos averiguar nada más.

Si, para el ejemplo anterior, nos dicen que en esa comunidad hay 1 050 habitantes, podremos calcular cuántos serían jóvenes.

Hemos dicho que $\frac{5}{7}$ significa dividir la población en 7 partes iguales y tomar 5. **(Número racional como cociente)**.

Así las operaciones que debemos hacer son:

1 050 ÷7 = 150, el número total de las personas en la comunidad entre las siete partes que se divide la población.

150 · 5= 750, la cantidad de personas jóvenes que hay en las cinco partes que representan.

Lo que significa que 750 personas de la comunidad serán jóvenes.

Los adultos serán 150 · 2 = 300 **(Número racional como operador)**.

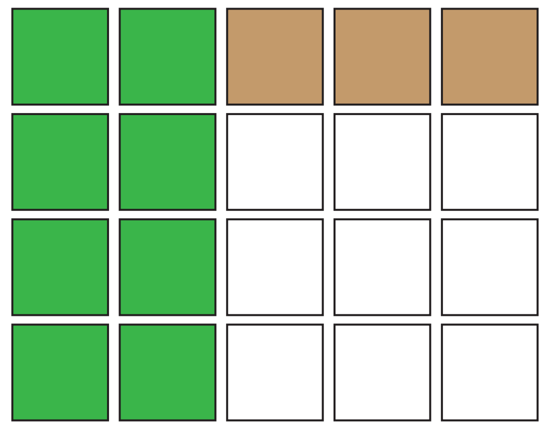
Ejemplo 4

Como parte del bono productivo que el gobierno entrega por buenas prácticas agropecuarias en su comunidad, don Juan recibe 1 500 plantas, entre genízaro, guanacaste y guayacán, si siembra $\frac{2}{5}$ partes de árboles de genízaro y la cuarta parte de lo que le queda son de guanacaste. ¿Qué fracción le queda de árboles de guayacán? ¿Cuántos árboles de cada especie siembra?

Solución

Empecemos interpretando gráficamente:

En primer lugar, formamos un rectángulo de lado 5 por 4, por lo que se divide en 20 cuadrículas, esto lo hacemos porque el MCM de $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$ es 20.



En el gráfico coloreamos con color verde las $\frac{2}{5}$ partes (dos de las cinco partes) que representan al genízaro y con café coloreamos $\frac{1}{4}$ (una de las cuatro partes) de la parte no sombreada que representa al guanacaste.

Como podemos apreciar quedó sin sombrear $\frac{9}{20}$ (nueve de las veinte partes) que está dividido el rectángulo, que son árboles de guayacán.

Calculemos cuántos árboles de cada especie siembra:

Genízaro:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\cdot 1500 = \frac{2\cdot 1500}{5} = \frac{3000}{5} = 600$$

600 árboles de Genízaro.

Guanacaste: El gráfico observamos que $\frac{1}{4}$ de la parte no sombreada es equivalente a $\frac{3}{20}$ del total de árboles, por lo tanto.

$$\left(\frac{3}{20}\right)\cdot 1\ 500 = \frac{3\cdot 1\ 500}{20} = \frac{4\ 500}{20} = 225$$

225 árboles de Guanacaste.

Guayacán: Quedan $\frac{9}{20}$ de 1 500 árboles, es decir.

$$\left(\frac{9}{20}\right)\cdot 1\ 500 = \frac{9\cdot 1\ 500}{20} = \frac{13\ 500}{20} = 675$$

675 árboles de Guayacán.

Comprobando los resultados obtenidos tenemos:

600 + 225 + 675 = 1 500 árboles en total

Otra forma de resolver:

Genízaro:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\cdot 1500=\frac{2\cdot 1500}{5}=\frac{3000}{5}=600$$

Guanacaste: 1 500 - 600 = 900.

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 900=\frac{900(1)}{4}=\frac{900}{4}=225$$

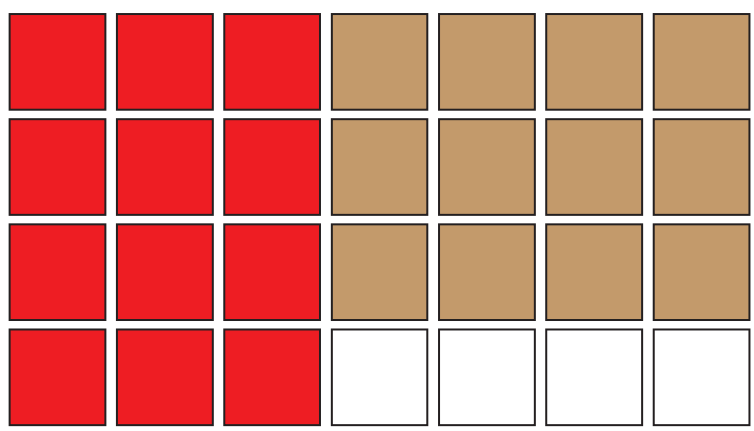
Guayacán: 1 500 - 600 - 225 = 675

Ejemplo 5

Varios miembros de nuestra comunidad recibieron el bono productivo alimentario, impulsado por nuestro Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional.

Para alimentar a los cerdos, gallinas y el ganado que se tiene, a finales de mayo, unas reservas de 2 800 lb entre maíz y sorgo. En Junio se gastan $\frac{3}{7}$ de sus existencias, y en julio $\frac{3}{4}$, de lo que le quedaba. ¿Cuántas libras de maíz y sorgo se tienen los primeros días de agosto?

Solución



Similar al ejemplo anterior dividimos el rectángulo en 28 partes iguales ya que el MCM de $\frac{3}{7}$ y $\frac{3}{4}$ es 28.

Sombreamos con rojo los $\frac{3}{7}$ de la unidad (del total de los cuadros) y con café los $\frac{3}{4}$ de la parte que sobró (no sombreada).

Vemos que, sin sombrear han quedado 4 partes de las 28, es decir, $\frac{4}{28}$.

Si notamos, esta parte es equivalente a lo que anteriormente consideramos una séptima parte de la unidad, por lo tanto podemos escribir:

$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$ del total.

Calculemos a cuántas libras corresponde esto:

$$\left(\frac{1}{7}\right)\cdot 2\ 800=\frac{1\cdot 2\ 800}{7}=\frac{2\ 800}{7}=400$$

Conclusión: Para los primeros días del mes de agosto se tiene una reserva de **400 libras** entre maíz y sorgo.

TIPOS DE NUMEROS RACIONALES

Racionales propios: el numerador es menor que el denominador. Ej.: $\frac{2}{5}$

Racionales impropios: el numerador es igual o mayor que el denominador. Ej.: $\frac{7}{2}$

Racionales decimales: el denominador es la unidad seguida de ceros. Ej.: $\frac{15}{1\,000}$

Racionales mixtos: son números racionales impropios que se expresan dando la parte entera y la parte fraccionaria, siendo esta última un número racional propio. Se denotan $a\frac{b}{c}$, Esto significa que tenemos a enteros y la parte fraccionaria $\frac{b}{c}$, es decir, tenemos $a + \frac{b}{c}$. Mediante este último cálculo se obtiene el número racional impropio a la que corresponde la expresión mixta.

Ejemplo 1:

a. $2\frac{1}{2}$ significa que tenemos dos enteros y media parte

Interpretemos gráficamente:

Dividimos la unidad en dos partes. Como tenemos 2 unidades, sombreamos con rojo la primera unidad y con azul la segunda unidad, sombreamos con café media unidad más para tener un total de $2\frac{1}{2}$, lo que es igual a tener $\frac{5}{2}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Numéricamente tenemos: $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ o lo que es lo mismo: $2\frac{1}{2}=\frac{(2\cdot 2)+1}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$

Escrito como decimal sería: 2 + 0,5 = 2,5 (se convierte la parte fraccionaria en decimal y se suma a la parte entera ya conocida)

b. $2\frac{3}{5}$ significa que tenemos 2 enteros y tres quintas partes

En forma gráfica:

Recordemos que el denominador nos indica las partes en que divide la unidad, en nuestro caso tenemos el número 5. Esto nos dice que debemos dividir la unidad en 5 partes iguales.

La primera unidad la coloreamos de café, la segunda unidad la coloreamos de verde y tres de las cinco partes de la siguiente unidad las coloreamos de amarillo.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Numéricamente serían: $2+\frac{3}{5}=\frac{(2\cdot 5)+3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}$, Escrito como decimal sería: 2 + 0,6 = 2,6

c. Transforma la fracción $\frac{19}{5}$ en número mixto.

En forma gráfica:

El denominador nos indica que debemos dividir la unidad en 5 partes iguales, como tomaremos 19 partes necesitamos más de una unidad, tomemos de 5 en 5 la unidad.

La primera unidad (5 partes) la sombreamos con el color café, la segunda unidad (5 partes) la sombreamos con el color verde, la tercera unidad (5 partes) la sombreamos con amarillo, las restantes 4 partes (para completar 19) las sombreamos con rosado. En total tendremos 3 unidades completas más 4 de las 5 partes de otra unidad.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Numéricamente tenemos:

Hacemos el cociente que nos indica dicha fracción:

$19 \div 5 = 3$ con residuo igual a 4.

Entonces, tenemos como parte entera 3 y la parte fraccionaria saldría de continuar dividiendo 4 entre 5, es decir, de hacer $4 \div 5$, o lo que es lo mismo $\frac{4}{5}$

Por tanto, como número mixto, se trata $3\frac{4}{5}$

Como decimal sería $3 + \frac{4}{5} = 3 + 0{,}8 = 3{,}8$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Utilizando números racionales, escribamos sobre la raya de la derecha de cada expresión el número que representa lo resaltado con negrita.

1. Juan sembró **un cuarto** de manzana de maíz.________
2. Para hacer una camisa Luisa compró **una y media** yarda de tela.________
3. Por la compra de una camisa me hicieron un descuento del **5%**.________
4. María compró **medio** litro de aceite.________
5. Los ingresos por la venta de tomates fueron de C$1 000 y se repartieron entre dos hermanos. A cada uno le corresponde **la mitad** de los C$1 000________
6. Nicaragua es uno de los pocos países en el mundo que ya alcanzaron el objetivo de la cumbre mundial sobre la alimentación, de reducir a **la mitad** el número de personas subnutridas ________
7. Nicaragua alcanzó la meta del primer objetivo de desarrollo del milenio, de reducir a **la mitad** la proporción de personas que padecen hambre.________

II. Si una naranja la divido en 5 partes iguales y a Luis le doy tres de estas partes y a Mario el resto ¿cómo se llaman las partes que he dado a cada uno, respecto de la unidad?

III. Clasifiquemos los siguientes números racionales en propios o impropios:

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{5}{6}$
3. $\frac{8}{5}$
4. $\frac{7}{9}$
5. $\frac{5}{2}$
6. $\frac{5}{12}$
7. $\frac{4}{3}$
8. $\frac{7}{5}$

IV. Convirtamos los siguientes números mixtos a números racionales impropios.

1. $4\frac{2}{3}$
2. $10\frac{1}{4}$
3. $5\frac{3}{4}$
4. $6\frac{1}{3}$

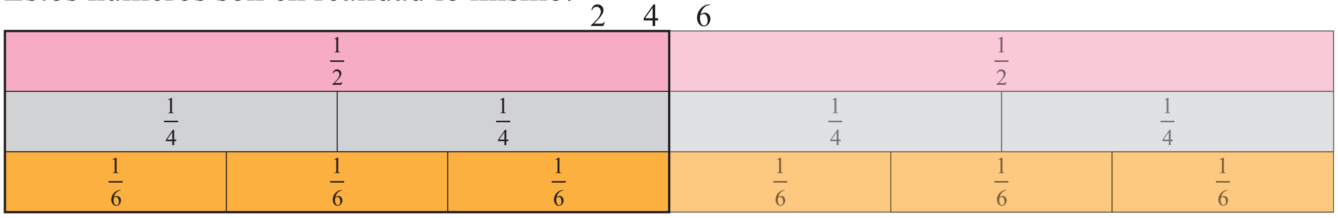
V. Andrés en su finca aplica las buenas prácticas agropecuarias y tiene una parcela de forma cuadrada, en $\frac{1}{8}$ de ella tiene sembrado frijol, en $\frac{2}{4}$ zanahoria y en el resto papa. ¿Qué porción de la parcela está sembrada de papa? Respondamos la pregunta gráfica, verbal y simbólicamente.

1.4 Números Racionales Equivalentes.

Podemos afirmar que:

Los números racionales equivalentes tienen el mismo valor, aunque se escriban de formas diferentes.

Estos números son en realidad lo mismo: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$



¿Por qué es lo mismo?

Porque cuando multiplicamos o dividimos a la vez el numerador y el denominador por el mismo número, el número mantiene su valor. La regla a recordar es:

¡Lo que hacemos al numerador del número racional también lo tenemos que hacer al denominador!

Por eso, estos números racionales son en realidad lo mismo:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{2}{4} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{8} \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Veamos otros números racionales equivalentes, ahora dividiendo:

$$\frac{18}{36} \xrightarrow{\div 3} \frac{6}{12} \xrightarrow{\div 6} \frac{1}{2} \qquad \frac{18}{36} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Si seguimos dividiendo hasta que no podamos más, habremos simplificado el número racional (lo hemos hecho lo más simple posible, lo hemos convertido en irreductible).

Importante

1. El numerador y el denominador de un número racional siempre deben ser números enteros.
2. Las operaciones que podemos hacer son multiplicar y dividir. Si sumamos o restamos un número, no tendremos un número racional equivalente.
3. El número que elijamos para dividir al numerador y denominador no debe dejar ningún resto en las divisiones.

CÓMO RECONOCER NÚMEROS RACIONALES EQUIVALENTES:

Existen varias formas de reconocer si dos números racionales son o no equivalentes.

1. Realizando los cocientes que representan cada una de los números racionales y comprobando que obtenemos el mismo resultado. → $\frac{12}{8}$ y $\frac{3}{2}$ ambas valen 1,5

2. Multiplicando en cruz para ver si resulta el mismo número, es decir, si se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. → $\frac{12}{8}$ y $\frac{3}{2}$, $12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 24$

3. Comprobando que hemos obtenido una de ellos multiplicando (o dividiendo) el numerador y denominador del otro número por la misma cantidad. → $\frac{12}{8}$ y $\frac{3}{2}$ hemos dividido el numerador $12 \div 4$ y el denominador $8 \div 4$.

Ejemplo 2:

Dado $\frac{7}{9}$ encontremos tres números racionales equivalentes:

Solución

a. Multiplicando por 2: $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{14}{18}$

b. Multiplicando por 3: $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{21}{27}$

c. Multiplicando por 5: $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}$

Ejemplo 3:

Comprobamos la equivalencia de los siguientes números racionales:

a. $\frac{7}{9}$ y $\frac{14}{18}$

Solución

Lo podemos hacer de varias maneras:

Si dividimos cada número racional obtenemos el mismo valor:

$7 \div 9 = 0{,}77$

$14 \div 18 = 0{,}77$

Si multiplicando en cruz, obtenemos el mimos valor:

$7 \cdot 18 = 9 \cdot 14 = 126$

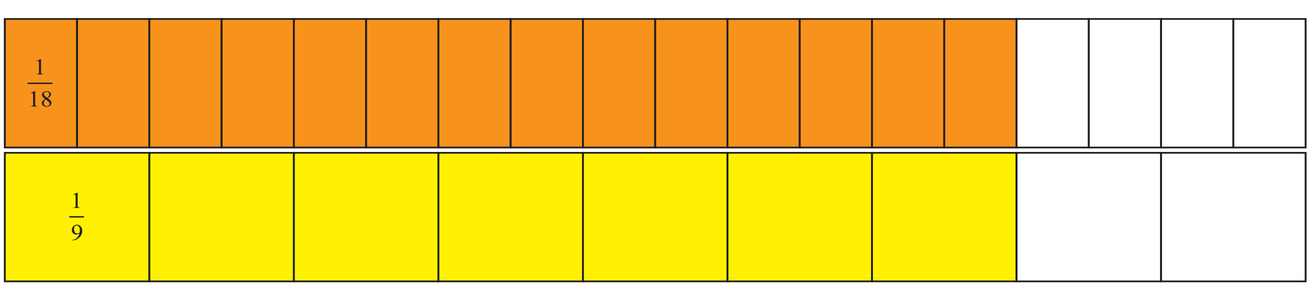
Si dividiendo el numerador y denominador del segundo número racional entre 2 obtenemos el primer número racional:

$$\frac{14}{18} = \frac{14 \div 2}{18 \div 2} = \frac{7}{9}$$

Gráficamente:

Dividimos la unidad en 18 partes y sombreamos con naranja 14 partes

Dividimos la unidad en 9 partes y sombreamos con amarillo 7 partes.



Comparamos las partes sombreadas (naranja y amarillo) y vemos que tienen el mismo tamaño, por lo tanto los dos números racionales son equivalentes.

1.5 Relaciones de orden

Para ordenar o comparar números racionales se utiliza uno de los siguientes métodos:

1 **Reduciendo a común denominador.**

De dos números racionales que tienen el mismodenominadores menor el que tenga menor numerador.

Ejemplo:

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ya que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

2 **Calculando el valor decimal de cada fracción.**

Comparar las fracciones según su valor decimal.

Ejemplo:

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ya que $0{,}33 < 0{,}5$

1.6 Representación gráfica de los números racionales

Recordemos

Para representar con precisión los números racionales: Se divide cada unidad en las partes indicadas por el denominador y a partir de cero se cuentan tantas partes como indique el numerador.

Los números racionales se representan en la recta numérica junto a los números enteros.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4

Representemos en la recta numérica los siguientes números racionales:

$\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$

Solución

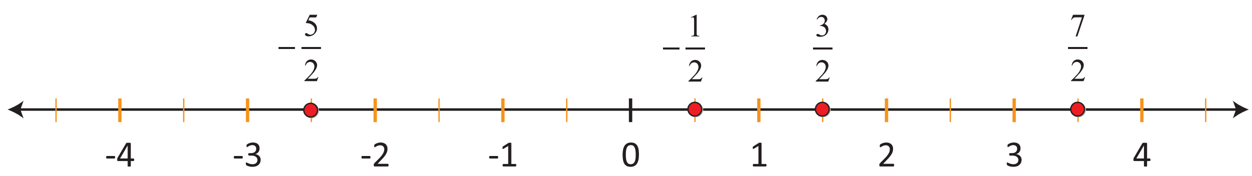
Como todos los números tienen el mismo denominador, dividimos la unidad en dos partes iguales, los números positivos se ubicarán a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero. Por ejemplo:

$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ se ubicará en 1 más $\frac{1}{2}$

$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$ se ubicarán en 3 más $\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ se ubicará a la izquierda del cero

$-\frac{5}{2} = -2 + \frac{1}{2}$ se ubicará a la izquierda del cero, en 2 más $\frac{1}{2}$



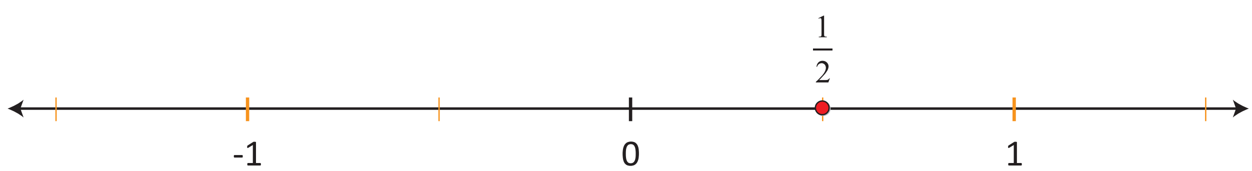
Ejemplo 5

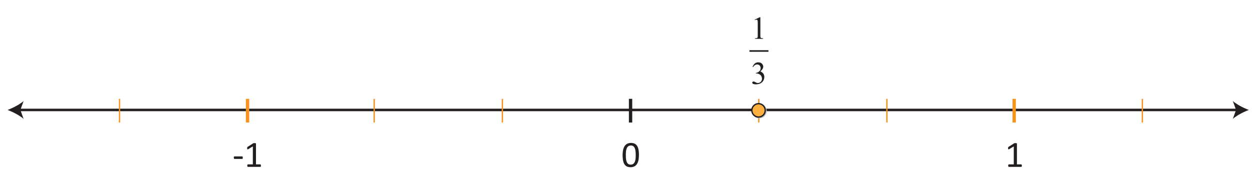
Comparemos números racionales $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$,utilizando la recta numérica.

Solución

Primeramente dividimos la unidad en dos partes iguales y seleccionamos la mitad. Luego dividimos en tres partes iguales y seleccionamos la tercera parte.

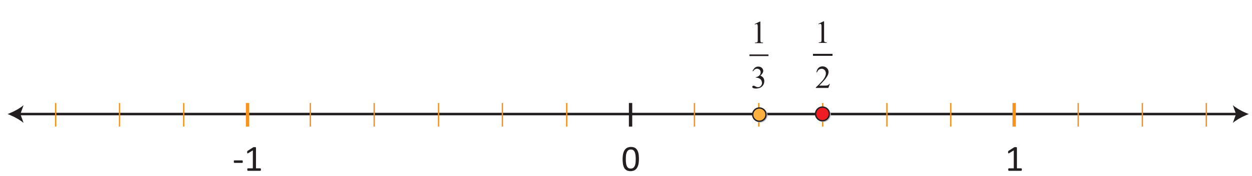
En la recta numérica esto se vería así:





Observamos que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Visto de otra manera, nos quedaría la representación como sigue:



Observemos

De **dos números racionales** que tienen el **mismo denominador** es menor el que tiene menor numerador.

De **dos números racionales** que tienen el **mismo numerador** es menor el que tiene mayor denominador.

De **dos números racionales distintos** es mayor aquella cuyo numerador origina mayor producto cruzado.

Ejemplo 6

Comparemos: $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$

Solución

Como las fracciones son distintas, multiplicamos en cruz: $2 \cdot 8 > 3 \cdot 5$, luego $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$

Ejemplo 7

Comparemos: $\frac{6}{7}$ y $\frac{3}{4}$

Solución

$\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$, ya que $6 \cdot 4 > 7 \cdot 3$

Como ejercicio, averigüemos, ¿Cuál de los siguientes números racionales es el mayor $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ y $\frac{6}{7}$?

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Hallemos los pares de números racionales equivalentes y coloquenlo en parejas:

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{5}{7}$
3. $\frac{8}{3}$
4. $\frac{2}{11}$
5. $\frac{6}{9}$
6. $\frac{16}{6}$
7. $\frac{15}{21}$
8. $\frac{4}{22}$
9. $\frac{2}{3}$
10. $\frac{12}{9}$

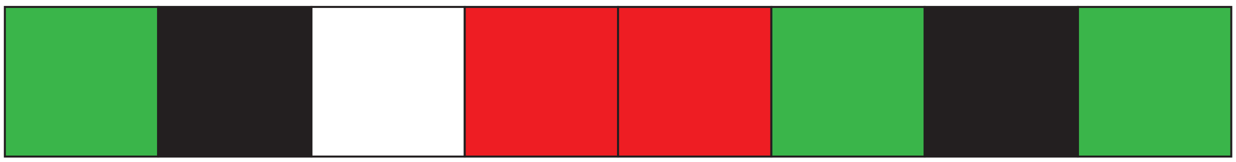
II. Representemos en la recta numérica los siguientes números racionales:

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{8}{3}$
3. $-\frac{2}{3}$
4. $-\frac{7}{3}$

III. Reduzcamos a común denominador los números racionales dados, y luego comparémoslas.

1. $\frac{5}{12}$ y $\frac{7}{18}$
2. $\frac{5}{4}$, 2, $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{3}$
3. $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{4}{15}$
4. $\frac{9}{7}$ y 1
5. $\frac{9}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$

IV. Escribamos V o F en la segunda columna y a la par de la oración para decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones sobre la figura que aparece a continuación. A la par de las afirmaciones falsas escribamos lo correcto:



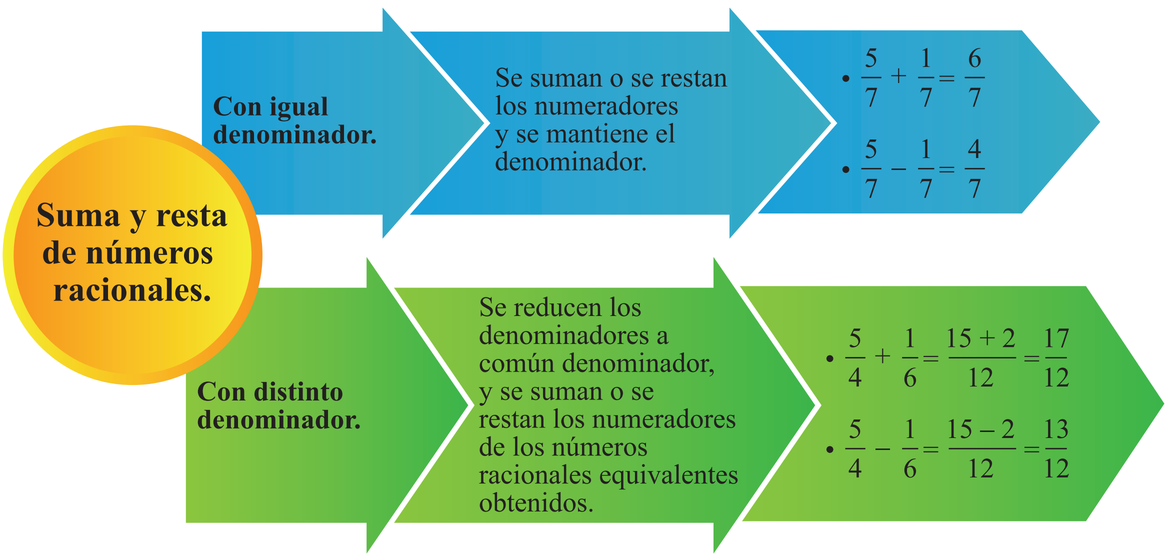
	RESPUESTA	LO CORRECTO
1. La parte coloreada de negro es $\frac{2}{8}$	V	
2. La parte coloreada de verde es $\frac{3}{6}$	F	$\frac{3}{8}$
3. La parte coloreada de rojo es $\frac{2}{4}$		
4. La parte que es blanca es $\frac{1}{6}$		
5. La parte que no es negra es $\frac{5}{8}$		
6. La parte que no está coloreada de rojo es $\frac{6}{8}$		
7. La parte que no está coloreada de verde es $\frac{6}{8}$		
8. La parte que no es blanca es $\frac{7}{8}$		
9. La parte que es negra o blanca es $\frac{3}{4}$		
10. La parte que es verde o roja es $\frac{5}{8}$		

2 Operaciones con números racionales

Indicador de logro

Plantea y resuelve problemas de su vida cotidiana aplicando las operaciones con números racionales.

2.1 Adición y sustracción de números racionales



Para efectuar operaciones con números mixtos se transforman éstos en racionales impropios y posteriormente se realizan las operaciones indicadas con los números racionales.

Para pasar fracciones a común denominador el método más adecuado es el del mínimo común múltiplo de los denominadores, se siguen estos pasos:

1. Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores y se pone de denominador de cada una.
2. Para hallar cada uno de los nuevos numeradores se divide ese número por el denominador de la fracción y se multiplica por su numerador.

Ejemplo 1

a. $5\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}=\frac{(5\cdot 4)+1}{4}+\frac{(1\cdot 6)+1}{6}=\frac{21}{4}+\frac{7}{6}=\frac{63+14}{12}=\frac{77}{12}$

b. $2\frac{2}{3}+3\frac{5}{6}-1\frac{1}{2}=\frac{(2\cdot 3)+2}{3}+\frac{(3\cdot 6)+5}{6}-\frac{(1\cdot 2)+1}{2}=\frac{8}{3}+\frac{23}{6}-\frac{3}{2}=\frac{16+23-9}{6}=\frac{30}{6}=5$

2.2 Problemas de aplicación a nuestro entorno

Ejemplo 2

Como parte del programa "Ayúdame a llegar", que impulsó el Ministerio de Educación (MINED), Milton recibió una de las 5 000 bicicletas que entre abril y mayo se entregaron a estudiantes y docentes de zonas rurales en todo el país. Si él viaja $2\frac{1}{2}$ kilómetros diarios para llegar a su escuela, ¿Cuántos kilómetros recorre Milton cuando en la tarde regresa a su casa?

Solución

Para llegar al colegio recorre $2\frac{1}{2}$ kilómetro y de regreso a su casa recorre nuevamente $2\frac{1}{2}$ kilómetro,

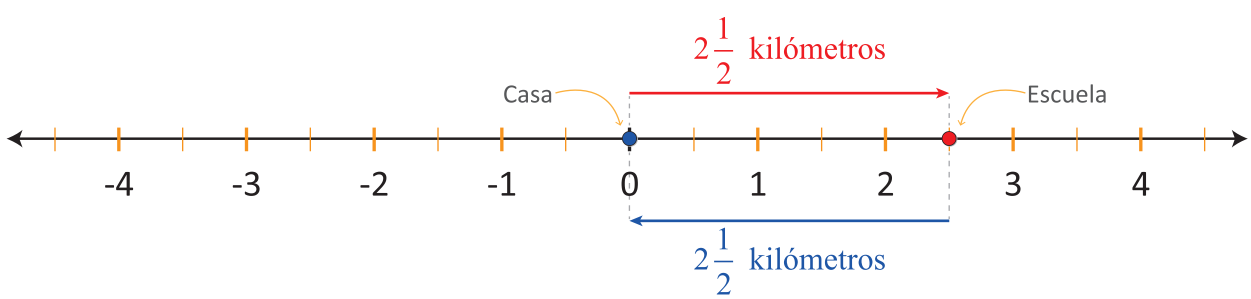
Para sumar las dos distancias recorridas debemos convertir el número racional mixto a racional impropio, para ello calculamos.

$$2\frac{1}{2} = \frac{(2 \cdot 2) + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Entonces la distancia total recorrida será:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{10}{5} = 5 \text{ kilómetros}$$

A continuación se presenta la solución gráficamente:



Ejemplo 3

Un agricultor ha sembrado las $\frac{2}{5}$ partes de un campo de maíz y $\frac{1}{3}$ de frijoles. Si el campo tiene 4 500 m², ¿qué superficie queda sin sembrar?

Solución

La parte sembrada es: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$

Considerando que la unidad corresponde a la superficie total del campo sembrado, la parte sin sembrar será:

$1-\frac{11}{15}=\frac{15-11}{15}=\frac{4}{15}$, lo que equivale a: $\frac{4}{15}$ de $4\ 500=\frac{4}{15}(4\ 500)=\frac{4\cdot 4\ 500}{15}=\frac{18\ 000}{15}=1\ 200\,m^2$

Ejemplo 4

Una Cooperativa tiene 240 miembros. Dos tercios de los miembros cosechan tomates; un cuarto cosechan cebollas y el resto cosechan repollo. ¿Cuántos miembros cosechan repollo?

Solución

Este problema lo podemos resolver de dos maneras:

1. Encontramos a cuantos miembros equivale los $\frac{2}{3}$ de 240, que son los miembros que cultivan tomates. También encontramos los $\frac{1}{4}$ de 240, que son los miembros que cultivan cebollas.

   $\frac{2}{3}\cdot 240=\frac{2\cdot 240}{3}=\frac{480}{3}=160$ miembros cultivan tomates.

   $\frac{1}{4}\cdot 240=\frac{1\cdot 240}{4}=\frac{240}{4}=60$ miembros cultivan cebollas.

   Los miembros que cultivan repollo serán: 240 − (160 + 60) = 240 − 220 = 20 miembros.

2. Encontramos la suma de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$, para ello buscamos el MCM.

   $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$, luego encontramos la diferencia de la unidad $1-\frac{11}{12}=\frac{12-11}{12}=\frac{1}{12}$ y ahora encontramos $\frac{1}{12}\cdot 240=\frac{1\cdot 240}{12}=\frac{240}{12}=20$

   Conclusión: De los 240 miembros de la cooperativa solamente 20 miembros cosechan repollos.

Ejemplo 5

Un grupo de los miembros de la Cooperativa decidieron ir al área de cultivo para apoyar en la recolección del café. De las 210 latas que se cortaron en esa visita $\frac{2}{3}$ la cortaron los varones. ¿Cuántos latas de café cortaron las mujeres?

Solución

Analizamos que el total de latas corresponde a la unidad. Si los hombres cortaron los $\frac{2}{3}$ del total, las mujeres cortaron:

$1-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$ Lo que equivales a $\frac{1}{3}\cdot 210=\frac{1\cdot 210}{3}=\frac{210}{3}=70$ latas de café cortaron las mujeres.

Ejemplo 6

Los $\frac{2}{5}$ de los ingresos de una cooperativa se emplea en combustible, $\frac{1}{8}$ se emplea en electricidad, $\frac{1}{12}$ en la recogida de basura, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento y el resto se emplea en limpieza. ¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?

Solución

Lo que se gasta en combustible, electricidad, basura y mantenimiento es:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{48+15+10+30}{120}=\frac{103}{120}$$

Lo que gasta en limpieza será $1-\frac{103}{120}=\frac{120-103}{120}=\frac{17}{120}$ de los ingresos.

Ejemplo 7

Un grupo de estudiantes realizan labores de campo en tres momentos. Primero realizan $\frac{1}{3}$ del trabajo, en el segundo momento $\frac{1}{4}$ del trabajo. ¿Qué fracción del trabajo realizaron en el tercer momento? Si trabajaron en 6 manzanas de terreno recogiendo papas, ¿cuánto trabajo hicieron en cada momento?

Solución

En el tercer momento los estudiantes realizan:

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{4+3}{12}\right)=1-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12} \text{ del trabajo.}$$

En el primer momento trabajan $\frac{1}{3}$ de las 6 manzanas, lo que equivale a:

$$\frac{1}{3}(6) = \frac{1\cdot 6}{3}=\frac{6}{3}=2 \text{ manzanas.}$$

En el segundo momento trabajan $\frac{1}{4}$ de las 6 manzanas, lo que equivale a:

$$\frac{1}{4}(6) = \frac{1\cdot 6}{4}=\frac{6}{4}=1{,}5 \text{ manzanas.}$$

En el tercer momento trabajan $\frac{5}{12}$ de las 6 manzanas, lo que equivale a:

$$\frac{5}{12}(6) = \frac{5\cdot 6}{12}=\frac{30}{12}=2{,}5 \text{ manzanas.}$$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=$
2. $\frac{10}{7}-\frac{2}{7}=$
3. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=$
4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=$
5. $\frac{3}{2}-\frac{1}{5}=$
6. $\frac{7}{3}-\frac{11}{2}+\frac{1}{4}=$

II. Leamos y resolvamos correctamente los siguientes problemas de aplicación.

1. Me toca en herencia $\frac{2}{3}$ de una finca y compro $\frac{1}{4}$ de ella. ¿De qué fracción soy dueño?
2. En un pinar de 210 pinos se talaron sus $\frac{3}{5}$ partes, poco después hubo un incendio, en el que se quemaron los $\frac{5}{7}$ de los pinos que quedaban. ¿Cuántos pinos sobrevivieron?
3. Un depósito contiene 150 litros de agua. Se consumen los $\frac{2}{5}$ de su contenido. ¿Cuántos litros de agua quedan?
4. Elena va de compras con C$1 800. Se gasta $\frac{3}{5}$ de esa cantidad. ¿Cuánto dinero gastó y cuánto le quedó?

2.3 Multiplicación y División de números racionales.

Multiplicación

La multiplicación de dos números racionales es otro número racional que tiene: por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Este procedimiento se utiliza para más de dos factores.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}$$

División

Se multiplican el numerador del primer número por el denominador del segundo número y el resultado se pone como numerador.

Se multiplica el denominador del primer número por el numerador del segundo número y el resultado se pone como denominador.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

Para los números racionales se cumplen las mismas leyes de los signos que para los números enteros, es decir:

1

- El producto de dos números racionales de igual signo es positivo.

+ · + = +

- · - = +

2

- El producto de dos números racionales de signos diferentes es negativo.

- · + = -

+ · - = -

1

- El cociente de dos números racionales de igual signo es positivo.

+ ÷ + = +

- ÷ - = +

2

- El cociente de dos números racionales de diferente signo es negativo.

- ÷ + = -

+ ÷ - = -

Analicemos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Multipliquemos los siguientes números racionales.

1. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 7} = -\frac{2}{28} = -\frac{1}{14}$
3. $\left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 3} = -\frac{8}{27}$

Ahora, resolvamos problemas, pero antes tengamos siempre presente que:

Un problema muy importante en donde siempre aplicaremos la multiplicación de números racionales, es aquel en el que se pide hallar, el número racional de una cadena de racionales, es decir si se plantean problema como: hallar los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{8}{9}$ de los $\frac{3}{4}$, siempre, y no lo olvidemos nunca, debemos aplicar el producto de dichos números racionales. En este caso:
$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3}{3 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{4}{9}$ ya simplificada.

2.4 Problemas de aplicación

Ejemplo 1

He consumido $\frac{3}{4}$ de la cosecha de frijoles del año pasado. La mitad corresponde al consumo de la casa. ¿Qué parte de mi cosecha corresponde el consumo de la casa?

Solución

Para este caso tenemos que calcular la mitad de los $\frac{3}{4}$.

Es decir, $\frac{1}{2} \text{de} \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

Conclusión: Los $\frac{3}{8}$ de mi cosecha son para el consumo de la casa.

Ejemplo 2

4. Gracias al modelo de alianza que trabaja el Gobierno Sandinista con los gobiernos locales el parque de la niñez feliz es para que los niños y niñas puedan restituir sus derechos a la recreación. El año pasado, en Estelí, 31 juegos fueron instalados en un terreno. Las $\frac{3}{4}$ partes del terreno corresponden a zona verde y de éstas se ocuparon $\frac{2}{3}$ para la instalación de los juegos, ¿Qué espacio ocupó la zona de juegos?

Solución

La zona de juego ocupó:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ La zona de juego ocupó la mitad de la zona verde.

Veamos algunos ejemplos de **división de números racionales**:

Ejemplo 1

Dividamos $\frac{5}{7}$ entre $\frac{2}{3}$

$\frac{5}{7} \surd \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14}$

Ejemplo 2

Dividamos $\frac{1}{2}$ entre $-\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2} \surd \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

Ejemplo 3

Dividamos $-\frac{1}{8}$ entre $-\frac{1}{4}$

$$\left(-\frac{1}{8}\right) \surd \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1 \cdot 4}{8 \cdot 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Problemas de aplicación

Ejemplo 1

5. Jacinto fue a la ferretería a comprar 3 galones de pintura que le hacían falta para pintar unos postes, pero sólo encontró pintura de $\frac{1}{4}$ de galón. El quiere saber cuántos cuartos de pintura debe comprar para completar los 3 galones que le hacen falta.

Solución

El necesita saber cuántos $\frac{1}{4}$ de galón hay en 3 galones, lo cual se puede expresar como una división, así:

Recordemos que en un galón hay cuatro cuartos de pintura, entonces

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	= 1 galón
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	= 1 galón
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	= 1 galón

$$3 \div \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 12$$

Importante

Cuando se da el caso de división entre tres números racionales, se debe indicar cuál de los pares de números se resuelve primero (encerrándolo entre paréntesis).

$\left(\frac{1}{2} \surd \frac{3}{4}\right) \surd \frac{3}{2}$ no dará el mismo resultado que $\frac{1}{2} \surd \left(\frac{3}{4} \surd \frac{3}{2}\right)$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Calcular

1. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$
2. $\frac{4}{7}+1$
3. $\frac{3}{11}-2$
4. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$
5. $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}$
6. $\frac{7}{10}-\frac{2}{15}$
7. $\frac{7}{6}-\frac{3}{8}$
8. $\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{7}$
9. $\frac{8}{11}\cdot\frac{3}{4}$
10. $\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{14}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$
11. $\frac{3}{5}\surd\left(-\frac{7}{10}\right)$
12. $\frac{1}{9}\surd\frac{5}{8}$
13. $\frac{8}{9}\surd\frac{4}{8}$
14. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

II. Leamos y resolvamos correctamente los siguientes problemas.

1. El silo para almacenar frijoles tiene capacidad de 12 quintales o 60 medios, si tiene lleno $\frac{2}{3}$. ¿Cuantos quintales o medios tienen hasta el momento?

2. Queremos envasar 60 litros de miel de Jicote en botellas $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas se necesitaran?

3. Se han destinado $\frac{2}{3}$ de la superficie de una finca para sembrar frijoles. Por problemas de plagas se han dejado de cultivar $\frac{1}{6}$ de la superficie que se iba a cultivar. ¿Qué fracción de la finca se ha utilizado para sembrar frijoles?

4. Un padre al finalizar la cosecha de primera reparte entre sus hijos 1 800 Córdobas, por haberle ayudado y por su buen comportamiento. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esa cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

2.5 Propiedades en las operaciones con números racionales.

PROPIEDADES DE LA SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES				
	Conmutativa	**Asociativa**	**Neutro**	**Distributiva**
SUMA	Si se cambia el orden de los sumandos, la suma no varía: $a + b = b + a$ Ejemplo: $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$	Los sumandos se pueden agrupar de diferentes formas sin que varíe el resultado: $(a + b) + c = a + (b + c)$ Ejemplo: $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{2}=\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\right)=\frac{41}{12}$	El 0 es el elemento neutro de la suma, ya que al sumarlo el resultado no varía. $0+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$	El producto de un número por la suma es la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Ejemplo: $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)$
	Conmutativa	**Asociativa**	**Identidad**	
MULTIPLICACIÓN	Si se cambia el orden de factores, el producto no varía: $a \cdot b = b \cdot a$ Ejemplo: $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	Los factores se pueden agrupar de diferentes formas sin que varíe el resultado: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Ejemplo: $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$	El 1 es el elemento identidad de la multiplicación, ya que al multiplicarlo el resultado no varía. $1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$	

3 Representación decimal de un número racional

Indicador de logro

Plantea y resuelve problemas de su vida cotidiana aplicando notación científica, las operaciones con números racionales y sus propiedades.

No siempre es práctico expresar algunas magnitudes utilizando la simbología del cociente que hemos venido utilizando en los temas anteriores $\frac{a}{b}$

En algún momento de nuestra vida hemos visitado el centro de salud de nuestra comunidad y al pasar consulta la enfermera lo primero que hace es medir la altura y el peso.

Cuando Karina visita el centro de salud le dicen que su talla es de 1,55 cm; al recordar que el año pasado su talla era de 1,35 cm. ¿Cuántos centímetros ha crecido?

En este caso estamos utilizando los números decimales, los cuales son una manera particular de escribir los números racionales como resultado de un cociente inexacto

Los números decimales son la expresión de números no enteros, que a diferencia de los números racionales fraccionarios, no se escriben como el cociente de dos números enteros sino como una aproximación de tal valor.

En nuestra vida cotidiana estamos rodeados de números decimales.

Muchas veces hemos oído las siguientes expresiones:

- Tienes unas décimas de fiebre.
- Quiero un vigésimo de lotería para el próximo sorteo.
- La gasolina ha subido cuatro décimas este último mes.
- Un deportista tarda 10 segundos y 45 centésimas.

Cada número decimal tiene una parte entera y una parte decimal que va separada por una coma.

La parte decimal se ubica al lado derecho de la coma. En la recta numérica, esta parte estaría ubicada entre el cero y el uno, mientras que la parte entera se la escribe en la parte izquierda de la coma. En el caso de que un número decimal no posea una parte entera, se procede a escribir un cero al lado izquierdo o delante de la coma. Aquí varios ejemplos para ilustrar estos casos:

7,65 0,25 3,75 → Las cifras en rojo indican la parte entera.

Los números racionales que tienen por denominador la unidad seguida de ceros se llaman números racionales decimales.

Si el denominador es diez, el número se lee nombrando el numerador seguido de la palabra décimos o décimas.

Ejemplo $\frac{4}{10}$ se lee: cuatro décimos.

Si el denominador es cien, el número se lee nombrando el numerador seguido de la palabra centésimos o centésimas.

Ejemplo $\frac{6}{100}$ se lee: seis centésimas.

3.1 Representación decimal de los números racionales.

¿Cómo se escribe un número racional decimal en forma de número decimal?

Se escribe sólo el numerador y se separan con una coma, a partir de la derecha, tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.

$\frac{2}{10} = 0,2$ $\frac{5}{10} = 0,5$ $\frac{25}{100} = 2,5$ $\frac{243}{1000} = 0,243$

Significado geométrico del número racional decimal

Si dividimos la unidad en 10 partes iguales, cada parte es una décima y escribimos $\frac{1}{10}$ ó 0,1

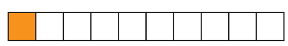
1 unidad = 10 décimas

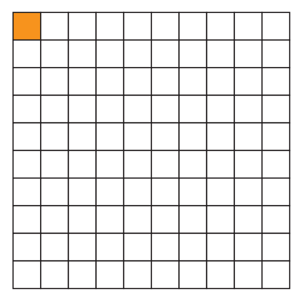
1 décima es $\frac{1}{10} = 0,1$

Si dividimos la unidad en 100 partes iguales, cada parte es una centésima y escribimos $\frac{1}{100}$ ó 0,01

1 unidad = 100 centésimas

1 centésima es $\frac{1}{100} = 0,01$

$\frac{1}{10}$ 

$\frac{1}{100}$ 

Un elemento interesante que debemos tener presente en la escritura y lectura de los números decimales es su valor posicional o el orden de sus cifras enteras y decimales.

Parte entera			Parte decimal			
Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima	Diezmilésima

Cada diez unidades de un orden forman una unidad del orden inmediatamente superior. Por tanto, una unidad serán 10 décimas; 1 décima son 10 centésimas, y así sucesivamente.

Para leer un número decimal:

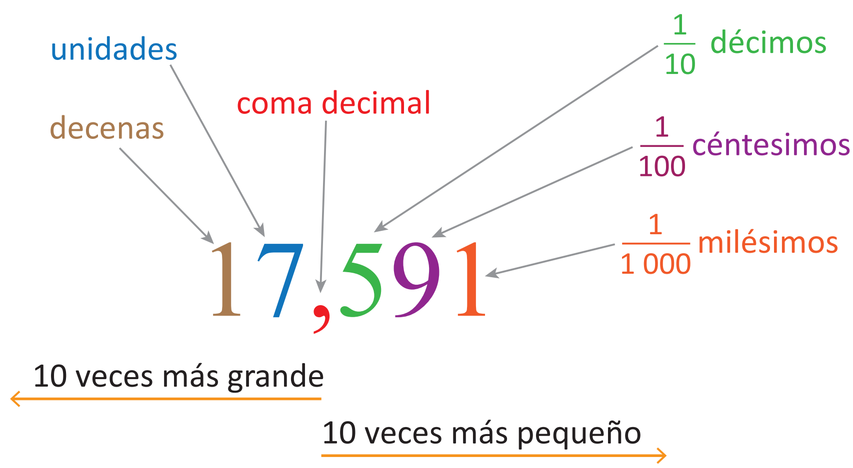
Se lee primero la parte entera, seguida de la palabra "unidades" o "enteros" y después se lee la parte decimal acabando con el nombre del lugar que corresponde a la última cifra decimal.

Ejemplo

20,55 se lee veinte unidades y cincuenta y cinco centésimas.

0,048 se lee cuarenta y ocho milésimas.

0,0437 se lee cuatrocientos treinta y siete diezmilésimas.



¿Cómo se escribe un número racional fraccionario en forma de número decimal?

Ya hemos visto cómo se escribe un racional decimal en forma de número decimal.

Ahora vamos a ver cómo expresar un número racional fraccionario cualquiera, por ejemplo, $\frac{10}{4}$ en forma de número decimal. Para ello dividimos el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline -8 & 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, ponemos una coma en el cociente y añadimos un cero al resto o residuo y continuamos dividiendo.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 20 & 2,5 \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Y como el residuo es cero, ya no continuamos dividiendo.

De donde $\frac{10}{4} = 2,5$

Para escribir un número racional fraccionario en forma decimal se divide el numerador entre el denominador. Si la división no es exacta, se pone una coma en el cociente y se van añadiendo ceros al resto.

Expresión decimal de un número racional

Ya vimos que, un número racional representado por una fracción se puede escribir también en forma de número decimal efectuando la división.

Existen cuatro tipos de números decimales.

Decimal exacto, tiene un número finito de cifras decimales.

Ejemplo $\frac{4}{8}=0,5$ $-\frac{10}{8}=-1,25$

Decimal periódico, tiene infinitas cifras decimales con repetición periódica.

Ejemplo $\frac{1}{3}=0,3333=0.\overline{3}$ $\frac{36}{11}=3,272727=3,\overline{27}$

Entero, cuando el cociente no tiene parte decimal.

Ejemplo $\frac{32}{8}=4$

Decimal periódico mixto, cuando la parte que se repite no comienza desde la coma.

Ejemplo $\frac{13}{6}=2,16666=2,1\overline{6}$

Analicemos a continuación los procedimientos para convertir números decimales a números racionales fraccionarios.

3.2 Conversión de decimales a fracciones comunes

a. Decimal exacto a fracción.

Se escribe en el numerador el número sin la coma de los decimales y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay y en el número.

Ejemplos $1,4=\frac{14}{10}$; $1,25=\frac{125}{100}$; $0,75=\frac{75}{100}$

b. Decimal periódico puro a fracción.

Se escribe una fracción cuyo numerador es la diferencia entre el número decimal, prescindiendo de la coma y su parte entera y el denominador se compone de tantos 9 como cifras tenga el período.

Ejemplos Convirtamos 2,315315315…= 2,315 a fracción ordinaria.

En este caso tenemos un decimal con período de tres cifras (315)

Por lo que el numerador de la fracción será 2315 - 2 = 2313

Como tenemos tres cifras en el período debemos escribir en el denominador 999

La fracción quedará ya simplificada

$$2,315315315=\frac{2\,313}{999}=\frac{257}{111}$$

c. Decimal periódico mixto a fracción.

Se escribe una fracción cuyo numerador es la diferencia entre el número decimal, prescindiendo de la coma y su parte entera acompañada de la no periódica y el denominador se compone de tantos 9 como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejemplo Convirtamos 1,7454545…= 1,745 a fracción ordinaria

En este caso tenemos un decimal con período de dos cifras (45) y una parte no periódica compuesta por una sola cifra (7)

Por lo que el numerador de la fracción será 1 745 - 17 = 1 728

Como tenemos dos cifras en el período debemos escribir en el denominador 99 seguida de un cero que es el número de cifras de la parte no periódica, es decir debemos escribir 990

La fracción quedará ya simplificada

$$1,7454545 = \frac{1\,728}{990} = \frac{192}{110} = \frac{96}{55}$$

Analicemos otro ejemplo: Convirtamos 0,24242…= 0,242 a fracción ordinaria

En este caso tenemos un decimal con período de dos cifras (42) y una parte no periódica compuesta por una sola cifra (2)

Por lo que el numerador de la fracción será 242 - 2 = 240

Como tenemos dos cifras en el período debemos escribir en el denominador 99 seguida de un cero que es el número de cifras de la parte no periódica, es decir demos escribir 990

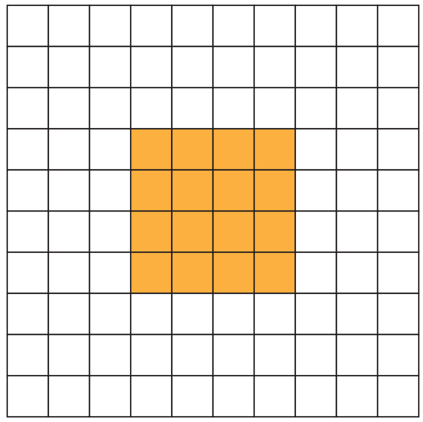
La fracción quedará ya simplificada

$$0,24242 = \frac{240}{990} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. De acuerdo con la siguiente figura, completemos cada situación que se pide



   a. Número de partes en que se ha dividido la unidad: ______________________________

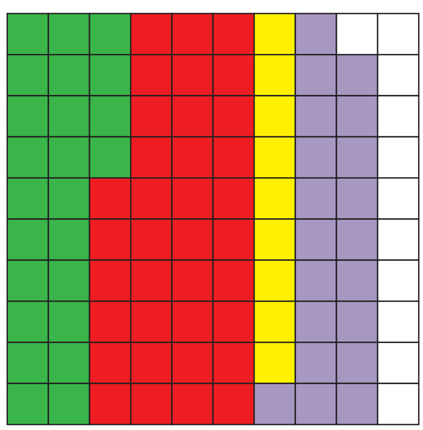
   b. Número de partes que hemos coloreado: ______________________________

   c. Expresa como racional fraccionario la parte coloreada: ______________________________

   d. Expresa la parte coloreada como número decimal:______________________________

   e. Expresa el número decimal como porcentaje: ______________________________

2. De acuerdo a la figura, expresemos cada región coloreada(verde, rojo, amarillo, morado y blanco en racional fraccionario, en decimal y en porcentaje.



3. Ordenemos de menor a mayor los siguientes números decimales:

   a. 5,4; 5,004; 5,0004; 5,04; 4,4; 4,98; 5,01; 5,024

   b. 7,3; 7,003; 7,0003; 7,03; 6,5; 6,87; 7,05; 7, 037

4. Convierta a fracción los siguientes números decimales. Recordemos la regla para cada tipo de número decimal.

   a. 0,0051　　　b. 0,051　　　c. 0,051

5. Escribamos la expresión decimal de los siguientes números racionales fraccionarios.

No. Racional	Decimal	No. Racional	Decimal
$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{6}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{7}$	
$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{7}$	
$\frac{4}{6}$		$\frac{2}{4}$	
$\frac{2}{7}$		$\frac{5}{8}$	

6. Calcula las expresiones decimales de las siguientes fracciones, y luego completa la tabla, distinguiendo las exactas de las periódicas.

Forma Fraccionaria	Forma decimal	Decimal exacto	Decimal periódico	Decimal periódico mixto
$\frac{9}{5}$				
$\frac{7}{8}$				
$\frac{23}{12}$				
$\frac{98}{175}$				
$\frac{17}{2}$				
$\frac{500}{64}$				
$\frac{17}{10}$	1,7	si	no	no

3.3 Operaciones con números decimales.

Las operaciones con números decimales en la práctica son las que más utilizamos en nuestro quehacer diario. Por lo general los precios de los productos están variando en decimales, el pago del consumo de energía eléctrica, de agua, las medidas de longitudes, de peso entre otros.

Los decimales por muy pequeñas que parezcan, en términos de dinero, medidas de longitudes, exámenes médicos, la toma de la temperatura, tienen un valor importante.

Suma y resta de números decimales.

a. Se colocan en columnas haciendo corresponder las comas.

b. Se rellenan con ceros los espacios, recordando las equivalencias de números decimales.

c. Se suman (o se restan) unidades con unidades, décimas con décimas, centésimas con centésimas o las que puedan aparecer en el número decimal.

Ejemplos

a. 342,528 + 6 726,34 + 5,3026 + 0,37 = 7 074,5406

		3	4	2	5	2	8	0
	6	7	2	6	3	4	0	0
				5	3	0	2	6
+				0	3	7	0	0
	7	0	7	4	5	4	0	6

La línea roja separa la parte entera de la decimal y ocupa la posición de la coma decimal

b. 372,528 – 69,68452 = 302,84348

	3	7	2	5	2	8	0	0
-		6	9	6	8	4	5	2
	3	0	2	8	4	3	4	8

Recordemos y apliquemos las equivalencias:

0,1 = 0,10 = 0,100 = 0,1000…

Algunos problemas con operaciones de suma y resta de números decimales.

Ejemplo 1

a. Esmeralda compra en la pulpería 5 libras de azúcar por 47,50 córdobas, 3 libras de arroz por 39 córdobas, 3 tacos de jabón por 47,25, y un litro de aceite de cocinar por 38,50 córdobas. Si Esmeralda paga con un billete de 500 córdobas, ¿Cuánto le darán de vuelto?

Solución

Primero sumamos el costo de cada artículo.

		4	7	5	
		3	9	0	0
		4	7	2	5
+		3	8	5	0
	1	7	2	2	5

Ha pagado C$ 172,25.

Ahora restamos esta cantidad a los 500 córdobas.

	5	0	0	0	0
-	1	7	2	2	5
	3	2	7	7	5

C$ 327,75 será el vuelto que le darán a Esmeralda.

Ejemplo 2

b. De un depósito con agua se sacan 184,5 l, después 128,75 l y finalmente se sacan 84,5 l. Al final quedan en el depósito 160 l. ¿Qué cantidad de agua había el depósito?.

Solución

Primero encontremos la cantidad de agua que se sacó del depósito. Para ello sumemos.

	1	8	4	5	0
	1	2	8	7	5
+		8	4	5	0
	3	9	7	7	5

Se sacaron 387,75 litros de agua.

Ahora encontremos la cantidad total de agua, sumando los 160 litros que quedaron

$$\begin{array}{crrr|rr} & 3 & 9 & 7 & 7 & 5 \\ + & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 \end{array}$$

En el depósito había 557,75 litros de agua.

Observación: Este mismo resultado obtenemos si con una sola operación, sumamos todas las cantidades de agua que se sacaron y la cantidad que quedó en el depósito.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Sumemos los siguientes números decimales.

1. 0,7 + 0,96 = ______
2. 0,2 + 0,8 = ______
3. 0,345 + 1,1 = ______
4. 1,1 + 1,3 = ______
5. 0,6 + 1,63 = ______
6. 1,98 + 2,567 = ______
7. 0,363 + 0,1 = ______
8. 0,30 +0,57 = ______
9. 0,20 + 0,064 = ______
10. 0,12 + 0,109 = ______

II. Restemos los siguientes números decimales.

1. 83,687 – 43,399
2. 90,3 – 88,2

3.4 Multiplicación de números decimales.

Para multiplicar números decimales se aplica la siguiente regla:

a. Se multiplican como si fueran números enteros.

b. El resultado final es un número decimal cuyo número de decimales es igual a la suma del número de decimales de los dos factores.

Ejemplos

a. Multiplicar 46,562 por 38,6

```
    46,562
  ·   38,6
 ---------
    279372
   372496
  139686
 ---------
 1 797,2932
```

b. Multiplicar 5,18 por 2,6

```
   5,18
 ·  2,6
 ------
   3108
  1036
 ------
 13,468
```

Multiplicación por la unidad seguida de ceros.

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad

(1,236)(10)=12,36.

(1,236)(100)=123,6.

(234,5)(1 000)=234 500.

(12 457,9)(10 000)=124 579 000.

3.5 Problemas de aplicación a su entorno.

Ejemplo 1

1. Pablo va a la pulpería a comprar una serie de productos. Tiene C$ 300 y efectúa las siguientes compras.

   a. 2,5 libras de azúcar que valen 9,5 córdobas a libra, 2 bolsas de pan a 12 córdobas cada una.

   b. 1,5 libras de cuajada que valen 50 córdobas la libra, 12 caramelos a 0,50 de córdoba.

Calcula cuánto le ha costado la compra. Al pagar en caja, lo hace con un billete de 200 córdobas ¿cuánto dinero le ha sobrado?

Solución

Primero calculemos lo que vale cada producto.

Azúcar:

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \cdot\ 9{,}5 \\ \hline 125 \\ 225 \\ \hline 23{,}75 \end{array}$$

Pan:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot\ \ 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

Cuajada:

$$\begin{array}{r} 1{,}5 \\ \cdot\ 50 \\ \hline 75{,}0 \end{array}$$

Caramelos:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot\ 0{,}50 \\ \hline 6{,}00 \end{array}$$

Ahora calculamos el total de la compra, para ello sumamos:

$$\begin{array}{ccc|cc} & 2 & 3 & 7 & 5 \\ & 2 & 4 & 0 & 0 \\ & 7 & 5 & 0 & 0 \\ + & & 6 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 8 & 7 & 5 \end{array}$$

El total de la compra es de C$ 128,75 córdobas.

Si pagó con un billete de C$ 200, restamos:

$$\begin{array}{cccc|cc} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 \\ \hline & 0 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

Conclusión: Le han sobrado 71,25 córdobas.

Ejemplo 2

2. Una cooperativa de mujeres cultiva plantas medicinales y venden su producción directamente a las Farmacias de Medicina Natural. El lunes le solicitaron 83 libras de Manzanilla, 155 libras de chía y 100 libras de linaza. Si la libra de manzanilla vale C$ 50,75; la libra de chía C$ 81,50 y la libra de linaza a C$ 75. ¿Cuánto dinero recibieron por el pago de los productos?

Solución

Encontremos el precio de cada producto:

Manzanilla:

$$\begin{array}{r} 83 \\ \cdot\ 50{,}75 \\ \hline 415 \\ 581 \\ 0000 \\ 415 \\ \hline 4\ 212{,}25 \end{array}$$

Chía:

$$\begin{array}{r} 155 \\ \cdot\ \ 81{,}5 \\ \hline 775 \\ 155 \\ 1\ 240 \\ \hline 12\ 632{,}5 \end{array}$$

Linaza:

$$\begin{array}{r} 100 \\ \cdot\ \ 75 \\ \hline 7\ 500 \end{array}$$

El dinero recibido será la suma:

		4	2	1	2	2	5
	1	2	6	3	2	5	0
+		7	5	0	0	0	0
	2	4	3	4	4	7	5

El total recibido por la venta de los productos fue de C$ 24 344,75.

Ejemplo 3

3. Sabiendo que con un buen invierno, una manzana cultivada de maíz produce aproximadamente 40 quintales y cada quintal tiene un valor de C$ 350. ¿Cuánto dinero recibirán los miembros de una cooperativa si siembran 175,50 manzanas?

Solución

Calculemos la cantidad de quintales que se producen en las 350 manzanas sembradas:

$$\begin{array}{r} 175{,}5 \\ \cdot\ \ 40 \\ \hline 7\ 020{,}0 \end{array}$$

Se cosechan 7 020 quintales de maíz.

Calculemos, ahora cuánto recibirán los miembros por la venta de estos quintales de maíz:

$$\begin{array}{r} 7\ 020 \\ \cdot\ \ 350 \\ \hline 0000 \\ 35100 \\ 21060 \\ \hline 2\ 457\ 000 \end{array}$$

Conclusión: Los miembros recibirán por la venta del maíz C$ 2 457 000.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Efectuemos las siguientes multiplicaciones.

1. 56,7 · 572 =
2. 826 · 6,39 =
3. 9,36 · 27,3 =
4. 125,75 · 12,6 =

II. Leamos detenidamente y resolvamos

1. Cada rueda de mi bicicleta, recorre en una vuelta 1,8 metros. ¿Cual será la longitud recorrida en 3 540 vueltas?
2. ¿Cuánto costará cercar una huerta, cuyo contorno mide 175 metros, ¿sabiendo que el metro de alambre cuesta 7,75 córdobas, y se dan en total 6 vueltas?
3. Un obrero gana 12,50 córdobas la hora. ¿Cuánto habrá ganado en 15 días, si trabajó 7 horas cada día?

3.6 División de decimales y sus variantes.

La división es de gran importancia cuando de repartir se trata.

Dividir significa repartir en partes iguales, también se puede decir que dividir es la operación inversa de la multiplicación.

De acuerdo con la anterior definición, podemos decir que dividir un número (dividendo) entre otro (divisor) es hallar un número (cociente) que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

Dividendo	Divisor
Residuo	Cociente

Analizaremos tres formas diferentes que se pueden presentar cuando tenemos que dividir números decimales.

Sólo el dividendo es decimal	Sólo el divisor es decimal	El dividendo y el divisor son decimales
Se efectúa la división de números decimales como si de números enteros se tratara. Cuando bajemos la primera cifra decimal, colocamos una coma en el cociente y continuamos dividiendo. Ejemplo: 526,6562 ÷ 7 = 75,2366 526,6562 | 7 36 75,2366 16 25 46 42 0	Quitamos la coma del divisor y añadimos al dividendo tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. A continuación dividimos como si fueran números enteros. Ejemplo: 5126 ÷ 62,37 = 82,18 512600 | 62,37 13640 82,18 11660 54230 4334	Se iguala el número de cifras decimales del dividendo y del divisor, añadiendo a aquel que tenga menos decimales, tantos ceros como cifras decimales de diferencia haya. A continuación se prescinde de la coma, y dividimos como si fueran números enteros. Ejemplo: 5627,64 ÷ 67,5261 = 83,34 5627,6400 | 67,5261 2255520 83,34 2297370 2715870 14826

División por la unidad seguida de ceros.

Para calcular el resultado:

1. Primero escribimos en el resultado el dividendo.
2. Luego en el resultado desplazaremos la coma hacia la izquierda tantas posiciones como ceros lleve el divisor.

Ejemplos

a. 147 ÷ 100 = 1,47

b. 25,6 ÷1 000 = 0,0256

c. 879 ÷ 10 = 87,9

3.7 Problemas de aplicación a su entorno.

Ejemplo 1

1. Tres maestras decidieron elaborar un mural en conmemoración del Día Internacional del Medio Ambiente, para forrar el mural compraron 5,7 m de papel craft para sus estudiantes. Ellas se dividieron en partes iguales el papel que compraron. ¿Qué cantidad de papel le tocó a cada una de las maestras?

Solución

Como esta es una repartición en partes iguales, debemos hacer una división

$$\begin{array}{l|l} 5{,}5 & 3 \\ \cline{2-2} 2\ 5 & 1{,}83 \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 1 & \end{array}$$

Conclusión: A cada maestra le corresponde 1,83 m de papel.

Ejemplo 2

2. A la hora de receso Javier comparte con sus compañeros y compra 3 refrescos de naranjas a C$ 3,50 cada uno y 2 bocadillos iguales. Para pagar ha entregado un billete de C$ 20,00 y 4 monedas de 50 centavos. ¿Cuánto le ha costado cada bocadillo?

Solución

Calculemos cuánto gastó en los refrescos. Para eso debemos multiplicar lo que cuesta cada refresco por el total de refrescos:

$$\begin{array}{r} 3{,}50 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 10{,}50 \end{array}$$

Para saber cuánto cuestan los bocadillos debemos restar el pago total de Javier menos lo que pagó por el refresco:

El pago total es la suma de los C$20,00 y las cuatro monedas de 50 centavos.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \cdot\ 0{,}50 \\ \hline 2{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20{,}00 \\ +\ \ 2{,}00 \\ \hline 22{,}00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22{,}00 \\ -\ 10{,}50 \\ \hline 9{,}50 \end{array}$$

Por los dos bocadillos paga C$ 9,50. Para saber cuanto paga por cada uno debemos dividir por 2

$$\begin{array}{l|l} 9{,}5 & 2 \\ \cline{2-2} 1\ 5 & 4{,}75 \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Conclusión: Cada bocadillo cuesta C$ 4,75

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. Efectuemos las siguientes divisiones tomando en cuenta las diferentes formas que se pueden presentar.

a. 203,45 ÷ 24	b. 1 450,26 ÷ 12	c. 10 367,21 ÷ 82
d. 689 ÷ 2,4	e. 1 453 326 ÷ 12,4	f. 34 821 ÷ 8,2
g. 65,9 ÷ 42,4	h. 892,14 ÷ 1,2	i. 3,6721 ÷ 80,2

2. Leamos detenidamente y resolvamos correctamente:

   a. Alfredo necesita cortar una tabla de 5,5 m de largo en 4 partes iguales. ¿Cuánto debe medir de largo cada pedazo de tabla?

   b. Eloísa tiene 15,75 metros de cinta para hacer el borde de unos vestidos para el desfile del 14 de Septiembre, no quiere desperdiciar ni un centímetro de la cinta y la debe dividir entre 12. ¿Cuánto le tocara a cada uno?

   c. Juan tiene 22,5 libras de abono para plantas. Él va a abonar equitativamente 6 árboles de mango. ¿Cuánta libras abonara a cada árbol?

3.8 Notación Científica.

La notación científica nos ayuda a poder expresar de forma más sencilla aquellas cantidades numéricas que son demasiado grandes o por el contrario, demasiado pequeñas.

Se conoce también como Notación Exponencial y puede definirse como el Producto de un número que se encuentra en el intervalo comprendido del1 al 10, multiplicándose por la potencia de 10.

Ejemplo, tenemos la siguiente cantidad: 139 000 000 000 cm.

Ahora lo llevamos a la mínima expresión y tenemos como respuesta: $1{,}39 \cdot 10^{11}$ cm

¿Cómo lo llevamos a la mínima expresión?

1. Primero, empezaremos a contar los espacios que separan a cada número de derecha a izquierda, hasta llegar al último número entero.
2. Antes de llegar a dicho número, separamos la cantidad con un punto dejando como compañía dos decimales más, (en éste caso 3 y 9).
3. Por último, multiplicamos la cantidad (1,39) por 10 (que es la base) y lo elevamos a la potencia 11 (Ya que son 11 espacios que separan a cada número).

Ejemplo, tenemos 0,000096784 cm.

En este caso, el procedimiento será de la siguiente manera:

1. Partiremos desplazando el punto de derecha a izquierda, hasta llegar al primer número diferente de cero (en éste caso 9).
2. Separamos el número seguido por dos decimales (6 y 7) multiplicado por 10 como base constante.
3. La potencia, a diferencia del primer ejemplo, será **negativa** ya que **contamos de izquierda a derecha**, tomando en cuenta únicamente los números enteros.

Es decir, que tenemos como resultado: $9{,}67 \cdot 10^{-5}$ cm

O bien: $9{,}68 \cdot 10^{-5}$ cm, Aproximado, en donde la respuesta también sigue siendo válida.

Cabe mencionar, que se seleccionaron únicamente los números enteros, debido a que en términos matemáticos los ceros a la izquierda no cuentan y no deben ser incluidos.

Importante

Siempre que movemos la coma decimal hacia la izquierda el exponente de la potencia de 10 será positivo.

Siempre que movemos la coma decimal hacia la derecha el exponente de la potencia de 10 será negativo.

La notación científica puede utilizarse en las operaciones algebraicas básicas que conocemos: ***Suma, Resta, Multiplicación y División***.

Operaciones matemáticas con notación científica.

Suma y resta de números expresados en notación científica.

Siempre que las potencias de 10 sean las mismas, se deja la potencia de 10 con el mismo grado y se suman los números que multiplican a las potencias de 10.

En caso de que no tengan el mismo exponente hay que hacer una transformación previa para obtener el mismo exponente, para ello la mantisa (parte entera acompañada de decimales) se multiplica o divide por 10 tantas veces como sea necesario hasta conseguir el mismo exponente.

Ejemplos

1. $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^5$
2. $10^5 - 0{,}2 \cdot 10^5 = 0{,}8 \cdot 10^5$
3. $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^3$

Tomamos el exponente 5 como referencia, convertimos y resolvemos:

$0{,}2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^5 - 0{,}06 \cdot 10^5 = 3{,}14 \cdot 10^5$

Producto de números expresados en notación científica.

Para multiplicar cantidades escritas en notación científica se multiplican las mantisas y se suman los exponentes (basta recordar cómo se multiplican potencias de la misma base).

Ejemplos

1. $(4 \cdot 10^{12})(2 \cdot 10^{5}) = 8 \cdot 10^{17}$
2. $(3 \cdot 10^{12})(2 \cdot 10^{-7}) = 6 \cdot 10^{5}$

División de números que están expresados en notación científica.

Para dividir cantidades escritas en notación científica se dividen las mantisas y se restan los exponentes (el del numerador menos el del denominador, o sea el del dividendo menos el del divisor).

Ejemplos

1. $\dfrac{4 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^{5}} = 2 \cdot 10^{7}$
2. $\dfrac{24 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^{19}$

Resolvamos ahora algunos problemas de aplicación de la notación científica.

Ejemplo 1

1. Pedro tiene 15 años, calculemos su edad en segundos utilizando la notación científica. ¿Cuál es el orden de magnitud?

Solución

En primer lugar calculamos los segundos que tiene un año.

1 año tiene 365 días, por lo que en 15 años tendremos:

$15 \cdot 365 = 5\ 475$ días.

En un día hay 24 horas y cada hora tiene 3 600 segundos, por lo que en 5 475 días tendremos:

$5\ 475 \cdot 3\ 600 \cdot 24 = 473\ 040\ 000 = 4{,}73 \cdot 10^{8}$ s.

Ejemplo 2

2. En cierto país se producen 148,5 millones de toneladas de basura cada año. Si una tonelada es equivalente a 2 000 libras, cuántas libras de basura produce una persona por año si la población de ese país es de 250 millones de personas?

Solución

Debemos de convertir a unidades homogéneas.

Sabemos que un año tiene 365 días y que 1 tonelada tiene 2 000 libras.

1 año = 365 días

$148,5 \cdot 1\ 000\ 000 = 148,5 \cdot 10^6 = 1,485 \cdot 10^8$ toneladas de basura.

$1,485 \cdot 10^8 \cdot 2000 = 1,485 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^3 = 2,97 \cdot 10^{11}$ libras de basura.

$250 \cdot 1\ 000\ 000 = 250 \cdot 106 = 2,5 \cdot 10^8$ población del país.

La cantidad de basura que produce cada habitante por año será:

$\dfrac{2,97 \cdot 10^{11}}{2,5 \cdot 10^8} = 1,188 \cdot 10^3 = 1\ 188$ libras de basura.

La cantidad de basura que produce cada habitante por día será:

$\dfrac{1188}{365} = 3,25$ libras.

Ejemplo 3

3. En Nicaragua, según el Informe del Comandante Presidente Daniel al pueblo y la Asamblea Nacional 2 013, de los productos de agroexportación, el año pasado, en café se cosecharon 1,85 millones de quintales aproximadamente en 142 000 manzanas. Calculemos en promedio cuántos quintales de café se produjeron por manzana. Expresemos en notación científica.

Solución

Debemos dividir el total de quintales por el número de manzanas, utilizando notación científica tenemos:

$$\frac{1,85 \cdot 10^6}{1,42 \cdot 10^5} = 1,30 \cdot 10^1 = 13$$

Conclusión: Se cultivaron aproximadamente 13 quintales de café por manzana.

Ejemplo 4

4. En la producción pecuaria, se procesaron 755 800 cabezas de ganado en 2 013 con 263 millones de libras. ¿Cuántas libras de carne se obtiene, en promedio, de cada cabeza de ganado? Utilicemos notación científica.

Solución

Debemos dividir el total de libras por el número de cabezas de ganado. Utilizando notación científica tenemos:

$$\frac{2{,}63 \cdot 10^{8}}{7{,}558 \cdot 10^{5}} = 0{,}35 \cdot 10^{3} = 350$$

Conclusión: Se obtuvieron en promedio 350 libras de carne por cabeza de ganado.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

1. $6{,}84 \cdot 10^{2} + 7{,}329 \cdot 10^{6}$	7. $2{,}8451 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}00329 \cdot 10^{-7}$
2. $1{,}514 \cdot 10^{4} + 6{,}029 \cdot 10^{2}$	8. $3{,}841 \cdot 10^{8} \cdot 9{,}132 \cdot 10^{-6}$
3. $2{,}8418 \cdot 10^{7} - 7{,}5462 \cdot 10^{-3}$	9. $1{,}5104 \cdot 10^{4} \div 6{,}029 \cdot 10^{-2}$
4. $8{,}12 \cdot 10^{5} + 7{,}84 \cdot 10^{-2}$	10. $2{,}84 \cdot 10^{-7} - 3{,}542 \cdot 10^{-3}$
5. $9{,}4518 \cdot 10^{-1} - 8{,}6589 \cdot 10^{3}$	11. $8{,}012 \cdot 10^{-5} + 2{,}84 \cdot 10^{2}$
6. $2{,}8 \cdot 10^{7} - 6{,}741 \cdot 10^{2}$	

II. Completemos la tabla siguiente:

Número	Notación científica
0,000000000345	
0,0006789	
2300000000	
0,0205	
0,12	
356	
0,0000000000000000002	
23098	
0,0102	
1054678	
0,00100034	

III. Leamos detenidamente y resolvamos correctamente.

1. Los veterinarios estiman que el 5% de la población mundial tiene un perro. Según esta estimación, ¿cuántos perros hay en el mundo si la población mundial es de $6{,}8 \cdot 10^9$ habitantes?

2. Si la población de un país es de 45 millones de habitantes y se consumen 7,2 millones de toneladas de papel al año. Calcule el consumo per cápita anual.

3. Un año luz es la distancia que viaja la luz en un año, es decir, aproximadamente 5 869 713 600 millas. Se estima que la Vía Láctea tiene un diámetro de aproximadamente 200 000 años luz. ¿Cuántas millas tiene la Vía Láctea de diámetro?

4. La edad del Sol es de aproximadamente $5 \cdot 10^9$ años. Sin embargo, hay cuerpos que pueden tener 4 veces la edad del Sol. ¿Cuál es la edad de estos cuerpos?

5. Se calcula que en la Vía Láctea hay aproximadamente $1{,}2 \cdot 10^{11}$ estrellas. ¿Cuántos años le tomaría a una persona contar las estrellas si cuenta una por segundo?

6. Si una persona tiene 5 litros de sangre y aproximadamente 4 500 000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico de esta, calcula en notación científica su número aproximado de glóbulos rojos.

Autoevaluación

Copiemos y resolvamos cada ejercicio en el cuaderno, luego elijamos la respuesta correcta.

1. ¿Cuál de los siguientes pares de fracciones son equivalentes?

   a. $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{6}$ b. $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ c. $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ d. $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{6}$

2. Al realizar la operación: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, se obtiene:

   a. $\frac{7}{6}$ b. $\frac{5}{6}$ c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{2}{3}$

3. Al realizar la operación: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{7}{2}$, se obtiene:

   a. $\frac{11}{2}$ b. 4 c. $\frac{11}{4}$ d. $\frac{11}{12}$

4. Al realizar la operación: $\frac{3}{2}\sim\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}$, se obtiene:

   a. $\frac{3}{8}$ b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{7}{8}$ d. $\frac{5}{8}$

5. ¿Cuántos tercios hay en 5 unidades?

   a. 3 b. 9 c. 15 d. 30

6. Al simplificar las siguientes fracciones: $\frac{42}{96}$ y $\frac{44}{99}$. Se tienen las fracciones irreductibles:

   a. $\frac{21}{42}$ y $\frac{22}{33}$ b. $\frac{21}{46}$ y $\frac{1}{9}$ c. $\frac{7}{16}$ y $\frac{2}{9}$ d. $\frac{7}{16}$ y $\frac{4}{9}$

7. Ocho enteros 15 centésimos corresponde al decimal:

   a. 8,015 b. 8,0015 c. 8,15 d. 81,5

8. Al transformar $8\frac{3}{5}$ en fracción impropia se tiene:

   a. $\frac{29}{5}$ b. $\frac{43}{5}$ c. $\frac{23}{5}$ d. $\frac{29}{5}$

9. Al escribir como número decimal $\frac{39}{100}$, se tiene:

a. 0,39 b. 3,9 c. 39,0 d. 39,100

10. Al resolver 476,25 + 12,879 - 200,75, se obtiene:

a. 28 837,9 b. 28,8379 c. 288,379 d. 288 379

11. Si $\frac{1}{3}$ del sueldo se gasta en arriendo y $\frac{1}{2}$ se gasta en comida, ¿Que parte del sueldo representan estos gastos?

a. $\frac{5}{6}$ b. $\frac{6}{5}$ c. $\frac{3}{8}$ d. $\frac{8}{3}$

12. Pedro vende $\frac{3}{7}$ de un terreno de 2 800 m^2. ¿Cuántos metros cuadrados vendió?

a. 1 200 m^2 b. 800 m^2 c. 1600 m^2 d. 2 400 m^2

13. Una persona trabaja 8 horas diarias. ¿Qué fracción del día trabaja esta persona?

a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{3}{5}$

14. Un hombre vende $\frac{1}{3}$ de su terreno, arrienda $\frac{1}{8}$ de lo que le queda y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción del terreno cultiva?

a. $\frac{7}{12}$ b. $\frac{11}{24}$ c. $\frac{5}{12}$ d. $\frac{13}{24}$

15. Si se corta un alambre de 2 m de longitud en pedazos de $\frac{1}{8}$, ¿cuántos pedazos se cortaron?

a. 4 b. 8 c. 16 d. 12

16. De una pieza de tela se han vendido los $\frac{2}{5}$ y los $\frac{3}{7}$, ¿Que parte de la pieza de la tela se han vendido?

a. $\frac{45}{19}$ b. $\frac{29}{35}$ c. $\frac{13}{33}$ d. $\frac{17}{33}$

17. El número 35,68 escrito en notación científica es:

a. $3{,}568 \cdot 10^{-1}$ b. $3{,}568 \cdot 10^{1}$ c. $3{,}568 \cdot 10$ d. 3 568

18. El número 7 200 000 000 expresado en notación científica es:

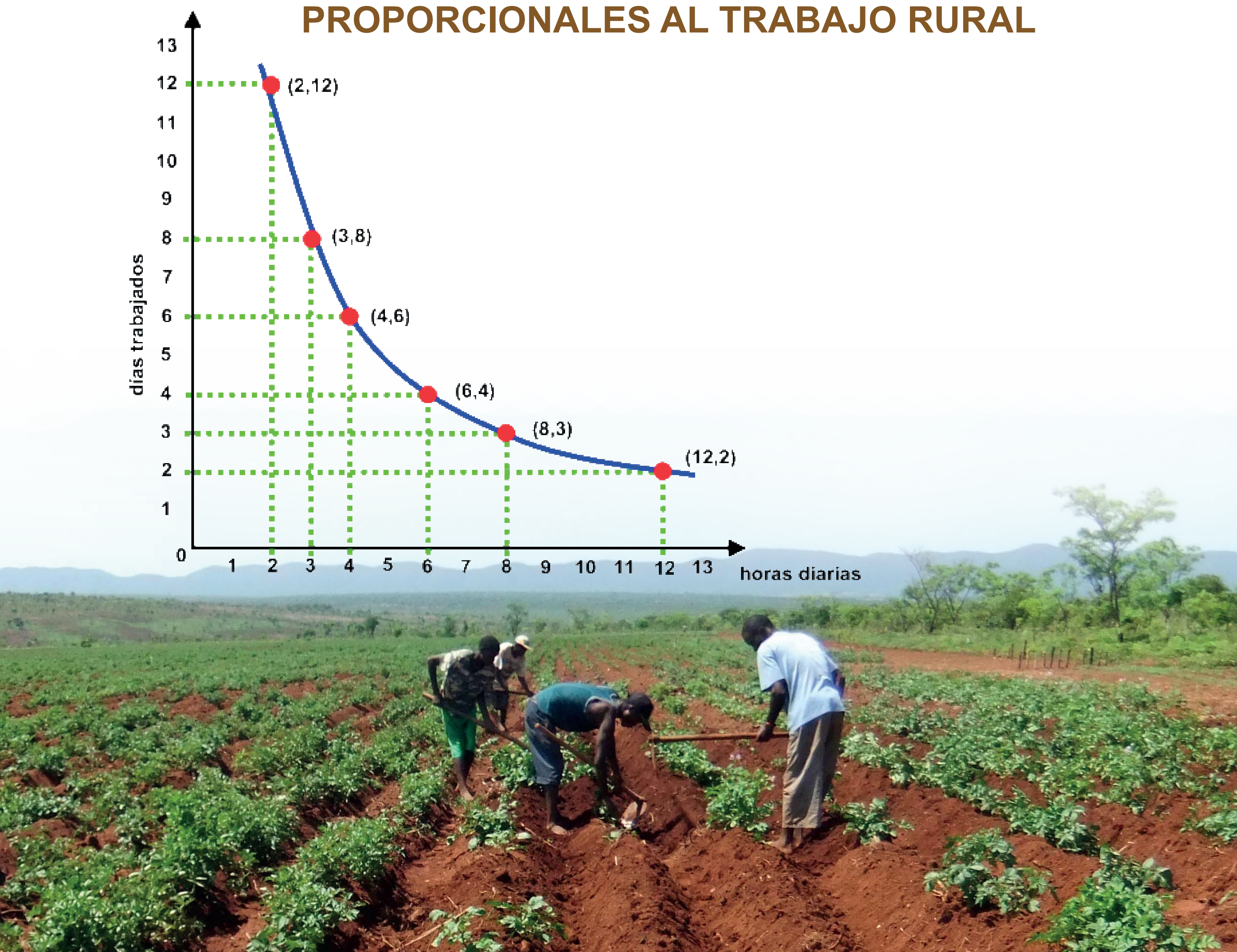
a. $7{,}2 \cdot 10^{8}$ b. $7{,}2 \cdot 10^{9}$ c. $7{,}2 \cdot 10^{6}$ d. $7{,}2 \cdot 10^{5}$

19. El número que corresponde a la expresión en notación científica $7{,}23 \cdot 10^{8}$ es:

a. 723 000 b. 72 300 000 c. 723 000 000 d. 7 230 000 000

III UNIDAD

APLICACIONES DE LAS MAGNITUDES PROPORCIONALES AL TRABAJO RURAL



III Unidad Aplicaciones de las magnitudes proporcionales al trabajo rural

Desempeño de aprendizaje

Interpreta y utiliza las magnitudes proporcionales para dar solución a situaciones del trabajo rural.

Ejes transversales

Practica y promueve en actividades de promoción de estilos de vida saludable y de producción de alimentos para el autoconsumo y el mejoramiento de las condiciones alimentarias y nutricionales en su hogar, escuela y comunidad.

1 Proporciones

Indicador de logro

Identifica relaciones entre magnitudes para formar razones y proporciones, a partir de situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Razón

En los centros de educación se establece la relación que existe entre el número de maestros y el número de estudiantes. Por ejemplo, si en una escuela hay 2 maestros por cada 80 estudiantes, ¿cuál es la relación matemática que existe entre ambos?

En la situación anterior, podemos observar que como existen 2 maestros por cada 80 estudiantes, la relación entre el número de maestros y el de estudiantes es de 2 a 80. O sea, el número de maestros es $\frac{2}{80}$ del total de estudiantes.

A esta forma de expresar la relación entre dos cantidades, se le llama razón. O sea, razón es el cociente entre dos números.

Las siguientes expresiones son ejemplos de razones: $\frac{2}{80}, \frac{1}{50}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$. Una razón puede representarse en forma fraccionaria, en forma horizontal o en forma decimal.

A continuación podemos observar las diferentes formas de representar la razón: $\frac{2}{80}$:

FORMA RACIONAL		FORMA HORIZONTAL
$\frac{2}{80}$	→	$2 : 80$

Una razón posee dos términos: antecedente y el consecuente. Por ejemplo en la razón $\frac{2}{80}$, se lee “2 es a 80” y a 2 le llamamos antecedente y a 80 consecuente.

También podemos puntualizar que:

Una razón es el resultado de comparar dos cantidades. Dos cantidades pueden compararse de dos maneras: Hallando en cuanto excede una a la otra; es decir restándolas, o hallando cuántas veces contiene una a la otra; es decir dividiéndolas.

Existen dos clases de razones: razón aritmética o por diferencia y razón geométrica o por cociente. Nosotros estudiaremos las razones geométricas que se escriben en forma racional.

Reflexionemos

Sabemos que siempre estamos en contacto con objetos donde establecemos comparaciones. Por ejemplo, comparamos el largo y el ancho de terreno con forma rectangular que utilizamos para el cultivo, del terreno que seleccionamos para la construcción de nuestras casas, del terreno donde está ubicado nuestro centro de estudio, así como la longitud y el ancho de un puente colgante, entre otros.

Igualmente podemos establecer comparaciones entre otros objetos. Por ejemplo, podemos comparar la relación que existe entre la producción de una manzana cultivada de maíz que corresponde a 40 quintales. Esto es igual a $\frac{1}{40}$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de razones:

Ejemplo 1

Un estudiante de séptimo grado gasta en el traslado de su casa al Instituto C$ 5 de los C$ 10 que tiene.

La razón entre lo que gasta en el traslado y lo que tiene es:

$\frac{5}{10}$, lo que se lee “5 es a 10”.

En esta razón 5 es el antecedente y 10 es el consecuente.

Ejemplo 2

En un centro escolar, la razón del número de niñas al número de niños es 4 : 3. ¿Cuántas niñas hay en la escuela?

Podemos afirmar que, si hay 40 niños y 30 niñas, entonces $\frac{40}{30}$, y esta razón es igual a $\frac{4}{3}$ También podemos decir que hay 100 niños y 75 niñas, ya $\frac{100}{75} = \frac{4}{3}$.

¿Podemos escribir otras soluciones a la situación?

¿Cuántas soluciones presenta esta situación?

Ejemplo 3

Un productor de maíz gasta en semilla para siembra tecnificada C$ 500 de los C$ 2 500 que tiene al final de la cosecha.

La razón entre lo que gasta en semilla para siembra tecnificada es:

$\frac{500}{2\,500}$, lo que se lee "500 es a 2 500".

En esta razón 500 es el antecedente y 2 500 es el consecuente.

1.2 Proporción.

Cuando tenemos la igualdad de dos razones obtenemos una proporción. La proporción $\frac{100}{75} = \frac{4}{3}$ la leemos "100 es a 75, como 4 es a 3".

Una proporción es la igualdad de dos razones.

Una proporción se expresa simbólicamente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Los elementos 100 y 3 se llaman extremos.
Los elementos 75 y 4 se llaman medios.
Observemos que: (100) (3) = (75) (4)

EXTREMOS

100 : 75 : : 4 : 3

MEDIOS

Actividades

Comprobemos lo aprendido

Escribamos en el espacio vacío de la tabla la información que hace falta sobre las proporciones, lectura, extremos y medios.

Proporción	Se lee	Extremos	Medios
$\frac{2}{6} = \frac{8}{24}$	2 es a 6, como 8 es a 24	2 y 24	6 y 8
$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$			
		5 y 6	3 y 10
$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$		3 y 8	2 y 12

Problemas de aplicación a su entorno

Ejemplo 1

En la región norte de Nicaragua, una manzana cultivada de maíz produce 80 quintales. Si cada quintal tiene un costo de C$ 400. ¿Qué razones podemos establecer entre las manzanas cultivadas y la producción obtenida? o ¿Qué razones podemos establecer entre cada quintal de maíz y el costo de cada quintal?

Manzanas de maíz cultivadas (Mz.)	1	2	3	4
Producción en quintales (qq)	80	160	240	320

Ahora podemos establecer la proporcionalidad entre las diferentes razones:

$$\frac{1}{80} = \frac{2}{160} = \frac{3}{240} = \frac{4}{320}$$

Estas proporciones se pueden leer de la siguiente manera: 1 es a 80, como 2 es a 160. Igualmente podemos afirmar que 1 es a 80, como 3 es a 240 y que 1 es a 80, como 4 es a 320.

Además, podemos comprobar que existe proporcionalidad entre las diferentes razones ya que si:

$\frac{1}{40} = \frac{2}{80}$	Aplicando la propiedad fundamental.
$1 \cdot 80 = 40 \cdot 2$	Al multiplicar ambos miembros.
$\mathbf{80 = 80}$	Respuesta.

Ejemplo 2

Para que establezcamos la relación entre cada quintal de maíz y el costo, analicemos la información de la siguiente tabla.

Quintales de maíz (qq)	1	2	3	4
Costo de maíz por quintal (C$)	400	800	1 200	1 600

Igualmente, estableceremos la proporcionalidad entre las diferentes razones.

$$\frac{1}{420} = \frac{2}{800} = \frac{3}{1200} = \frac{4}{1600}$$

Y podemos leerlas de la siguiente manera:

1 es a 400, como 2 es a 800.

Igualmente podemos afirmar que:

1 es a 400, como 3 es a 1 200, y 1 es a 400 como 4 es a 1 600.

Observamos que existe proporcionalidad entre las diferentes razones ya que si:

$\frac{1}{400} = \frac{2}{800}$ Propiedad fundamental de las proporciones.

$1 \cdot 800 = 400 \cdot 2$ Resolviendo el producto.

800 = 800 Respuesta.

Dos cantidades son proporcionales, si cada término de una segunda cantidad se obtiene multiplicando por un mismo número, el término correspondiente de la primera cantidad. Este número es llamado coeficiente de proporcionalidad.

Ejemplo 3

$$\frac{1}{40} = \frac{2}{80} = \frac{3}{120} = \frac{4}{160}$$

El coeficiente de proporcionalidad es 2, ya que:

$2 = 2 \cdot 1$ y $80 = 2 \cdot 40$.

Además podemos observar que:

$$\frac{1}{40} = \frac{2}{80}$$

De igual manera: $\frac{1}{40} = \frac{3}{120}$

También podemos decir que:

$$\frac{1}{40} = \frac{4}{160}$$

Estas razones son llamadas **proporciones directas**.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. En Jalapa, Nicaragua, una manzana bien cultivada de maíz produce 100 quintales. Si cada quintal tiene un costo de C$ 500. ¿Qué razones podemos establecer entre las manzanas cultivadas y la producción obtenida? o ¿Qué razones podemos establecer entre cada quintal de maíz y el costo de cada quintal?

II. En la siguiente tabla se presenta la siguiente información sobre el precio del azúcar en Nicaragua

Quintales de maíz (qq)	1	2	3	4
Costo de maíz por quintal (C$)	1 200	2 400	3 600	4 800

Observemos los datos de la tabla y respondamos las siguientes preguntas:

a. Establezca la proporcionalidad entre las razones

b. ¿Son proporcionales las razones? ¿Por qué?

c. ¿Cuál es el coeficiente de proporcionalidad?

III. Expresemos en forma de razón las siguientes situaciones que se presentan en cada caso.

1. En una Fábrica de Tabaco existen 2 supervisoras por cada 50 trabajadoras.
2. De cada 10 conductores de transporte colectivo, solamente ocho respetan las leyes de tránsito.
3. Un productor tiene 10 manzanas de terreno para la siembra de hortalizas y solamente son cultivadas 7,5 manzanas.
4. Un productor de granos básicos tiene 15 manzanas y solamente 9,5 son cultivadas.
5. De 40 estudiantes de séptimo grado solamente 35 resolvieron los ejercicios de matemática
6. Una cooperativa de producción sembró 5,5 manzanas de hortalizas y solamente 4,25 manzanas produjo una buena cosecha
7. En este mes una libra de frijoles tiene un costo de C$ 26,2 libras, 3 libras, 4 libras, 5 libras, ¿Cuánto costarán? Presente esta información en una tabla y establezca comparaciones entre las proporciones que resultan

1.3 Propiedades de las proporciones.

Leamos y analicemos

En un Instituto de Educación Secundaria, la razón del número de estudiantes del sexo femenino al número de estudiantes del sexo masculino es 5 : 3. ¿Cuántas estudiantes del sexo femenino hay en el Instituto y cuántos del sexo masculino?

Posiblemente podemos afirmar que:

Existen 50 estudiantes mujeres y 30 estudiantes varones, ya que: $\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$.

Pero también podemos decir que:

Existen 100 estudiantes mujeres y 60 estudiantes varones, ya que: $\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$.

Y podemos seguir estableciendo proporciones.

Si resolvemos la proporción:

$\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$	Aplicando la propiedad fundamental.
$100 \cdot 3 = 60 \cdot 5$	Resolviendo los productos.
300 = 300	Respuesta.

Propiedad Fundamental de las proporciones:

El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d = b \cdot c$

Ejemplo 1

Si $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ entonces $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

Al resolver los productos de ambos miembros resulta que 18 = 18

Veamos ahora que sucede si sumamos los antecedentes y consecuentes de las razones de una proporción.

Por ejemplo, si tenemos $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$, al sumar los antecedentes y consecuentes obtenemos: $\frac{2+4}{5+10}=\frac{6}{15}$ ¿será equivalente esta nueva razón a las anteriores?

Claro que sí, por lo tanto podemos generalizar:

En toda proporción la suma o diferencia (resta) de antecedentes es igual a la suma o diferencia de consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Cuarta proporcional:

Se llama cuarta proporcionalidad de tres cantidades *a*, *b*, y *c*, a un valor *x*, que cumple la condición: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Ahora bien, hay proporciones muy sencillas de completar, pero en otros casos debemos usar los conocimientos sobre la propiedad fundamental de las proporciones y sobre la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 2

Encontremos el valor desconocido en la siguiente proporción: $\frac{8}{b} = \frac{4}{5}$

$\frac{8}{b} = \frac{4}{5}$	Aplicando la cuarta proporcional.
$8 \cdot 5 = b \cdot 4$	Propiedad fundamental de proporcionalidad.
$b = \frac{8 \cdot 5}{4}$	Resolviendo el producto del numerador.
$b = \frac{40}{4}$	Efectuando la división, resulta.
$b = 10$	

Ahora busquemos el valor de d en la proporción: $\frac{8}{10}$ y $\frac{4}{d}$

Aquí, para encontrar el valor de *d*.

$\frac{8}{10}$ y $\frac{4}{d}$	Aplicando la cuarta proporcional y propiedad fundamental.
$d = \frac{10 \cdot 4}{8}$	Resolviendo el producto del numerador.
$d = \frac{40}{8}$	Efectuando la división, resulta.
$d = 5$	

¿Se hará el mismo procedimiento si los términos de las proposiciones no son diferentes?

Media proporcional:

Cuando los extremos o los medios de una proporción son iguales decimos que la proporción es CONTINUA.

Se llama media proporcional a dos cantidades a y b, a un valor x que cumpla la condición: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \rightarrow x = \sqrt{a \cdot b}$

¿Qué hacemos para encontrar la media proporcional?

Para encontrar la media proporcional (término que se repite) aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones:

Ejemplo

Encontremos el valor de b en la siguiente proporción: $\frac{4}{b} = \frac{b}{16}$

$\frac{4}{b} = \frac{b}{16}$ Aplicando la media proporcional.

$b = \sqrt{4 \cdot 16}$ Resolviendo el producto.

$b = \sqrt{64}$ Extrayendo la raíz cuadrada de 64.

$b = 8$

¿Cómo se encuentra uno de los términos que no se repiten?

Tercera proporcional:

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ se denomina tercera proporcional al primero o cuarto termino de una proporción continua:

Ejemplo 1

Encontremos el valor de a en la siguiente proporción: $\frac{a}{8} = \frac{8}{16}$

$\frac{a}{8} = \frac{8}{16}$ Aplicando la tercera proporcional.

$a = \frac{8^2}{16}$ Resolviendo el producto.

$a = \frac{64}{16}$ Resolviendo la potencia del numerador.

$a = 4$

Ejemplo 2

Encontremos el valor de 5 km en metros.

Conocemos que 1 km = 1 000 metros

Establecemos la proporción:

$\frac{1}{1000} = \frac{5}{x}$ Aplicando la cuarta proporcional y propiedad fundamental

x = 5 ·1 000 Resolviendo el producto, resulta

x =5 000

Por lo tanto, en 5 km hay 5 000 metros.

Ejemplo 3

Si pagamos C$ 120 por 3 bolsas de cinco libras de azúcar podemos decir cuánto tenemos que pagar por 7 bolsas de azúcar.

Solución

Sabemos que 3 bolsas de azúcar equivalen a C$ 120

Establecemos la proporción:

$\frac{3}{120} = \frac{7}{x}$ Aplicando la cuarta proporcional y propiedad fundamental.

$x = \frac{7 \cdot 120}{3}$ Resolviendo el producto

$x = \frac{840}{3}$ Efectuando la división, resulta

$x = 280$

Debemos pagar C$ 280 por las 7 bolsas de azúcar de 5 libras.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Determinemos el valor del termino desconocido en la proporción y resuelva los problemas planteados.

1. $\frac{8}{b} = \frac{4}{5}$

2. $\frac{9}{x} = \frac{4}{9}$

3. $\frac{x}{15} = \frac{15}{5}$

4. $\frac{18}{10} = \frac{a}{5}$

5. $\frac{32}{4} = \frac{4}{x}$
6. $\frac{x}{15} = \frac{150}{25}$
7. El valor de 5 metros en centímetros.
8. La razón de dos números es $\frac{5}{6}$. Si el menor es 20. ¿Cuál es el mayor?
9. El mayor de dos números es 42 y la relación entre ambos de 5 a 7. Hallar el número menor.
10. Si por la compra de 5 libras de queso pagamos C$ 225, por 25 libras del mismo tipo de queso, ¿cuánto pagaremos?

1.4 Transposición de los términos de una proporción.

Resolvamos un ejemplo donde calcularemos el término desconocido de las siguientes proporciones:

Ejemplo 1

$\frac{8}{12} = \frac{4}{E}$ Aplicando la cuarta proporcional y la propiedad fundamental de proporciones.

$E = \frac{12 \cdot 4}{8}$ Resolviendo el producto.

$E = \frac{48}{8}$ Efectuando el cociente.

$E = 6$

Ahora, si sustituimos el valor de E, observamos que se cumple la propiedad fundamental de las proporciones:

Si $\frac{8}{12} = \frac{4}{6}$ entonces:

$8 \cdot 6 = 12 \cdot 4$ Resolviendo el producto

$48 = 48$

Ejemplo 2

$\frac{9}{6} = \frac{M}{12}$ Aplicando la tercera proporcional y la propiedad fundamental de proporciones

$M = \frac{9 \cdot 12}{6}$ Resolviendo el producto

$M = \frac{108}{6}$ Efectuando el cociente

$M = 18$

Ahora, si sustituimos el valor de M:

$\frac{9}{6}=\frac{18}{12}$ Propiedad fundamental de proporciones.

$6 \cdot 18 = 9 \cdot 12$ Resolviendo los productos.

$108 = 108$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Calculemos el término desconocido aplicando la transposición de los términos de una proporción y la propiedad fundamental.

1. $\frac{4}{6}=\frac{2}{E}$ 2. $\frac{16}{8}=\frac{M}{24}$ 3. $\frac{E}{10}=\frac{5}{20}$ 4. $\frac{4}{M}=\frac{7,5}{30}$ 5. $\frac{5,5}{M}=\frac{8,5}{45}$

1.5 Problemas de aplicación a su entorno.

Ejemplo 1

Un productor de hortalizas con el propósito de elevar la producción porque la demanda ha aumentado, contrató una cantidad de empleados.

Si la razón del número de mujeres con relación al número de hombres es 3 a 2. ¿Cuántos hombres fueron contratados, si se contrataron 120 mujeres?

Solución

Sea h el número de hombre. La razón del número de mujeres con respecto al número de hombres es de 3 es a 2, entonces:

$\frac{3}{2}=\frac{120}{h}$ Aplicando la cuarta proporcional y propiedad fundamental.

$h=\frac{2 \cdot 120}{3}$ Resolviendo el producto del numerador.

$h=\frac{240}{3}$ Efectuando la división.

$h = 80$

Por lo tanto, el administrador contrató 120 mujeres y 80 hombres.

Ejemplo 2

El centro de distribución de paquetes solidarios le asignaron 20 000 paquetes para ser entregados a madres de héroes y mártires, familias de escasos recursos y a personas con capacidades diferentes. ¿Cuántos paquetes se entregaron, si se determinó hacer una primera entregar a las madres de 4 paquetes por cada 5 familias de escasos recursos?

Solución

Sea m el número de paquetes solidarios. La razón del número de paquetes recibidos por las madres con respecto al número paquetes recibidos por las personas de escasos recursos es de 4 es a 5, entonces

$\frac{4}{5}=\frac{m}{20000}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$m=\frac{4\cdot 20000}{5}$ Resolviendo el producto.

$m=\frac{80000}{5}$ Efectuando la división.

$m = 16\,000$

Por lo tanto, se entregaron 16 000 paquetes solidarios.

Ejemplo 3

Con el propósito de mejorar la alimentación de la población un grupo de estudiantes sembraron dos manzanas de árboles frutales. Decidieron sembrar 240 árboles de guayabas y papayas. ¿Cuántos árboles de guayabas se sembraron, si determinaron sembrar 5 árboles de guayabas por cada 8 árboles de papayas?

Solución

Sea g el número de árboles de guayabas. La razón del número de árboles de guayabas con respecto al número de árboles de papayas es de 5 es a 8, entonces

$\frac{5}{8}=\frac{g}{240}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$g=\frac{5\cdot 240}{8}$ Resolviendo el producto.

$g=\frac{1200}{8}$ Efectuando el cociente.

$g = 150$

Por lo tanto: 150 árboles de guayabas se sembraron.

Ejemplo 4

La distribuidora de fertilizantes para el cultivo de frijoles está ubicada en la región norte de Nicaragua. El gerente ha asignado 5 empleados por cada 20 dueños de cultivos. ¿Cuántos empleados necesitará para atender a 50 dueños de cultivos de otros departamentos del país?

Solución

Podemos establecer la proporción:

$\frac{5}{20} = \frac{x}{60}$ Cuarta proporcionalidad.

$x = \frac{5 \cdot 60}{20}$ Resolviendo el producto.

$x = \frac{300}{20}$ Efectuando el cociente.

$x = 15$

Por lo tanto, necesitará 15 empleados para atender a 50 dueños de cultivos.

Ejemplo 5

En algunos lugares de la región norte de Nicaragua, una manzana bien cultivada de frijoles produce 80 quintales. Si cada quintal tiene un costo de C$ 2 000. Si se sembraron 20 manzanas, ¿cuál será la producción que se cosechará?¿cuál será el total de dinero que se obtendrá?

Solución

Podemos establecer la proporción:

$\frac{1}{80} = \frac{20}{x}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$x = \frac{80 \cdot 20}{1}$ Resolviendo el producto.

$x = 1\ 600$

Por lo tanto, si se siembran 20 manzanas, la producción será de 1 600 quintales.

Para saber cuál es el total de dinero que se obtendrá, multiplicamos 1 600 quintales por el costo C$ 2 000, esto es:

$1\ 600 \cdot 2\ 000 = 3\ 200\ 000$

Por lo tanto, el total de dinero que de la cosecha de 1 600 quintales es C$ 3 200 000.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. En una cooperativa de ahorro y préstamo, por cada C$ 1,000 ahorrados se reciben C$ 150 de utilidades al año. En otra, por cada C$ 1,500 ahorrados se reciben C$ 200. ¿En cuál de las dos conviene más ahorrar para recibir más utilidades?
2. El propietario de una Industria de Condimentos y Especies ha asignado 5 empleados por cada 100 dueños de las pulperías que distribuyen estos productos. Cuántos empleados necesitará para atender a 500 dueños de pulperías de otros departamentos del país.
3. En la región norte de Nicaragua, una manzana cultivada de frijoles produce 80 quintales. Si cada quintal tiene un costo de C$ 2 000. ¿Qué razones podemos establecer entre las manzanas cultivadas y la producción obtenida? o ¿Qué razones podemos establecer entre cada quintal de frijoles y el costo de cada quintal?
4. En algunos lugares de la región norte de Nicaragua, el invierno no ha sido el mejor, y en estas condiciones se espera que una manzana produzca 8 quintales. Si cada quintal tiene un costo de C$ 3 000. Si se sembraron 20 manzanas, ¿cuál será la producción que se cosechará?¿cuál será el total de dinero que se obtendrá?
5. Con el propósito de mejorar la alimentación de la población un grupo de estudiantes sembraron una manzana de árboles frutales. Decidieron sembrar 140 árboles de naranjas y mandarinas. ¿Cuántos árboles de naranjas sembraron, si determinaron sembrar 3 árboles de naranjas por cada 2 árboles de mandarinas?

2 Proporcionalidad

Indicador de logro

Resuelve problemas de su comunidad que impliquen el uso de del concepto de magnitudes directamente e inversamente proporcionales, constantes de proporcionalidad, reparto proporcionales.

2.1 Magnitudes directamente e inversamente proporcionales.

Nicaragua es un gran productor de café. Para levantar la cosecha de café en una finca contrataron 50 trabajadores y se espera levantar la cosecha en 15 días. Si se aumenta el número de trabajadores, ¿aumenta o disminuye la cantidad de café que se corta diariamente?¿Aumenta o disminuye el tiempo en levantar la cosecha?

En cada uno de estos casos se relacionan magnitudes. Claramente observamos que si se aumenta el número de trabajadores la cantidad de café que se corta diariamente también aumenta. En este caso decimos que hay una proporcionalidad directa.

Si dos magnitudes son directamente proporcionales, si al aumentar (duplicar, triplicar, cuadruplicar, entre otras) una de ellas, la otra aumenta (duplica, triplica, cuadruplica, entre otras) respectivamente o viceversa; si una de ellas se reduce a la mitad, tercera, la otra también se reduce a la mitad, tercera, respectivamente.

En el caso de aumentar el número de trabajadores, el tiempo en levantar la cosecha disminuye. En este caso las magnitudes son inversamente proporcionales.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar (duplicar, triplicar, cuadruplicar, entre otras) una de ellas la otra disminuye (dos, tres, cuatro veces, entre otras) y viceversa si una de ellas disminuye la otra aumenta.

2.2 Constante de proporcionalidad.

En la proporcionalidad directa el cociente de sus magnitudes es una constante:

$$\frac{y}{x} = k$$

Leamos y analicemos

Ejemplo 1

Supongamos que un carro necesita 3 galones de gasolina para recorrer 100 km, si recorre 200 km, gastará 6 galones (doble distancia, doble cantidad de gasolina), si recorre 300km. gastará 9 galones (triple distancia, triple cantidad de combustible).

Traslademos esta información en una tabla, relacionando las dos magnitudes:

Galones gasolina (x)	3	6	9	12
Recorrido en km (y)	100	200	300	400

$\frac{y}{x} = \frac{100}{3} = \frac{200}{6} = \frac{300}{9} = \frac{400}{12} = 33,33 = k$ Constante de proporcionalidad.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando su producto es constante: $x \cdot y = k$

Ejemplo 2

Supongamos que un obrero levanta una pared en 12 horas, 2 obreros tardarán 6 horas, 3 obreros 4 horas. Es decir, a mayor cantidad de obreros menor tiempo en construir la obra.

Esta información la reflejaremos en la siguiente tabla:

Número de obreros (x)	1	2	3	4
Tiempo en horas (y)	12	6	4	3

Observemos que: $x \cdot y = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = k$ Constante de proporcionalidad.

Ejemplo 3

Si 4 libras de frijoles cuestan C$ 80 ¿cuánto cuestan 15 libras?

Debemos razonar que a más libras de frijoles, más cantidad de dinero, por lo tanto la proporción es directa y podemos utilizar la fórmula: $\frac{y}{x} = k$ para obtener la constante o factor de proporcionalidad y luego $y = k \cdot x$

Del problema sabemos que:

$x = 4 \;\; y = 80$. De aquí que:

$$k = \frac{y}{x}$$
$$k = \frac{80}{4}$$
$$k = 20$$

Para encontrar el valor de las 15 libras aplicamos la fórmula:

$y = k \cdot x$ Sustituyendo k y x.

$y = 20 \cdot 15$ Resolviendo el producto.

$y = 300$

En conclusión 15 libras de frijoles cuestan C$ 300.

Ejemplo 4

Tres obreros realizan una obra en 14 días. ¿En cuántos días realizarán la misma obra 7 obreros?

Números de Obreros (x)	3	4	5	6	7
Número de Días (y)	14	10,5	8,4	7	X
Constante (k)	42	42	42	42	42

En este caso la magnitud x representa la cantidad de obreros $x = 3$ y el número de días es la magnitud $y = 14$.

Analizamos que a mayor cantidad de obreros menor número de días, por lo tanto es una proporcionalidad inversa y debemos aplicar las fórmulas:

$$x \cdot y = k$$

Es el factor de proporcionalidad y luego $y = \frac{k}{x}$

Para encontrar el número de días que tardarán los 7 obreros.

$x \cdot y = 3 \cdot 14$ Sustituyendo x e y.

$x \cdot y = 42 = k$ Resolviendo el producto, encontramos k.

$y = \frac{k}{x}$ Sustituimos la constante k y x.

$y = \frac{42}{7}$ Resolviendo el cociente.

$y = 6$

Esto indica que 7 obreros realizarán la obra en 6 días.

Ejemplo 5

Cinco mujeres trabajan en la producción y realizan una tarea en 14 días. ¿En cuántos días realizarán la misma tarea 7 mujeres?

Números de Mujeres (x)	5	6	7
Número de Días (y)	14	11,67	x
Constante (k)	70	70	70

En este caso la magnitud x representa la cantidad de mujeres $x = 5$ y el número de días es la magnitud $y = 14$.

Analizamos que a mayor cantidad de mujeres menor número de días, por lo tanto es una proporcionalidad inversa y debemos aplicar las fórmulas:

$$x \cdot y = k$$

Es el factor de proporcionalidad y luego $y = \frac{k}{x}$

Para encontrar el número de días que tardarán las 7 mujeres.

$x \cdot y = 5 \cdot 14 = 70$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{70}{7}$$

$$y = 10$$

Esto indica que las 7 mujeres realizarán la tarea en 10 días.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. Supongamos que un vehículo necesita 5 galones de gasolina para recorrer 200 km, si recorre 400 km, gastará 10 galones (doble distancia, doble cantidad de gasolina). ¿Cuánto gastará si recorre 600 km?
2. Supongamos que un estudiante resuelve una guía de 25 ejercicios en 2 horas. ¿En cuántas horas resolverán los mismos ejercicios 5 estudiantes?
3. Si 5 libras de frijoles cuestan C$ 130 ¿cuánto cuestan 15 libras?
4. Tres obreros realizan una obra en 14 días. ¿En cuántos días realizarán la misma obra 7 obreros?
5. Cinco mujeres trabajan en la industria del tabaco y realizan la clasificación de las diferentes marcas de tabaco en la bodega y se tardaron 7 días. ¿Cuántos días se tardaran 7 mujeres?

2.3 Reparto proporcional.

Repartir un número N en partes proporcionales a otros dados, a, b y c es descomponer N en otros tantos sumandos de forma que sean proporcionales a los números propuestos a, b y c. La proporcionalidad puede ser directa o inversa. Aplicaremos la propiedad aditiva de las proporciones.

Para repartir un número en partes directamente proporcionales a varios **números enteros** se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros y se divide por su suma.

Ejemplo 1

Repartir 150 en partes directamente proporcionales a 5, 6 y 9.

$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{9}=\frac{x+y+z}{5+6+9}$ Aplicando la propiedad aditiva de las proporciones.

$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{9}=\frac{150}{20}$ Resolviendo las proporciones.

$\frac{x}{5}=\frac{150}{20}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$x=\frac{5\cdot 150}{20}$ Resolviendo el producto.

$x=\frac{750}{20}$ Efectuando el cociente.

$\boldsymbol{x=37{,}5}$

$\frac{y}{6}=\frac{150}{20}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$y=\frac{6\cdot 150}{20}$ Resolviendo el producto.

$y=\frac{900}{20}$ Efectuando la división.

$\boldsymbol{y=45}$

$\frac{z}{9}=\frac{150}{20}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$z=\frac{9\cdot 150}{20}$ Resolviendo el producto.

$z=\frac{1350}{20}$ Efectuando la división.

$\boldsymbol{z=67{,}5}$

Sumando los valores de x, y y z, obtenemos: $37{,}5 + 45 + 67{,}5 = 150$.

Para repartir un número en partes directamente proporcionales a varias fracciones se reducen fracciones de común denominador. Se prescinde del denominador y se divide el número dado en partes proporcionales a los numeradores.

Ejemplo 2

Repartir 154 en partes directamente proporcionales a: $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$

Lo primero que tenemos que hacer es reducir los denominadores de los racionales al mínimo común denominador. El mínimo común denominador de 3, 4, 5 y 6 es 60 porque 60 divide a 3, 4, 5 y 6.

Para resolver $\frac{2}{3}$ dividimos 60 entre 3 y es igual a 20 y multiplicamos 20 por 2 = 40. Resulta el racional equivalente $\frac{40}{60}$.

De igual manera, para resolver $\frac{1}{4}$ dividimos 60 entre 4 y es igual a 15 y multiplicamos 15 por 1 = 15. Resulta el racional equivalente $\frac{15}{60}$, y así sucesivamente se resuelve $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.Luego resultan los racionales equivalentes: $\frac{12}{60}$ y $\frac{10}{60}$.

Los racionales son: $\frac{40}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60}$ y $\frac{10}{60}$.

Ahora despreciamos el denominador común 60 y repartimos el número dado 154 en partes proporcionales a los numeradores 40, 15, 12 y 10.

$$\frac{x}{40}=\frac{y}{15}=\frac{z}{12}=\frac{u}{10}=\frac{x+y+z+y}{40+15+12+10}$$ Aplicando la propiedad aditiva de las proporciones.

$$\frac{x}{40}=\frac{y}{15}=\frac{z}{12}=\frac{u}{10}=\frac{154}{77}$$ Resolviendo las proporciones.

$$\frac{x}{40}=\frac{154}{77}$$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$$x=\frac{40\cdot 154}{77}$$ Resolviendo el producto.

$$x=\frac{6160}{77}$$ Efectuando el cociente.

$\boldsymbol{x = 80}$

$$\frac{y}{15}=\frac{154}{77}$$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$$y=\frac{15\cdot 154}{77}$$ Resolviendo el producto.

$$y=\frac{2310}{77}$$ Efectuando la división.

$\boldsymbol{y = 30}$

$\frac{z}{12}=\frac{154}{77}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$z=\frac{12\cdot 154}{77}$ Resolviendo el producto.

$z=\frac{1848}{77}$ Efectuando el cociente.

***z* = 24**

$\frac{u}{10}=\frac{154}{77}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$u=\frac{10\cdot 154}{77}$ Resolviendo el producto.

$u=\frac{1540}{77}$ Efectuando el cociente.

***u* = 20**

Observamos que el número 154 lo hemos dividido en 80, 30, 24 y 20.

Para repartir un número en partes directamente proporcionales a otros de cualquier clase se reducen a quebrados y se opera como en el caso anterior.

Ejemplo 3

Repartir 49 en partes proporcionales a: 0,4; $\frac{1}{3}$, 2 y $2\frac{1}{5}$

Para repartir 49 en partes, los reduciremos a racionales:

$0,4=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$

$2\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

Ahora reduciremos estos racionales a común denominador:

$\frac{1}{25}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}$ y $\frac{11}{5}$ Sabemos que el mínimo común denominador de 25, 3, 1, 5 es 75.

Para resolver $\frac{1}{25}$ dividimos 75 ÷ 25 = 3 y multiplicamos 3 · 1 = 3.

Resulta el racional equivalente $\frac{3}{75}$.

Para resolver $\frac{1}{3}$ dividimos 75÷3=25 y multiplicamos 25 · 1= 25.

Resulta el racional equivalente $\frac{25}{75}$, y así sucesivamente se resuelven $\frac{2}{1}$ y $\frac{11}{5}$

Resultan los racionales equivalentes: $\frac{150}{75}$ y $\frac{150}{75}$.

En general, obtenemos los siguientes racionales: $\frac{3}{75}, \frac{25}{75}, \frac{150}{75}$ y $\frac{165}{75}$

Ahora despreciamos el denominador común 75 y repartimos 49 en partes directamente proporcionales a los numeradores 3, 25, 150 y 165

$\frac{x}{3}=\frac{y}{25}=\frac{z}{150}=\frac{u}{165}=\frac{x+y+z+u}{3+25+150+165}$ Aplicando la propiedad aditiva de las proporciones.

$\frac{x}{3}=\frac{y}{25}=\frac{z}{150}=\frac{u}{165}=\frac{49}{343}$ Resolviendo las proporciones.

$\frac{x}{3}=\frac{49}{343}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$x=\frac{3\cdot 49}{343}$ Resolviendo el producto.

$x=\frac{147}{343}$ Efectuando la división.

$x=\frac{3}{7}$

$\frac{y}{25}=\frac{49}{343}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$y=\frac{25\cdot 49}{343}$ Resolviendo el producto.

$y=\frac{1225}{343}$ Efectuando el cociente.

$y=3\frac{4}{7}$

$\frac{z}{150}=\frac{49}{343}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$z=\frac{150\cdot 49}{343}$ Resolviendo el producto.

$z=\frac{7\,350}{343}$ Efectuando el cociente.

$z=21\frac{3}{7}$

$\frac{u}{165}=\frac{49}{343}$ Aplicando la cuarta proporcionalidad.

$u=\frac{165\cdot 49}{343}$ Resolviendo el producto.

$u=\frac{8\,085}{343}$ Efectuando el cociente.

$u=23\frac{4}{7}$

Observamos que hemos dividido a 49 en las siguientes partes: $\frac{3}{7}, 3\frac{4}{7}, 21\frac{3}{7}$ y $23\frac{4}{7}$

Para repartir un número en partes inversamente proporcionales se invierten los números dados y se reparte el número que se quiere dividir en partes directamente proporcionales a estos inversos.

Ejemplo 4

Repartir 240 en partes inversamente proporcionales a 5, 6 y 8.

Primeramente, invertimos los enteros 5, 6 y 8, y quedan $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$.

Ahora repartiremos 240 en partes directamente proporcionales a estos racionales

Aplicando las reglas anteriores, los reduciremos al mínimo común denominador y resultarán $\frac{24}{120}, \frac{20}{120}$ y $\frac{15}{120}$.

Luego, obtenemos:

$x = \frac{240 \cdot 24}{24+20+15}$ Resolviendo el producto y la suma del denominador.

$x = \frac{5\,760}{59}$ Resolviendo el cociente.

$x = 97\frac{37}{59}$

$y = \frac{240 \cdot 20}{24+20+15}$ Resolviendo el producto y la suma del denominador.

$y = \frac{4\,800}{59}$ Resolviendo el cociente.

$y = 81\frac{21}{59}$

$z = \frac{240 \cdot 15}{24+20+15}$ Resolviendo el producto y la suma del denominador.

$z = \frac{3\,600}{59}$ Resolviendo el cociente.

$z = 61\frac{1}{59}$

De esta manera hemos repartido 240 en partes inversamente proporcionales a 5, 6 y 8. Las partes son: $97\frac{37}{59}$, $81\frac{21}{59}$ y $61\frac{1}{59}$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

Repartir los siguientes números enteros en partes directamente proporciones e inversamente proporcionales:

1. 300 en partes directamente proporcionales a 5, 7 y 9.
2. 184 en partes directamente proporcionales a: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.
3. 85 en partes proporcionales a: $0{,}5, \frac{1}{3}, 2$ y $2\frac{1}{4}$.
4. 200 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.
5. 500 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 7.

2.4 Problemas de aplicación a su entorno

Ejemplo 1

En un Centro Industrial de Café han contratado a 30 empleados por 120 días para empacar 16 000 quintales de café. ¿Cuántos empleados necesita el Centro Industrial para empacar los mismos quintales de café en 50 días?

Solución

Sabemos que $30 : 120 :: 50 : x$. Como es una proporción inversa porque a mayor número de empleados, menos días se tardarán en empacar los quintales de café.

Empleados	30	40	50
Días que se tardarán	120	90	x
Constante	3 600	3 600	3 600

Seguidamente, establecemos las proporciones y obtenemos:

$\frac{30}{x} = \frac{50}{120}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x = \frac{30 \cdot 120}{50}$ Resolviendo el producto.

$x = \frac{3600}{50}$ Efectuando el cociente.

$x = 72$ Respuesta.

Por lo tanto, 72 empleados se requieren para empacar los mismos quintales de café en 50 días.

Ejemplo 2

Un trabajador de una finca para llegar a la hacienda donde trabaja tiene que recorrer una distancia de 36 km en bicicleta. Si quiere llegar en una hora, debe recorrer 36 km/h de velocidad. ¿En cuánto km/h debe recorrer si quiere viajar en 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas, entre otros.

Solución

Analizaremos esta situación en la siguiente tabla:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5
Velocidad (km/h)	36	18	12	9	7,2

El producto $1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 5\,(7{,}2)\ldots$ es constante y es igual a 36, por lo tanto, se cumple que el producto de cada valor de una magnitud por el respectivo valor de la otra es una constante K.

Consecuentemente, el trabajador de la finca debe recorrer en 2 horas 18 km, en 3 horas 12 km, en 4 horas 9 km y en 5 horas 7,2 km

Ejemplo 3

Un Centro de producción de café necesita realizar un trabajo porque el invierno se aproxima y es urgente tener listo esa área de producción y sabe que un trabajador se tarda 48 horas en realizar este trabajo. Si el Centro de Producción contrata 2, 3, 4, 5,… trabajadores. ¿Cuántas horas necesitarán para preparar el área de producción?

Solución

Analizaremos esta situación en la siguiente tabla:

Número de obreros	1	2	3	4	5	6
Tiempo (Horas)	48	24	16	12	9,6	8

Multiplicar las magnitudes: $1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 5 \cdot 9{,}6 = 6 \cdot 8$; el producto es constante 48. Por lo tanto las magnitudes de los incisos a y b son inversamente proporcionales.

Ejemplo 4

El Director del Instituto ha orientado a un grupo de estudiantes la siembra de 1 000 plantas de pino para la reforestación del área del Instituto. Las plantas están ubicadas en los lugares donde se sembrarán. El Director tiene conocimiento de que un estudiante se tarda 10 minutos para sembrar una planta. ¿En una hora cuántas plantas se sembraran? ¿En dos horas? ¿En tres?

Solución

Analizaremos esta situación en la siguiente tabla:

Nº de plantas	1	2	3	4	5	6
Tiempo (Minutos)	10	20	30	40	50	60

Como observamos que en una hora (60 minutos) se sembraran 6 plantas. En dos horas se sembrarán 12 plantas, en tres horas 18 plantas y así sucesivamente. Si en una hora un estudiante sembró 6 plantas. ¿Cuántas plantas sembrará en 8 horas, 16 horas y en 24 horas?

Tiempo (Horas)	1	4	8	12	16	20	24
Nº de plantas	6	24	48	72	96	120	144

Observamos que si el estudiante en una hora siembra 6 plantas, entonces en 8 horas sembrará 48 plantas, ésta se obtiene al multiplicar 8 por 6, es decir

$8 \cdot 6 = 48$ y en 16 horas sembraran 96 plantas, ya que:

$16 \cdot 6 = 96$. De igual manera se sabe que:

En 24 horas sembró 144 plantas porque:

$24 \cdot 6 = 144$.

Ejemplo 5

El Administrador de la Empresa de Producción de Leche ha contratado 10 encuestadores por 8 días para la aplicación de una encuesta para verificar la calidad de la leche. Esta encuesta se aplicará a 1 200 consumidores. ¿Cuántos encuestadores necesitan para aplicar las mismas encuestas en 2 días?

Solución

Para saber cuántos trabajadores se necesitan, primeramente se construirá una tabla para analizar los datos:

Encuestadores	10	20	x
Tiempo en días	8	4	2
Constante	80	80	80

Observamos que la constante de proporcionalidad es 80 porque $K = 10 \cdot 8 = 80$

Por lo tanto, Si 10 encuestadores aplican las encuestas en 8 días, 20 encuestadores la aplicarán en 4 días y 40 encuestadores la aplicarán en 2 días.

Esto es el resultado de una proporcionalidad inversa:

$\frac{10}{2} = \frac{x}{8}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$2x = 10 \cdot 8$ Resolviendo el producto.

$x = \frac{80}{2}$ Efectuando el cociente.

$x = 40$

Por lo tanto, se necesitan 40 trabajadores para aplicar las 1 200 encuestas en 2 días.

Ejemplo 6

El responsable de la cooperativa de producción de Orquídeas tiene que repartir 500 manzanas de tierra en partes directamente proporcionales a la fecha de ingreso de los socios que son 5, 8 y 10 años. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Solución

Sabemos que las manzanas de tierra se van a repartir proporcionalmente a la fecha de ingreso y a mayor antigüedad más manzanas, luego el reparto proporcional es directo.

Llamemos x, y y z a las manzanas de terreno que recibirán los socios de la cooperativa. Establecemos la proporción manzanas de tierra y la antigüedad. A continuación se presenta el procedimiento:

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{8}=\frac{z}{10}=\frac{x+y+z}{5+8+10}=\frac{500}{23}$$

Igualando las proporciones:

$\frac{x}{5}=\frac{500}{23}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x=\frac{5\cdot 500}{23}$ Resolviendo el producto.

$x=\frac{2\,500}{23}$ Efectuando el cociente.

$x=108\frac{16}{23}$

$\frac{y}{8}=\frac{500}{23}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$y=\frac{8\cdot 500}{23}$ Resolviendo el producto.

$y=\frac{4\,000}{23}$ Efectuando el cociente.

$y=173\frac{21}{23}$

$\frac{z}{10}=\frac{500}{23}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$z=\frac{10\cdot 500}{23}$ Resolviendo el producto.

$z=\frac{5\,000}{23}$ Efectuando el cociente.

$z=217\frac{9}{23}$

Al sumar los resultados de x, y y z obtuvimos el número que repartimos, es decir:

$$108\frac{16}{23}+173\frac{21}{23}+217\frac{9}{23}=500$$

Por lo tanto, de acuerdo a sus años de ingreso recibirán:

$108\frac{16}{23}$, $173\frac{21}{23}$ y $217\frac{9}{23}$ Manzanas de tierra.

Ejemplo 7

Un abuelo reparte C$ 4 500 entre sus tres nietos de 8, 12 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Solución

Estableciendo las proporciones:

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{16}=\frac{x+y+z}{8+12+16}=\frac{4\,500}{36}$$

Igualando las proporciones, obtenemos:

$\frac{x}{8}=\frac{4\,500}{36}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x=\frac{8\cdot 4\,500}{36}$ Resolviendo el producto.

$x=\frac{36\,000}{36}$ Efectuando el cociente.

$x = 1\ 000$

$\frac{y}{12}=\frac{4\,500}{36}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$y=\frac{12\cdot 4\,500}{36}$ Resolviendo el producto.

$y=\frac{54\,000}{36}$ Efectuando el cociente.

$y = 1\ 500$

$\frac{z}{16}=\frac{4\,500}{36}$ Aplicando la propiedad fundamental

$z=\frac{16\cdot 4\,500}{36}$ Resolviendo el producto

$z=\frac{72\,000}{36}$ Efectuando el cociente

$z = 2\ 000$

Por lo tanto, los tres nietos de 8, 12 y 16 años recibieron C$ 1 000, C$ 1 500 y C$ 2 000 respectivamente.

Ejemplo 8

Tres hermanos ayudan en los gastos del hogar entregando mensualmente C$ 5 900. Si sus edades son de 20, 24 y 32 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

Solución

Primeramente, invertimos los enteros 20, 24 y 32 y quedan $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{20}$ y $\frac{1}{32}$

Ahora repartiremos590 en partes directamente proporcionales a estos racionales, para lo cual, aplicando las reglas anteriores, los reduciremos al mínimo común denominador es 480 y resultarán las siguientes proporciones:

$$\frac{24}{480}=\frac{20}{480}=\frac{15}{480}$$

Llamemos x, y y z a las ayudas de los tres hermanos. Establecemos la proporción entre la ayuda y la edad. A continuación se presenta el procedimiento:

$$\frac{x}{24}=\frac{y}{20}=\frac{z}{15}=\frac{x+y+z}{24+20+15}=\frac{5900}{59}$$

$\frac{x}{24}=\frac{5900}{59}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x=\frac{24\cdot 5900}{59}$ Resolviendo el producto.

$x=\frac{141600}{59}$ Efectuando el cociente.

$x = 2\ 400$

$\frac{y}{20}=\frac{5900}{59}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$y=\frac{20\cdot 5900}{59}$ Resolviendo el producto.

$y=\frac{118000}{59}$ Efectuando el cociente.

$y = 2\ 000$

$\frac{z}{15}=\frac{5900}{59}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$z=\frac{15\cdot 5900}{59}$ Resolviendo el producto.

$z=\frac{88500}{59}$ Efectuando la división.

$z = 1\ 500$

Por lo tanto, los tres hermanos aportan C$ 2 400, C$ 1 000 y C$ 1 500 respectivamente.

Ejemplo 9

Se asocian tres nuevos trabajadores de la producción para elevar la producción y aportaron para este cultivo C$ 6 000, C$ 8 000 y C$10 000. Finalizada la cosecha obtuvieron una ganancia de C$ 8 500. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si hacen un reparto directamente proporcional a los capitales aportados?

Solución

Sabemos que las ganancias se tienen que repartir proporcionalmente a la cantidad que se aporta y a mayor aportación más beneficios, luego el reparto proporcional es directo.

Llamemos x, y y z a los beneficios de los tres trabajadores. Establecemos la proporción entre el beneficio y la aportación. A continuación se presenta el procedimiento:

$$\frac{x}{6\,000}=\frac{y}{8\,000}=\frac{z}{10\,000}=\frac{x+y+z}{6\,000+8\,000+10\,000}=\frac{8\,500}{24\,000}$$

Igualamos cada razón que incluye variables y la razón $\frac{8\,500}{24\,000}$.

Seguidamente resolvemos las proporciones y despejamos x, y y z respectivamente.

$\frac{x}{6\,000}=\frac{8\,500}{24\,000}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x=\frac{6\,000\cdot 8\,500}{24\,000}$ Resolviendo el producto.

$x=\frac{51\,000\,000}{24\,000}$ Efectuando el cociente.

$x = 2\ 125$

$\frac{y}{8\,000}=\frac{8\,500}{24\,000}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$y=\frac{8\,000\cdot 8\,500}{24\,000}$ Resolviendo el producto.

$y=\frac{68\,000\,000}{24\,000}$ Efectuando el cociente.

$y=2833\frac{8}{24}$

$\frac{z}{10\,000}=\frac{8\,500}{24\,000}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$z=\frac{10\,000\cdot 8\,500}{24\,000}$ Resolviendo el producto.

$z=\frac{85\,000\,000}{24\,000}$ Efectuando el cociente.

$z=3541\frac{16}{24}$

Según la aportación, el trabajador uno recibirá C$ 2 125 el trabajador dos recibirá C$ 2 833,33 y el trabajador tres recibirá C$ 3 541,66.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Resolvamos correctamente los siguientes problemas:

1. En un Centro de Acopio han almacenado 1 000 quintales de granos básicos. ¿Cuántos quintales de frijoles se almacenaron si se orientó que por cada 4 quintales de maíz se almacenaran 3 quintales de frijoles?

2. En un Centro Industrial de Café han contratado a 20 empleados por 80 días para empacar 15 000 quintales de café. ¿Cuántos empleados necesita el Centro Industrial para empacar los mismos quintales de café en 50 días?

3. En una comunidad un grupo de estudiantes sembraron dos manzanas de árboles frutales. Decidieron sembrar 400 árboles de mangos y mandarinas. ¿Cuántos árboles de mangos se sembraron, si se determinó sembrar 4 árboles de mangos por cada 7 árboles de mandarinas?

4. Un trabajador de una finca para llegar a la hacienda donde trabaja tiene que recorrer una distancia de 24 km en bicicleta. Si quiere llegar en una hora, debe recorrer 24 km/h de velocidad. ¿En cuánto km/h debe recorrer si quiere viajar en 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas, entre otros.

5. Un Centro de producción de café necesitan tener listo el de producción y tienen conocimiento que un trabajador se tarda 36 horas en realizar este trabajo. Si el Centro de Producción contrata 2, 3, 4, 5,… trabajadores. ¿Cuántas horas necesitarán para preparar el área de producción.

6. El Director del Instituto ha orientado a un grupo de estudiantes la siembra de 800 plantas de chilamates para la reforestación de alrededor del río cerca del Instituto. Las plantas están ubicadas en los lugares donde se sembrarán. El Director sabe que un estudiante se tarda 10 minutos para sembrar una planta. ¿En una hora cuántas plantas se sembraran? ¿En dos horas? ¿En tres? ¿En cuánto tiempo sembraran las 800 plantas?

3 Regla de tres

Indicador de logro

Resuelve problemas de su realidad que impliquen el uso de la regla de tres simple directa e inversa, regla de tres compuesta, directa e inversa.

3.1 Regla de tres: conceptos básicos.

Si un joven que está aplicando una encuesta atiende 15 estudiantes en una hora. ¿Cuántos estudiantes serán atendidos en 8 horas?

Podemos observar que es fácil responder a la pregunta aplicando una regla de tres.

¿Qué es una regla de tres?

La regla de tres es una forma de resolver problemas de proporcionalidad entre tres o más valores conocidos y una incógnita. En ella se establece una relación de linealidad (proporcionalidad) entre los valores involucrados.

Regla de tres es la operación de hallar el cuarto término de una proporción conociendo los otros tres.

¿Si en una hora atiende a 15 estudiantes, entonces en 8 horas a cuántos estudiantes atenderá?

1 Hora	15 Estudiantes
8 Horas	x

Ejemplo 1

Analizando el ejercicio anterior, podemos observar que si un joven que aplica una encuesta atiende a 15 estudiantes en una hora. Entonces, averiguaremos ¿Cuántos estudiantes serán atendidos en 8 horas?

Conocemos tres términos y aplicando la regla de tres calcularemos el valor de x, es decir encontraremos el número de estudiantes que serán atendidos en 8 horas.

Estableceremos la siguiente proporción:

$\frac{1}{15} = \frac{8}{x}$ Aplicando el principio fundamental de las proporciones

$x \cdot 1 = 15 \cdot 8$ Resolviendo los productos en ambos miembros

$x = 120$

Respuesta: 120 estudiantes serán atendidos en 8 horas.

Ejemplo 2

Si un automóvil recorre 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas?

240 km	3 horas
x	2 horas

Solución

Conocemos tres términos y aplicando la regla de tres calcularemos el valor de X, es decir encontraremos el número de kilómetros que habrá recorrido en 2 horas.

Estableceremos la siguiente proporción:

$\frac{240}{x} = \frac{3}{2}$ Aplicando el principio fundamental de las proporciones.

$x \cdot 3 = 2 \cdot 240$ Resolviendo los productos en ambos miembros.

$x = \frac{480}{3}$ Efectuando el cociente.

$x = 160$

Respuesta: 160 kilómetros recorrió en 2 horas.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. Si 2 litros de gasolina cuestan C$56, ¿Cuánto litros se pueden comprar con $150.
2. Un automóvil recorre 30 km en un cuarto de hora, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en una hora y media?
3. Una taza de agua eleva su temperatura en 5°C al estar 45 minutos al sol, ¿Cuántos grados se elevará después de 2 horas?
4. Si un estudiante camina 3 km en una hora y cuarto, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 3 horas?
5. Un automóvil recorrió 279 km con 61 litros de combustible, ¿Cuántos kilómetros recorre por litro?
6. Si necesito 2 bidones de pintura para pintar 3 aulas de clase, ¿cuántos bidones necesito para pintar 5 aulas de clases?
7. Si 8 trabajadores construyen un muro en 15 horas, ¿cuánto tardarán 5 trabajadores en levantar el mismo muro?

8. Si 4 libros cuestan C$ 240. ¿Cuánto costarán 15 libros?

3.2 Regla de tres simple directa e inversa.

Cuando se plantean situaciones cuyos datos se relacionan mediante una proporcionalidad de dos razones, decimos que se trata de un problema de regla de tres simple.

La regla de tres simple puede ser DIRECTA o INVERSA, según sean las cantidades que intervienen en el cálculo (directa o inversamente proporcionales).

En ambos casos el problema se reduce a calcular un término, cuando se conocen los otros tres.

Regla de tres directa:

Consiste en que dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes directamente proporcionales, calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.

La regla de tres directa la aplicaremos cuando entre las magnitudes se establecen las relaciones.

A más entonces más

A menos entonces menos

En una regla de tres el supuesto está constituido por los datos de la parte del problema que ya se conoce y la pregunta por los datos de la parte del problema que contiene la incógnita.

Ejemplo 1

Si un maestro en una hora ha atendido a 15 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes serán atendidos en 8 horas?

Solución

El supuesto está constituido por 1 hora y 15 estudiantes, la pregunta por 8 horas y x estudiantes.

Supuesto	1 hora	15 estudiantes
Pregunta	8 horas	x

Apliquemos los conocimientos que tenemos sobre proporciones:

Como a más horas más estudiantes, estas cantidades son directamente proporcionales; por lo tanto podemos igualar las razones directas.

$$\frac{1}{8} = \frac{15}{x}$$

Planteamos la multiplicación de los medios igual ala multiplicación de los extremos:

$x = 8 \cdot 15$

$x = 90$

Esto significa que en 8 horas atenderá a 90 estudiantes.

Ejemplo 2

Si Cuatro libros cuestan C$ 80, ¿cuánto costarán 15 libros?

Solución

El supuesto está constituido por 4 libros y C$ 80 y la pregunta por 15 libros y x córdobas.

Supuesto	4 libros	C$ 80
Pregunta	15 libros	x

Apliquemos los conocimientos que tenemos sobre proporciones:

Como a más libros más córdobas, estas cantidades son directamente proporcionales; por lo tanto podemos igualar las razones directas.

$\frac{4}{15} = \frac{80}{x}$ Aplicando la propiedad fundamental

$x = \frac{15 \cdot 80}{4}$ Resolviendo el producto

$x = \frac{1200}{4}$ Efectuando el cociente

$x = 300$

Esto significa que en 15 libros costarán C$ 300.

Ejemplo 3

Cuatro hombres hacen una obra en 12 días. ¿En cuántos días harán la misma obra 7 hombres?

Solución

Supuesto	4 hombres	12 días
Pregunta	7 hombres	x

Como a más hombres menos días, estas cantidades son inversamente proporcionales por lo que la proporción se forma igualando la razón directa de las dos primeras con la razón inversa de las dos últimas o viceversa:

$\frac{4}{7} = \frac{x}{12}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x = \frac{12 \cdot 4}{7}$ Resolviendo el producto.

$x = \frac{48}{7}$ Efectuando el cociente

$x = 6\frac{6}{7}$

Esto significa que en 7 hombres harán la obra en $6\frac{6}{7}$ días.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Resolvamos correctamente los siguientes problemas

1. Ana compra 5 libras de avena, si 2 libras cuestan C$ 46 ¿cuánto pagará Ana?
2. Si 2 litros de aceite cuestan C$ 76, ¿Cuánto litros se pueden comprar con $ 228.
3. Un automóvil recorre 150 km en 2 horas, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 3 horas y media?
4. Un automóvil recorre 160 km en 2 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 3 horas?
5. Si María por dos horas de clase que atiende las consultas de sus compañeros le pagan C$ 25. ¿Cuánto le pagarán por 5 horas?
6. Si 12 trabajadores construyen un muro de 100 metros en 15 horas, ¿cuántos trabajadores se necesitarán para levantar un muro de 75 metros en 26 horas?
7. Una estufa de 4 quemadores ha consumido C$ 50,00 de gas al estar encendidos 2 de ellos durante 3 horas. ¿Cuál es el precio del gas consumido si se encienden los 4 quemadores durante el mismo tiempo?
8. Cuatro automóviles llevan a 16 estudiantes en un recorrido de 120 km en 90 minutos. ¿Cuántos automóviles se necesitan para transportar a 58 estudiantes en el mismo recorrido y en el mismo tiempo?

3.3 Regla de tres compuesta directa e inversa.

Para introducir este contenido, apliquemos los conocimientos que tenemos sobre proporciones.

¿En qué consiste el método el método de las proporciones?

El método de las proporciones consiste en descomponer la regla de tres compuesta en reglas de tres simples y luego multiplicar ordenadamente las proporciones formadas.

Al formar cada regla de tres simple, consideramos que las demás magnitudes no varían.

Ejemplo 1

Tres hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 60 metros de la misma obra?

Solución

Supuesto	3 hombres	8 horas	80 metros	10 días
Pregunta	5 hombres	6 horas	60 metros	x

En este caso tenemos tres proporciones:

Primera proporción	3 hombres	10 días
	5 hombres	x

A más hombres menos días; luego son inversamente proporcionales:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{x}$$

Segunda proporción	8 hombres	10 días
	6 hombres	x

A menos horas diarias más días; luego son inversamente proporcionales:

$$\frac{6}{8} = \frac{10}{x}$$

Tercera proporción	80 metros	10 días
	60 metros	x

A menos metros diarios menos días; luego son directamente proporcionales:

$$\frac{80}{60} = \frac{10}{x}$$

Multiplicando término a término las proporciones 1, 2 y 3 tenemos:

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 80}{3 \cdot 8 \cdot 60} = \frac{10}{x}$$

$$x = \frac{10 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 60}{5 \cdot 6 \cdot 80} = \frac{14\,400}{2\,400}$$

$x = 6$

Seis días necesitarán 5 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 60 metros de la misma obra

Ejemplo 2

Dos estudiantes dedicando 8horas diarias realiza 100 ejercicios de matemática en 10 días. ¿Cuántos días necesitará un equipo de 4 estudiantes, dedicando 5 horas diarias, para hacer 50 ejercicios de la misma guía de matemática?

Solución

Supuesto	2 estudiantes	8 horas	100 ejercicios	10 días
Pregunta	4 estudiantes	5 horas	50 ejercicios	x

En este caso tenemos tres proporciones:

Primera proporción	4 estudiantes	10 días
	2 estudiantes	x

A más hombres menos días; luego son inversamente proporcionales:

$$\frac{4}{2}=\frac{10}{x}$$

Segunda proporción	8 horas	10 días
	5 horas	x

A menos horas diarias más días; luego son inversamente proporcionales:

$$\frac{5}{8}=\frac{10}{x}$$

Tercera proporción	100 ejercicios	10 días
	50 ejercicios	x

A menos ejercicios diarios menos días; luego son directamente proporcionales:

$$\frac{100}{50}=\frac{10}{x}$$

Multiplicando término a término las proporciones 1, 2 y 3 tenemos:

$$\frac{4\cdot 5\cdot 100}{2\cdot 8\cdot 50}=\frac{10}{x}$$

$$x=\frac{10\cdot 2\cdot 8\cdot 50}{4\cdot 5\cdot 100}=\frac{8\,000}{2\,000}$$

$$x=4$$

Por lo tanto,4 días necesitará un equipo de 4 estudiantes, dedicando 5 horas diarias, para hacer 50 ejercicios de guía de matemática.

Método práctico para resolver cualquier problema de regla de tres simple o compuesta.

Se escribe el supuesto y la pregunta. Se compara cada una de las magnitudes con la incógnita (suponiendo que las demás no varían), para ver sin son directa o inversamente proporcionales con la incógnita.

A las magnitudes que sean directamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo + y encima un signo –, y a las magnitudes que sean inversamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo – y encima un signo +.

El valor de la incógnita *x*, será igual al valor conocido de su misma especie (al cual siempre se le pone +), multiplicado por todas las cantidades que llevan el signo + (más), partiendo este producto por el producto de las cantidades que llevan el signo el signo – (menos).

Ejemplo

Tres hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 60 metros de la misma obra?

	–	–	+	+
Supuesto	3 hombres	8 horas	80 metros	10 días
Pregunta	5 hombres	6 horas	60 metros	*x*
	+	+	–	

$$x = \frac{10 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 60}{5 \cdot 6 \cdot 80}$$

$x = 6$

Por lo tanto, 5 hombres trabajando 6 horas diarias, harán 60 metros de la obra en 6 días.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. Tres muchachos tienen C$ 80 el primero, C$ 40 el segundo y C$ 30 el tercero. Convienen entregar entre todos C$ 30 a los pobres, contribuyendo cada uno en proporción a lo que tienen. ¿Cuánto pondrá cada uno?
2. De las 120 aves que tiene un campesino, el número de gallinas es triple que el de gallos y el número de patos es la semisuma de los gallos y gallinas. ¿Cuántas aves de cada especie tiene?
3. Un padre reparte C$ 50 en partes proporcionales a la buena conducta de sus hijos. El 1° ha tenido 4 faltas, el segundo 3, el tercero 2 y el cuarto 1 falta. ¿cuánto recibirá cada hijo?
4. Cuatro hombres han realizado una obra en 90 días. El primero recibió C$ 5 000 el segundo C$ 4 000 el tercero C$ 6 000, y el cuarto C$ 3 000 ¿Cuántos días trabajó cada uno?
5. Tres mujeres trabajando 8 horas diarias han confeccionado100 metros de tela en 12 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 mujeres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 80 metros de la

misma tela?

6. Un equipo de 4 estudiantes de séptimo grado dedicando 5 horas diarias realizó 50 ejercicios de matemática en 10 días. ¿Cuántos días necesitará un equipo de 8 estudiantes, dedicando 3 horas diarias, para hacer 40 ejercicios de la misma guía de matemática?

4 Aplicación comercial de la regla de tres

Indicador de logro

Resuelve problemas de su vida cotidiana utilizando repartos proporcionales directo e inverso, interés simple y porcentaje.

La regla de tres es una forma de resolver problemas de proporcionalidad entre tres o más valores conocidos y una incógnita.

Con la aplicación de la regla de tres podemos establecer una relación de proporcionalidad entre los valores involucrados. Cuando se plantean situaciones cuyos datos se relacionan mediante una proporcionalidad de dos razones, decimos que se trata de un problema de regla de tres.

4.1 Porcentaje.

En la vida diaria aparecen muchos problemas relacionados con el porcentaje.

Todos hemos oído frases como:

El banco cobra el 36 por ciento anual por intereses a un préstamo.

Esto significa, que por cada cien córdobas que se adquiere en un préstamo bancario, debemos de pagar 36 córdobas de intereses al año.

El 90 por ciento de los estudiantes de séptimo grado aprobaron el I semestre.

Esto significa que de cada 100 estudiantes 90 de ellos aprobaron el I semestre.

La palabra porcentaje significa “dividido por 100”, y se representa por el símbolo %.

Ejemplo 1

Si cuando se repartió la leche en la escuela que atiende 100 niños, no se encontraban 3 niños, entonces ¿qué porcentaje representan estos 3 niños?

Solución

En este caso vamos a plantear la división $\frac{3}{100}$ entonces

$\frac{3}{100} = 0,03$. Este resultado equivale al 3%.
Dicho de otra manera 3% significa 3 de 100.

¡Analicemos esta información!

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional en el informe que presentó a la Asamblea Nacional expuso que la producción de leche fue de 225 millones de galones, el 4% mayor que 2012. Entonces, ¿cuál fue la producción de leche en el año 2012?

Primeramente, encontramos la cantidad que corresponde al 4% y resulta:

225 000 000 (0,04) = 9 000 000, entonces

9 000 000 es el 4% de los galones de leche que se produjeron en el 2013

Ahora restamos el 4% de la producción del 2013 y obtenemos:

225 000 000 – 9 000 000 = 216 000 000

Por lo tanto 216 000 000 galones de leche fue la producción del 2012.

Como veremos el porcentaje es un caso particular en la aplicación de la regla de tres simple directa.

¿Cómo hallar el tanto por ciento de un número? Para encontrar el tanto por ciento de un número planteamos una regla de tres simple.

Ejemplo 2

Si me pagaron C$32 por la venta de una libra de cuajada y me gané el 15%. ¿Cuánto fue la ganancia que obtuve en córdobas?

Solución

Recordemos que el 100% de un número es el mismo número.

Así, el 100% de 32 es 32

Porcentaje	Número
100%	32
15%	x

Utilizando las proporciones tenemos:

$\frac{100}{15} = \frac{32}{x}$ Aplicando la Propiedad fundamental

$x = \frac{32 \cdot 15}{100}$ Resolviendo el producto

$x = \frac{480}{100}$ Efectuando el cociente

$x = 4{,}8$

Luego el 15% de 32 es 4,8

Analicemos ahora el caso contrario, busquemos el número conociendo el porcentaje.

Ejemplo 3

Si al comprar un cuaderno me rebajaron C$7 y el vendedor me afirmó que me rebajó el 25% ¿Cuánto es el costo total del cuaderno?

Solución

Porcentaje	Número
100%	x
25%	7

Primeramente, establecemos las proporciones:

$\frac{100}{25} = \frac{x}{7}$ Aplicando la propiedad fundamental

$x = \frac{7 \cdot 100}{25}$ Resolviendo el producto

$x = \frac{700}{25}$ Efectuando el cociente

$x = 28$

Luego el número es 28, es decir el 25% de 28 es 7.

¡Bien! ¿Cómo encontramos el porcentaje?

Ejemplo 4

Supongamos que Paola tiene un cuaderno de 50 hojas y utilizo 20 de ellas ¿qué porcentaje del cuaderno ha utilizado?

Solución

Siguiendo el mismo análisis tenemos, que el 100% son las 50 hojas hallaremos el porcentaje correspondiente a 20 hojas

Porcentaje	Número
100%	50
x	20

Estableciendo las proporciones $\frac{100}{x} = \frac{50}{20}$, resolviendo tenemos:

$x = \frac{100 \cdot 20}{50} = \frac{2\,000}{50} = 40$, luego Paola ha utilizado el 40% del cuaderno.

Ejemplo 5

Pedro tuvo problemas para pagar la cuota del préstamo y éste tuvo que vender el 63% de sus gallinas. Si en el corral aún quedan 74 gallinas ¿cuántas gallinas tenía Pedro?

Solución

Si vendió el 63% de sus gallinas, significa que en el corral está el 37% de las gallinas restantes, por lo tanto debemos calcular a cuánto equivale el 100%:

Porcentaje	Número
37%	74
100%	x

De aquí que:

$\frac{37}{100} = \frac{74}{x}$ Aplicando la propiedad fundamental.

$x = \frac{74 \cdot 100}{37}$ Resolviendo el producto.

$x = \frac{7\,400}{37}$ Efectuando el cociente.

x=200

Luego Pedro tenía 200 gallinas.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. I. Calculemos los siguientes porcentajes mentalmente y luego realicemos el procedimiento en el cuaderno:

1. ¿Cuál es el 50% de 120?
2. ¿Cuál es el 25% de 400?
3. ¿Cuál es el 75% de 8?
4. ¿De qué número es10 el 40%?
5. ¿Qué porcentaje de 160 es 16?
6. ¿Qué porcentaje de 5000 es 250?

II. II. Resolvamos correctamente los siguientes problemas:

1. La finca de Anita tiene 480 manzanas. El 35% de la mitad de la finca la tiene sembrada de frutales y el resto lo ocupa para el ganado. ¿Cuántas manzanas ocupa para el ganado?
2. De una finca de 50 manzanas se vende el 16% y se alquila el 14%. ¿Cuántas manzanas quedan?
3. Se compra una propiedad pagando el 56% del precio de contado. Si la cantidad pagada es \$4816, ¿cuál es el valor de la propiedad?
4. De los 150 estudiantes de una escuela, 27 son niñas. Hallar el % de varones.

5. Un Señor que tenía 120 gallinas vendió 40. ¿Qué porcentaje vendió y qué porcentaje le queda?
6. Un ganadero vendió el 36% de sus reses y se quedó con 160. ¿cuántas reses tenía?

4.2 Interés simple.

A menudo hemos escuchado decir que el dinero produce dinero.

¿Esta aseveración es verdadera? ¿Qué opiniones podemos expresar?

Podemos afirmar que esta aseveración es verdadera, ya que "si nosotros elegimos invertir dinero hoy, ya sea en un banco o en una cooperativa o en una financiera de ahorro y préstamo, mañana habremos acumulado más dinero que el que hemos invertido actualmente".

Este cambio en la cantidad de dinero durante un periodo de tiempo es lo que se conoce como el valor cronológico del dinero.

También debemos notar que "si una persona o empresa o cooperativa de producción pide hoy dinero prestado, mañana tendrá que pagar una cantidad mayor", debido al valor del dinero en el tiempo.

Sabemos que el uso de capital no es gratuito y el concepto de interés surge precisamente de esto, aunque el Antiguo Testamento prohibía específicamente los préstamos con tasa de interés a los miembros de una misma comunidad.

El interés es la cantidad convenida que se paga por el uso del dinero en calidad de préstamo o depósito.

La evidencia del valor del dinero en el tiempo de llama interés, y es una medida del incremento entre la suma de dinero prestada o invertida y la cantidad final debida o acumulada.

En síntesis:

El interés simple es aquel interés que se genera sobre un capital que permanece constante por un tiempo. Simbólicamente se escribe I_S

4.3 Cálculo de interés simple.

¿Qué método aplicaremos para calcular el interés simple?

Para que realicemos el cálculo de interés simple, primeramente describiremos el método vamos a aplicar en la resolución de problemas de la vida cotidiana. A continuación se presenta:

Método de interés simple

Es un método de cálculo financiero donde el capital invertido no sufre ninguna variación en el tiempo que dura la transacción, es decir la tasa de interés se aplica solamente al principal inicial en base el tiempo estipulado. El interés simple está dado por la fórmula:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Donde:

I: Interés acumulado o devengado.

P: Principal (Cantidad prestada o ahorrada)

i: Tasa de interés del periodo (día, mes, trimestre, semestre, año, entre otros)

n: Plazo o número de periodos (día, mes, trimestre, semestre, año, entre otros)

Para que usemos correctamente la fórmula es necesario que las variables relacionadas con el plazo (n) y la tasa de interés (i) estén definidas en el mismo periodo de tiempo, por ejemplo.

En el último caso (d) para usar la fórmula se deben convertir 6 meses a 0,5 años o bien 20% anual a 1,6667% mensual.

$n = 1$ trimestre $\quad i = 4\%$ trimestral: $\dfrac{4}{100} = 0{,}04$ trimestral.

$n = 5$ años $\quad i = 18\%$ anual: $\dfrac{18}{100} = 0{,}18$ anual

$n = 10$ meses $\quad i = 2\%$ mensual: $\dfrac{2}{100} = 0{,}20$ mensual

$n = 6$ meses $\quad i = 20\%$ anual: $\dfrac{20}{100} = 0{,}20$ anual

Si la tasa de interés (i) está definida en año y el plazo (n) en días, usaremos el factor $\dfrac{n}{360}$; si (n) está dada en meses usaremos $\dfrac{n}{12}$

Para determinar el plazo en días, o sea entre fecha y fecha se utilizan todos los días efectivos entre las fechas respectivas y se dividen por 360 días correspondientes al año comercial para anualizar el plazo.

Definiremos los siguientes conceptos interés, principal, Banco CARUNA, USURA CERO, Banco Produzcamos, entre otros;

¿Qué es el interés?

Es un índice utilizado para medir la rentabilidad de los ahorros o también el costo de un crédito. Se expresa generalmente como un porcentaje.

Dada una cantidad de dinero y un plazo o término para su devolución o su uso, el tipo de interés indica qué porcentaje de ese dinero se obtendría como beneficio, o en el caso de un crédito, qué porcentaje de ese dinero habría que pagar.

Es frecuente aplicar el interés sobre períodos de un año, aunque se pueden utilizar períodos diferentes como un mes o el número días. El tipo de interés puede medirse como el tipo de interés nominal o como la tasa anual equivalente. Ambos números están relacionados aunque no son iguales.

¿Qué es CARUNA?

La utilización de sociedades cooperativas en actividades propias de las zonas rurales tiene su origen en Alemania donde, durante el año 1864, nacieron las cajas rurales de préstamo, orientadas en los valores de la autoayuda, la autoadministración y la autorresponsabilidad.

Actualmente **CARUNA, R.L.** es la cooperativa más grande del país y cumplirá 18 años de atender a los sectores populares y sus miles de trabajadores cumplen cabalmente con el lema: CALIDAD - CONFIANZA - COMPROMISO en beneficio de los 28 550 asociados y de las 250 cooperativas integradas, demostrando de ésta forma que el Cooperativismo es la ruta y el sandinismo su guía.http://www.caruna.com.ni

¿Banco Produzcamos?

El Banco Produzcamos realiza préstamos a tasas de interés especial, sin cobro de comisión alguna y en dependencia del tipo de programa, el plazo, origen de los fondos y actividad a financiar. El Banco Produzcamos ha administrado programas dirigidos a ganadería, agricultura, pequeños negocios, turismo, energía hidroeléctrica, Costa Caribe, juventud y mujer.

Programa de Micro Crédito Usura Cero

El Programa Usura Cero, fue creado por el Gobierno de Reconciliación yUnidad Nacional, en el año 2008, y consiste en otorgar créditos a mujeres a una tasa de interés justa, restituyéndoles el derecho a tener financiamiento para impulsar pequeños negocios, principalmente desde sus hogares.

Las participantes del programa son mujeres mayores de 18 años, desempleadas y sin ingresos, que se organizan en grupos solidarios. El monto máximo por socia es de C$5,500.00, a una tasa de interés anual del 5% sobre saldos y a un plazo entre 3 y 8 meses

¿Qué es el INFOCCOP? ¿Cómo se constituye?

INFOCOOP es el Instituto Nicaragüense de Fomento Cooperativo se constituye con personalidad jurídica propia, con autonomía administrativa y funcional, es el organismo rector de la política nacional de protección, fomento y desarrollo cooperativo, además de la regulación, suspensión, supervisión y control de las cooperativas. Tiene como objetivo principal fomentar, promover, divulgar y apoyar el movimiento cooperativo a todos los niveles.

Ejemplo 1

Calcular el interés que devenga un depósito de C$ 25 000 en un banco a una tasa de interés simple de 5% a plazo fijo de 10 meses.

Solución

P = C$25 000

$$n = \frac{10}{12} = 0{,}83333 \text{ año}$$

$i = 5\%$

$i = \dfrac{5}{100}$

$i = 0{,}05$ anual, Sustituyendo en la fórmula:

$I = P \cdot i \cdot n$ Obtenemos:

$I = (25\ 000)(0{,}05)(0{,}8333)$

$I = 1\ 041{,}25$

El interés que devenga el depósito es C$ 1 049,25

Ejemplo 2

El Presidente de la Cooperativa de Producción de hortalizas y plántulas solicitó un préstamo de C$ 200 000 córdobas a 6 meses de plazo a una tasa de interés simple de 10%. Calcular la cantidad que pagará en concepto de interés al final del plazo.

Solución

P = C$ 200 000

$n = 6$ meses

$i = 10\%$ anual: $\dfrac{10}{100} = 0{,}10$ anual

$I = P \cdot i \cdot n$ Sustituyendo en la fórmula:

$I = (200\ 000)(0{,}10)(6)$

$I = 120\ 000$

La cantidad que pagara en concepto de interés al final del plazo es C$ 120 000.

A continuación introduciremos el concepto de pagaré y los requisitos.

Pagaré:

Un pagaré es una promesa escrita de pagar una cantidad de dinero, a una persona determinada en el documento o a su orden o al tenedor del documento, en una fecha determinada

Requisitos.

Los pagares deben contener:

- El nombre específico del pagaré.
- La fecha en que expide.
- La cantidad (Valor Nominal)
- La fecha del pago.
- El nombre y apellidos de la persona a cuya orden se habrá hacer el pago.

- El origen del valor que representa (Valor recibido).
- La firma del que contrae la obligación de pagar.

Plazo y vencimiento

Los pagares pueden otorgarse a su presentación, a días fecha, a meses fecha y a fecha fija. Los primeros vencen en cualquier tiempo; los demás el día señalado.

Endoso

Los pagaré expedidos “a la orden” son endosables; si son expedidos a persona determinada nos son endosables.

Interés

Cuando en el pagaré se estipula que ganará un porcentaje de interés, este porcentaje de interés es sobre el valor nominal y el pagaré gana interés desde la fecha en que se expide hasta el día de vencimiento. Entonces el valor nominal del pagaré es la cantidad escrita en el mismo más el interés que debe ganar hasta el vencimiento.

Ejemplo 3

¿Qué cantidad de interés devenga un pagaré cuyo valor nominal es de C$50 000 a un plazo de 270 días a una tasa de interés del 0,95% mensual?

Solución

$P = \text{C\$}50\,000$

$n = \dfrac{270}{360}$

$n = 0{,}75$

$i = 0{,}0095(12)$

$i = 0{,}114$ anual

Aplicando la fórmula:

$I = P \cdot i \cdot n$ Obtenemos:

$I = (50\,000)(0{,}114)(0{,}75)$

$I = 4\,275$

La cantidad que interés que devenga es C$ 4 275.

También resulta lo mismo si:

$n = \dfrac{270}{30}$

$n = 9$ meses

$i = 0{,}0095$ mensual

Aplicando la fórmula:

$I = (50\ 000)(0{,}0095)(9)$

$I = 4\ 275$

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. Calculemos el monto y el interés simple comercial de:
2. La cantidad de C$ 20 300 durante 114 días al 12% semestral.
3. La cantidad de C$ 1 800 desde 10 de agosto al 12 de diciembre del mismo año al 12%.
4. La cantidad de C$ 18 146 durante 10 meses y 25 días al 25%.
5. La cantidad de C$ 150 800 desde el 3 de febrero al 25 de octubre del mismo año, al 0,9% mensual.
6. La cantidad de C$ 10 000 durante 8 meses y 18 días al 0,88% mensual.
7. La cantidad de C$ 20 300 durante 114 días al 12% semestral.
8. La cantidad de C$ 1 800 desde 10 de agosto al 12 de diciembre del mismo año al 12%.
9. La cantidad de C$ 18 146 durante 10 meses y 25 días al 25%.
10. La cantidad de C$ 150 800 desde el 3 de febrero al 25 de octubre del mismo año, al 0,9% mensual.
11. Calcular el interés simple producido por un capital de C$ 30 000 invertido durante 4 años a una tasa del 6 % anual.
12. Calcular el interés simple producido por C$ 60 000 durante 90 días a una tasa de interés anual del 5 %.
13. Al cabo de un año, un banco ha ingresado en una cuenta de ahorro, en concepto de intereses, C$ 1 500. La tasa de interés de una cuenta de ahorro es del 2 %. ¿Cuál es el saldo medio (capital) de dicha cuenta en ese año?
14. Un préstamo de C$ 40 000 se convierte al cabo de un año en C$ 44 500. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?

4.4 Descuento comercial.

El descuento comercial es el porcentaje del precio de venta que el proveedor está dispuesto a reducir y ofrecer al detallista, sin importar cuándo se haga el pago de esa mercancía.

La reducción del descuento comercial del precio de lista es el precio neto, es decir, la cantidad que el detallista pagará al proveedor.

En otras palabras podemos afirmar que:

El descuento comercial es el porcentaje del precio de venta que el proveedor está dispuesto a reducir y ofrecer al detallista, sin importar cuándo se haga el pago de esa mercancía. La reducción del descuento comercial del precio de lista es el precio neto, es decir, la cantidad que el detallista pagará al proveedor. Al descuento comercial también se le llama bancario. A continuación se presenta:

Descuento Comercial o Bancario

El descuento comercial o bancario es un instrumento de financiación bancaria a corto plazo, utilizado principalmente por las empresas y ofrecido como servicios por parte de las entidades financieras.

A través del descuento comercial o bancario, una entidad financiera (banco, caja o entidad de crédito) anticipa a un cliente el importe de un crédito que aún no ha vencido y que generalmente es el resultado de la venta de bienes, suministros o servicios a un tercero.

La entidad financiera es la encargada de realizar la gestión de los cobros del valor nominal de dicho crédito al cliente de la empresa. Los descuentos comerciales o bancarios en las empresas eliminan los costes administrativos derivados de la gestión de los cobros, pues éstos pasan a ser una gestión que desarrolla la entidad financiera.

El descuento simple bancario (D) es la diferencia entre el valor futuro o final (F) a pagar y el valor presente (P). Fundamentalmente consiste en cobrar intereses de forma anticipada o por adelantado y se calcula con base al valor final del documento en la fecha de vencimiento.

$$D = F - P; \text{ pero } D = I$$

Entonces: $D = F \cdot d \cdot n$, donde d: tasa del descuento y n: plazo del descuento

Ejemplo 1

El Señor Marcelino compra en el Banco Central de Nicaragua un Certificado Negociable de Inversión, cuyo valor facial es de C$10 000 a una tasa de descuento del 8,70% a 270 días de plazo. Calcular:

a. El valor del descuento

b. El valor de la inversión

Solución

Sabemos que: F = C$ 10 000; d = 8,70; n =270 días; D = ?; P = ?; r = ?

Resolviendo obtenemos:

$$D = F \cdot d \cdot n;\ D = 10\,000(0{,}087)\left(\frac{270}{360}\right) = 652{,}50$$

El valor del descuento es C$ 652,50

P = F − D P = 10 000 − 652,50 = 9 347,50

Por lo tanto, el valor de la inversión es C$ 9 347,50.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

I. Resolvamos correctamente los siguientes problemas aplicando en descuento comercial.

1. La Señora Rodríguez compra en el Banco Central de Nicaragua un Certificado Negociable de Inversión, cuyo valor facial es de C$ 20 000 a una tasa de descuento del 8,50% a 300 días de plazo. Calculemos:
   a. El valor del descuento.
   b. El valor de la inversión.
2. El Señor Mendoza compra en el Banco Central de Nicaragua un Certificado Negociable de Inversión, cuyo valor facial es de C$ 25 000 a una tasa de descuento del 8,90% a 240 días de plazo. Calculemos:
   a. El valor del descuento.
   b. El valor de la inversión.

4.5 Problemas de aplicación a su entorno.

Ejemplo 1

En un informe del Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional informó que en el año 2 013 Nicaragua produjo 225 millones de galones de leche, si para el 2 014 se espera aumentar el 6% de la producción. ¿Cuántos galones de leche se espera producir?

Solución

Primeramente, encontramos la cantidad que corresponde al 6% y resulta:

225 000 000(0,06) = 13 500 000, entonces:

13 500 000 es el 6% de los galones de leche que se produjeron en el 2 013.

Ahora sumamos el 6% de la producción del 2 013 y obtenemos:

225 000 000 + 13 500 000 = 238 500 000

Por lo tanto 238 500 000 galones de leche será la producción del 2 014.

Ejemplo 2

El Presidente de la Cooperativa de Producción del café planea solicitar un préstamo de C$250 000 a 24 meses de plazo a una tasa de interés simple de 10%. Calcular la cantidad que pagará en concepto de interés al final del plazo.

Solución

$i = 0{,}1$ mensual.

Aplicando la fórmula:

$I = P \cdot i \cdot n$, Obtenemos:

$I = (250\ 000)(0{,}1)(24)$

$I = 150\ 000.$

La cantidad que pagara en concepto de interés al final del plazo es C$ 150 000.

Ejemplo 3

¿Qué cantidad de interés devenga un pagaré cuyo valor nominal es de C$ 100 000 a un plazo de 330 días a una tasa de interés del 0,85% mensual?

Solución

Sabemos que:

$P =$ C$ 100 000

$n = \dfrac{330}{360}$

$n = 0{,}92;$

$i = 0{,}0085(12)$

$i = 0{,}102$ anual Aplicando la fórmula:

$I = P \cdot i \cdot n$

$I = (100\ 000)(0{,}102)(0{,}85)$

$I = 8\ 670$

La cantidad que interés que devenga es C$ 8 670.

Ejemplo 4

Una Cooperativa de producción compra en el Banco Central de Nicaragua un Certificado Negociable de Inversión, cuyo valor facial es de C$150 000 a una tasa de descuento del 8,60% a 300 días de plazo. Calcular:

a. El valor del descuento

b. El valor de la inversión

Solución

Sabemos que: F = C$150 000; $d = 8{,}60$; $n = 3\ 00$ dias; D = ?; P = ?; r = ?

Resolviendo obtenemos:

$D = F \cdot d \cdot n$

$D = 10\ 000(0{,}087)\left(\frac{270}{360}\right)$

$D = 652{,}50$

El valor del descuento es C$ 652,50

$P = F - D$ $P = 10\ 000 - 652{,}50 = 9\ 347{,}50$

Por lo tanto, el valor de la inversión es C$ 9 347,50.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. En un informe del Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional informó que en el año 2 013 Nicaragua produjo 225 millones de galones de leche, si para el 2 014 se espera aumentar el 6% de la producción. ¿Cuántos galones de leche se espera producir?

2. Un productor de frijoles ha solicitado un préstamo de C$ 300 000 (córdobas) a 36 meses de plazo a una tasa de interés simple de 10%. Calcular la cantidad que pagará en concepto de interés al final del plazo.

3. ¿Qué cantidad de interés devenga un pagaré cuyo valor nominal es de C$ 200 000 a un plazo de 420 días a una tasa de interés del 0,89% mensual?

4. Una Cooperativa de producción compra en el Banco Central de Nicaragua un Certificado Negociable de Inversión, cuyo valor facial es de $1500 000 a una tasa de descuento del 8,60% a 320 días de plazo. Calcular:

   a. El valor del descuento.

   b. El valor de la inversión.

Autoevaluación

Leamos, copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios. Luego encerremos el inciso que corresponde a la respuesta correcta.

1. El resultado de aplicar la propiedad fundamental de la proporción $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ es:
   a. 36 = 100
   b. 20 = 20
   c. 60 = 60
   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

2. El resultado de resolver la proposición $\frac{x}{30} = \frac{4}{5}$ es:
   a. $x = 12$
   b. $x = 24$
   c. $x = 20$
   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

3. La expresión "De cada 10 estudiantes activos, solamente siete aprobaron el examen de matemática" en forma de razón se expresa:
   a. $\frac{7}{10}$
   b. $\frac{20}{14}$
   c. $\frac{10}{7}$
   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. El resultado de calcular "el costo de 20 libras de frijoles, Si 4 libras de frijoles costaron C$ 104" es:
   a. C$ 540
   b. C$ 440
   c. C$ 520
   d. Ninguna de las anteriores es correcta

5. Si tenemos las proporciones: $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ y $x+y+z=84$, entonces los valores de x, y y z son:

   a. $x=21$, $y=35$ y $z=28$

   b. $x=28$, $y=35$ y $z=21$

   c. $x=21$, $y=28$ y $z=35$

   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

6. Si repartimos C$ 240 en partes directamente proporcionales a 5, 7 y 10. ¿Cómo resultan repartidos los C$ 150?

   a. $x=$ C$ 76,36, $y=$ C$ 54,55 y $z=$ C$ 109,09

   b. $x=$ C$ 109,09, $y=$ C$ 54,55 y $z=$ C$ 76,36

   c. $x=$ C$ 54,55 , $y=$ C$ 76,36 y $z=$ C$ 109,09

   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

7. Si repartimos C$ 480 en partes inversamente proporcionales a 6, 8 y 10, entonces el dinero quedaría repartido de la siguiente manera:

   a. $x=$ C$ 153,20; $y=$ C$ 204,25 y $z=$ C$ 122,55

   b. $x=$C$ 204,25; $y=$ C$ 153,20 y $z=$ C$ 122,55

   c. $x=$ C$ 204,25; $y=$ C$ 122,03 y $z=$ C$ 153,20

   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

8. Tres nietos ayudan en los gastos del hogar entregando mensualmente C$ 3 000. Si sus edades son de 20, 25 y 30 años y las aportaciones son directamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

   a. $x=$ C$ 800; $y=$ C$ 1 000 y $z=$ C$ 1 200

   b. $x=$C$ 1 000; $y=$ C$ 1 200 y $z=$ C$ 800

   c. $x=$ C$ 800; $y=$ C$ 1 200 y $z=$ C$ 1 000

   d. Ninguna de las anteriores es correcta.

9. Cinco estudiantes trabajan en la producción y realizan una tarea en 10 días. ¿En cuántos días realizarán la misma tarea 8 estudiantes?

    a. Cinco días.

    b. Seis días.

    c. Ocho días.

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

10. Si un Profesor atiende consultas a 10 estudiantes en dos horas. ¿Cuántos estudiantes serán atendidos en 20 horas semanales?

    a. En 20 horas atenderá a 200 estudiantes.

    b. En 20 horas atenderá a 100 estudiantes.

    c. En 20 horas atenderá a 400 estudiantes.

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

11. Si un equipo de 2 estudiantes resuelven los ejercicios de matemática en 80 minutos. ¿En cuántos minutos resolverán los mismos ejercicios un equipo de 3 estudiantes?

    a. 120 minutos.

    b. Dos horas.

    c. 160 minutos.

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

12. Calcular el interés simple producido por C$ 30 000 durante 90 días a una tasa de interés anual del 5 %.

    a. C$ 11 000

    b. C$ 11 200

    c. C$ 11 250

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

13. Tres estudiantes dedicando 4 horas diarias realizan 60 ejercicios de matemática en 6 días. ¿Cuántos días necesitará un equipo de 4 estudiantes, dedicando 3 horas diarias, para hacer 40 ejercicios de la misma guía de matemática?

    a. Cuatro días

    b. Cinco días

    c. Seis días

    d. Ninguna de las anteriores es correcta

14. Calcular el interés simple producido por un capital de C$ 10 000 invertido durante 2 años a una tasa del 6 % anual.

    a. C$ 15 000

    b. C$ 14 400

    c. C$ 14 000

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

15. Si cinco obreros trabajando 7 horas diarias han hecho 60 metros de una pared en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 7 hombres, trabajando 5 horas diarias, para hacer 48 metros de una pared?

    a. Siete días

    b. Seis días

    c. Ocho días

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

16. Un préstamo de C$ 40 000 se convierte al cabo de un año en C$ 44 500. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?

    a. 0,009

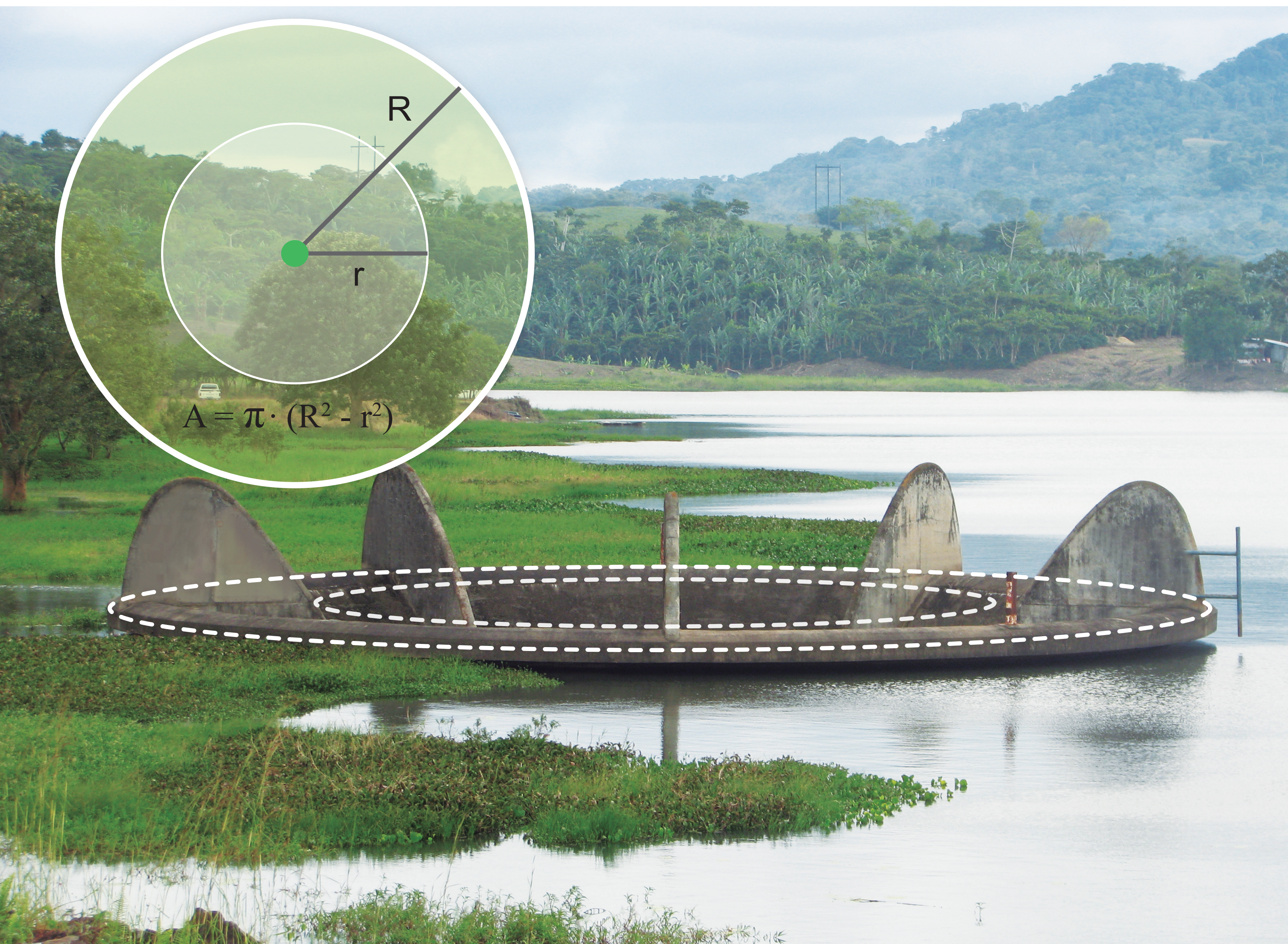
    b. 0,0091

    c. 0,01

    d. Ninguna de las anteriores es correcta.

IV UNIDAD

APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA EN EL CAMPO



IV Unidad Aplicaciones de la Geometría Euclidiana en el campo

Desempeño de aprendizaje

Aplica el sistema internacional de unidades en la resolución de problemas de área y perímetro asociados a situaciones propias de mediciones agrarias.

Ejes transversales

Interactúa con su medio natural, social y cultural de manera pacífica, responsable y respetuosa.

1 Sistema Internacional de Unidades

Indicador de logro

Plantea y resuelve conversiones de las magnitudes fundamentales del sistema internacional propios del uso rural.

1.1 Magnitudes y unidades principales.

Observemos la foto y reflexionemos sobre el trabajo realizado por estudiantes de la Universidad en el Campo en su huerto demostrativo en la comunidad de El Cebollal **¿Qué hicieron para distribuir las hileras de siembra?**

Posiblemente estos estudiantes utilizaron una rama de algún árbol con cierta medida o quizás distribuyeron las semillas tomando como distancia la longitud de sus pasos, o quizás ocuparon alguna cinta métrica, entre otras posibilidades.

¿Quedaron las hileras a igual distancia unas de otras si cada estudiante utilizó la longitud de su paso?

Probablemente no, ya que cada estudiante da el paso a distinta distancia.

En el ejemplo citado, la cantidad elegida como unidad de medida, es la longitud de la rama o el paso del estudiante o el metro.

Observamos que una misma **magnitud**(distancia entre hileras) da lugar a cantidades distintas debido a que se han empleado distintas unidades de medida.

Este ejemplo, nos pone de manifiesto la necesidad de establecer una única unidad de medida para una magnitud dada, de modo que la información sea comprendida por todas las personas.

Como podemos ver cuando realizamos una medición, en el fondo lo que buscamos es un número que nos ayude a describir la realidad. Pero un número por sí sólo no significa nada. Imaginemos, por ejemplo, que entramos a la pulpería y decimos a la persona que está atendiendo: «deme cinco, por favor». Sorprendido, preguntará "¿cinco qué?".

Cada vez que queremos efectuar una medida, tenemos que comparar la magnitud deseada con el patrón unidad. Por lo tanto, es necesario que dicho patrón sea fácilmente accesible desde cualquier lugar del mundo. Además, no debe cambiar con el tiempo.

De este tema nos ocuparemos a continuación, pero antes…

Aclaremos algunos conceptos:

Magnitud es todo lo abstracto que puede compararse y sumarse

Cantidad es todo estado de una magnitud

Unidad de medida es la cantidad elegida para comparar con ella las demás cantidades de su misma magnitud.

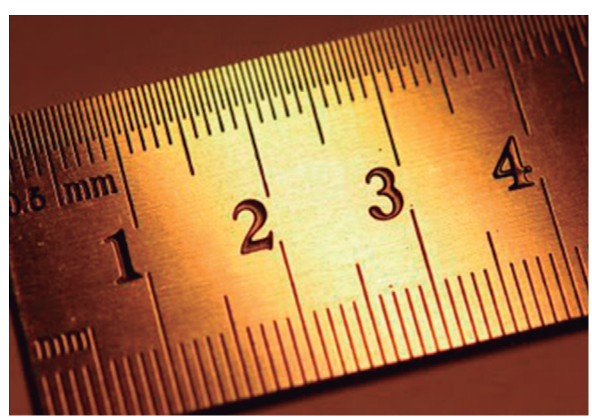
Medir es comparar una cantidad con otra que llamamos unidad de medida para saber cuántas veces la cantidad contiene a la unidad.

La longitud es una magnitud y la longitud de un lápiz o la longitud del pizarrón son cantidades; el peso es una magnitud y mi peso o el peso de este libro son cantidades; la velocidad es una magnitud y la velocidad de una motocicleta o la velocidad de un camión son cantidades.

Las cantidades pueden medirse

Existen cantidades de distintas magnitudes y debiendo ser la unidad de la misma magnitud que la cantidad, habrá necesariamente distintas clases de unidades de medidas.

Por ejemplo, el metro, la vara, la yarda son unidades de medida para longitudes; el metro cuadrado, la vara cuadrada, la yarda cuadrada son unidades de medida para la superficie; el gramo, la libra son unidades de medida para el peso; el litro es una unidad de medida para la capacidad.



Actividades

Analicemos el siguiente caso, ahí se citan tres magnitudes y tres unidades. Identifíquemoslas e inclúyamoslas en el lugar correspondiente de la tabla del ejercicio.

A las ocho de la mañana he salido a correr y he hecho una distancia de 8 kilómetros en media hora. Aunque era temprano ya hacía calor (en un termómetro he visto que la temperatura era de 24 grados centígrados), por eso he corrido durante menos tiempo que otros días.

Tabla para responder el ejercicio

Magnitudes			
Unidades			

1.2 Sistemas de unidades: Múltiplos y sub - múltiplos.

Un sistema de unidades es un conjunto consistente de unidades de medida. Definen un conjunto básico de unidades de medida a partir del cual se derivan el resto. Existen varios sistemas de unidades:

• Sistema Internacional de Unidades conocido como SI: es el sistema más usado. Sus unidades básicas son: el metro, el kilogramo, el segundo, el ampere, el kelvin, la candela y el mol. Las demás unidades son derivadas del Sistema Internacional.

• Sistema métrico decimal: primer sistema unificado de medidas.

• Sistema cegesimal conocido como CGS: denominado así porque sus unidades básicas son el centímetro, el gramo y el segundo.

Sistema Internacional de Unidades también conocido como sistema métrico

Unidades Básica		
Magnitud	**Nombre**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	Kg
Tiempo	Segundo	s

Sistema métrico decimal

El sistema métrico es llamado también sistema métrico decimal, y es el primer sistema unificado de medidas.

Es un sistema porque es un conjunto de medidas; métrico, porque su unidad fundamental es el metro; decimal porque sus medidas aumentan y disminuyen como las potencias o múltiplos de 10, o sea múltiplos y submúltiplos decimales.

Cualquier medida dada en una unidad métrica (por ejemplo, el kilogramo) puede ser convertida a otra unidad métrica (por ejemplo, el gramo) simplemente moviendo el lugar decimal.

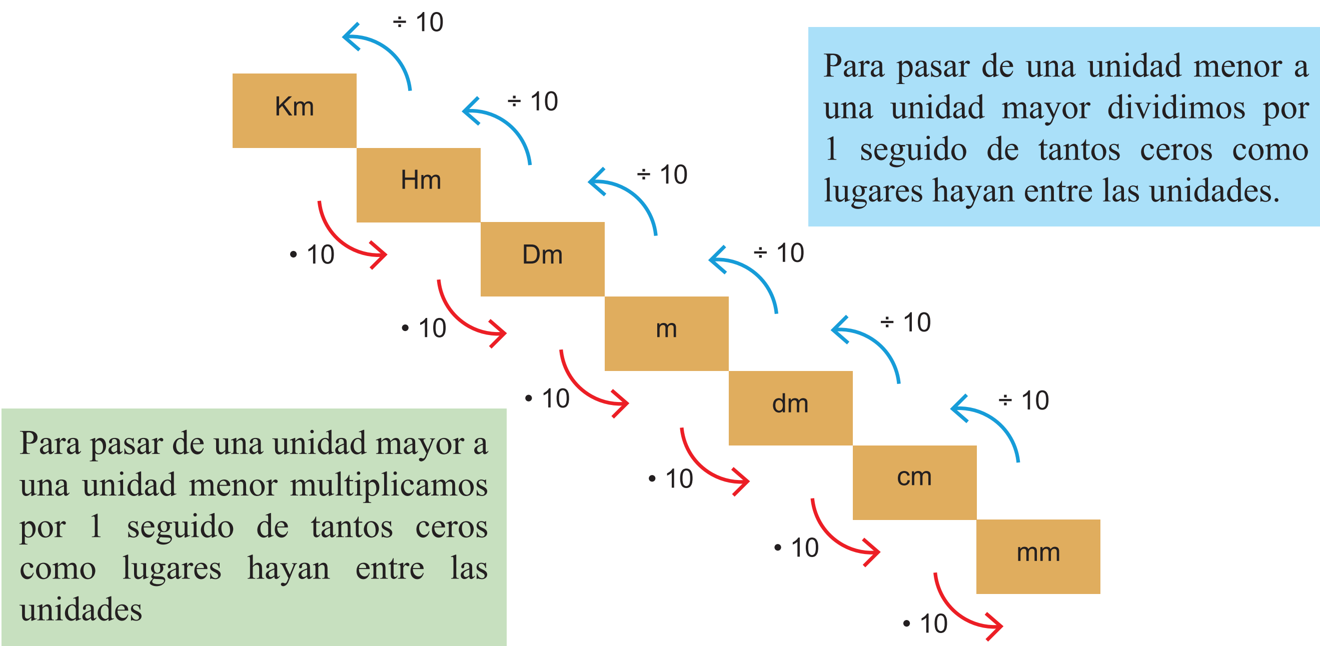
1.3 Medidas de longitud.

Permiten expresar las dimensiones de los objetos (largo, ancho y alto) y las distancias entre un punto y otro.

Prefijos Métricos Comunes	Múltiplos de Unidades
kilo	1000
hecto	100
deca	10
Unidad	1
deci	0,1
centi	0,01
milli	0,001

Unidad	Símbolo	Prefijo	Equivalencia (m)
Kilómetro	Km	kilo = 1000	1000 m
Hectómetro	Hm	hecto = 100	100 m
Decámetro	Dm	deca = 10	10 m
Decímetro	dm	deci = $\frac{1}{10}$	0,1 m
Centímetro	cm	centi = $\frac{1}{100}$	0,01 m
Milímetro	mm	mili = $\frac{1}{10}$	0,001 m

Observamos que desde los submúltiplos, en la parte inferior, hasta los múltiplos, en la parte superior, cada unidad vale 10 veces más que la anterior.)



1.4 Medidas de Masa (peso).

La unidad de medida de la masa es el gramo. Las medidas de peso aumentan y disminuyen de diez en diez.

Los múltiplos y submúltiplos del gramo son:

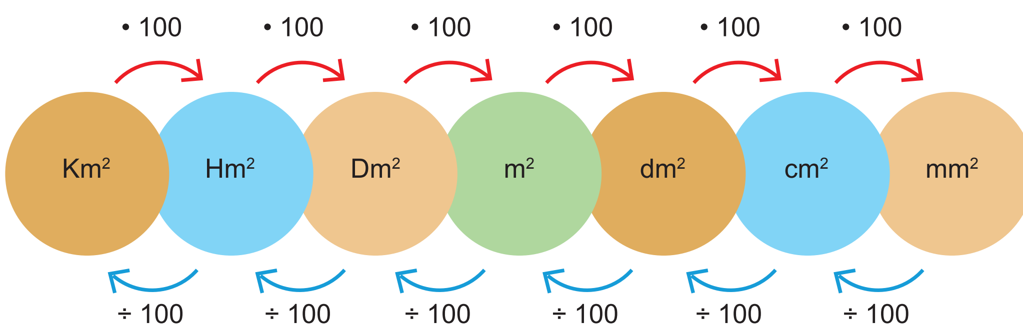
Medida	Símbolo	Equivalencia
Kilogramo	Kg	1000 g
Hectogramo	Hg	100g
Decagramo	Dg	10g
Gramo	g	1 g
Decigramo	dg	0,1 g
Centigramo	cg	0,01 g
Miligramo	mg	0,0001 g

1.5 Medidas de Superficie.

La unidad de las medidas de superficie es el metro cuadrado. Se representa por m2. Estas medidas aumentan y disminuyen de cien en cien.

Los múltiplos y submúltiplos del m^2 son:

Medida	Símbolo	Equivalencia
Kilómetro cuadrado	Km^2	$1000000m^2$
Hectómetro cuadrado	Hm^2	$10000m^2$
Decámetro cuadrado	Dm^2	$100m^2$
Metro cuadrado	m^2	$1m^2$
Decímetro cuadrado	dm^2	$0,01m^2$
Centímetro cuadrado	cm^2	$0,0001m^2$
Milímetro cuadrado	mm^2	$0,000001m^2$



1.6 Medidas de Superficie Agrarias.

Cuando las medidas de superficie se aplican a la medición de tierras se llaman medidas agrarias.

La unidad de las medidas agrarias es el área, que equivale a un Dm^2 y se representa abreviadamente por á.

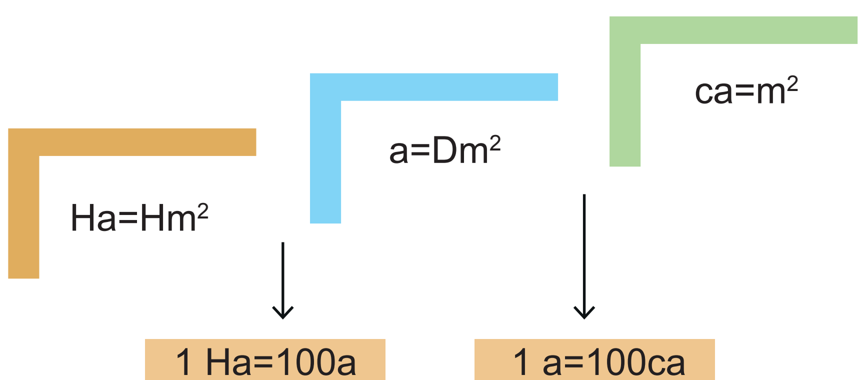
Tiene un múltiplo que es la hectárea equivale a un hectómetro cuadrado y un submúltiplo, la centiárea que equivale al m^2.

$1Ha = 1Hm^2 = 10000\ m^2$

$1\ ca = m^2$

Una unidad de medida muy utilizada en Nicaragua es la manzana.

1 manzana = $6972\ m^2$



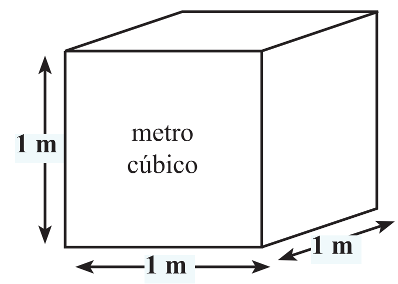
1.7 Medidas de Volumen.

La unidad de estas medidas es el metro cúbico que es un cubo que tiene de arista un metro lineal y se representa abreviadamente por m^3.

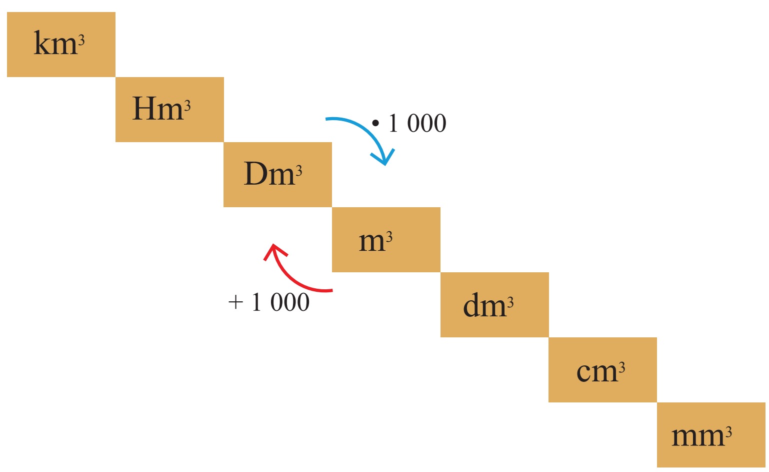
Estas medidas aumentan y disminuyen de mil en mil

Los múltiplos y submúltiplos de m^3 son:

Medida	Símbolo	Equivalencia
Kilómetro cúbico	Km^3	1 000 000000m^3
Hectómetro cúbico	Hm^3	1000000m^3
Decámetro cúbico	Dm^3	1000m^3
Metro cúbico	m^3	1m^2
Decímetro cúbico	dm^3	0,001m^3
Centímetro cúbico	cm^3	0,000001m^3
Milímetro cúbico	mm^3	0,000000001m^3



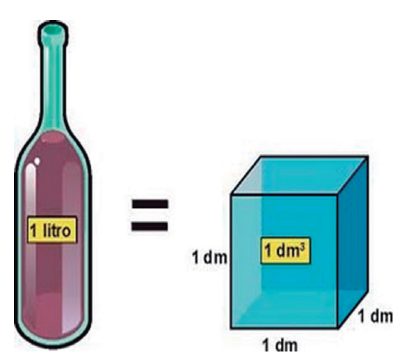
Cada unidad de volumen es 1000 veces mayor que la inmediata inferior y 1000 veces menor que la inmediata superior.



1.8 Medidas de Capacidad.

La unidad de estas medidas es el litro. Estas medidas aumentan y disminuyen de diez en diez. Los múltiplos y submúltiplos del litro son:

Medida	Símbolo	Equivalencia
Kilolitro	Kl	1000 litros
Hectolitro	Hl	100 litros
Decalitro	Dl	10 litros
Litro	l	1 litro
Decilitro	dl	0,1 litro
Centilitro	cl	0,01 litro
Mililitro	ml	0,001 litro



1.9 Densidad.

La densidad es una medida de cuánto material se encuentra comprimido en un espacio determinado; es la cantidad de masa por unidad de volumen

Probablemente a veces hemos escuchado hablar de densidad de la materia o de la densidad de un bosque o de la densidad poblacional.

Dividir un espacio disponible por el número de personas presentes nos refleja el concepto de densidad poblacional. Eso significa determinar cuántas personas por metro cuadrado de superficie existen.

Es altamente probable que en un bosque de pinos, que a futuro será madera, la densidad de los pinos plantados sea mayor que el de un parque. Si contamos los pinos que hay en un cuadrado de 50 metros de lado, probablemente en el bosque hay más pinos que en el parque. Entonces diríamos que el bosque tiene mayor densidad de árboles plantados que el parque.

Representaremos la densidad por la letra D.

Cuando se conoce el volumen de un cuerpo y su densidad, para hallar su peso no hay más que multiplicar el volumen por la densidad:

Peso=Volumen ·Densidad

De aquí que,

$$\textbf{Densidad} = \frac{\text{Peso}}{\text{Volumen}}$$

Si el volumen se da en m^3 y el peso se da en Kg, la unidad de medida de la densidad es Kg/m^3.

Ejemplo 1

Una recipiente vacío pesa 1,5 Kg y lleno de agua pesa 6,24 Kg. ¿Cuál es la capacidad del recipiente? La densidad del agua es 1000 kg/m^3

Solución

Partimos de que para calcular del volumen utilizamos la ecuación:

$$V = \frac{P}{D} =$$

$$V = \frac{6,24Kg - 1,5Kg}{1\,000\,\frac{Km}{m^3}}$$

$$V = \frac{4,74Kg}{1\,000\,\frac{Km}{m^3}}$$

$$V = 4,74 \cdot 10^{-3}\, m^3$$

Pasando los m^3 a litros tenemos:

1 litro = 1 dm^3= 0,001m^3 = 10^{-3} m^3. Por lo tanto:

$$4,74 \cdot 10^{-3}\, m^3 = \frac{4,74 \cdot 10^{-3}\, m^3}{10^{-3}\,\frac{m^3}{\ell}}$$

$$= 4,74 \; litros$$

Ejemplo 2

1) Un lechero vende 8 litros de leche que pesan 8,18 Kg. Siendo la densidad de la leche 1 030 kg/m^3, averiguar si la leche es pura o no, y en caso de ser negativo, hallar con qué cantidad de agua adulteró la leche.

Solución

El peso de la leche pura es:

$$P = 8 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot 1\,030 \frac{kg}{m^3}$$

$$P = 8\,240 \cdot 10^{-3} kg = 8,24\ kg$$

Como la leche vendida pesa 8,18 kg, la leche no es pura, porque hay una diferencia de peso de 8,24 kg – 8,18 kg = 0,06 Kg

Siendo la densidad de la leche de 1 030 kg/m^3, un litro de leche pesa 1,03 Kg y un litro de agua pesa 1 Kg, entonces cada vez que en lugar de 1 litro de leche ponga un litro de agua, el peso bajará 1,03 – 1 = 0,03 Kg; luego como la diferencia total de peso es 0,06 Kg, dividiendo 0,06 por 0,03 obtendremos los litros de agua que se han añadido, o sea

$$\frac{0,06 kg}{0,03 kg} = 2\ litros\ de\ agua$$

Ahora, comprueba lo aprendido

Si 6 litros de leche pesan 6,14 Kg, ¿es pura la leche?

Escritura correcta de las unidades de medida

Las unidades de medida no van seguidas de punto, ni toman la ”s” para el plural.

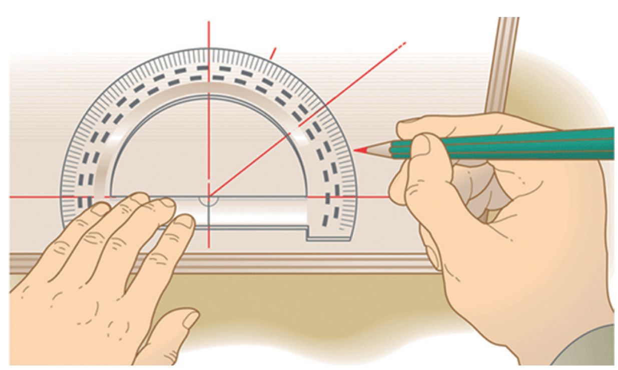
Por ejemplo, se escribe 5 kg, no 5 kgs.

El símbolo de la unidad sigue al símbolo del prefijo, sin espacio. Por ejemplo, cm, mm, entre otros.

1.10 Medidas de ángulos y arcos.

Lo que caracteriza a un ángulo es la abertura de sus lados. Por lo tanto es natural preguntarse cómo se mide tal abertura. Para medir un ángulo lo que se hace es compararlo con otro que se toma como unidad.

La unidad de medida de ángulo más usual es el grado sexagesimal, que consiste en $\frac{1}{360}$ ángulo completo. La medida de un ángulo en grados sexagesimales se designa mediante el símbolo °.

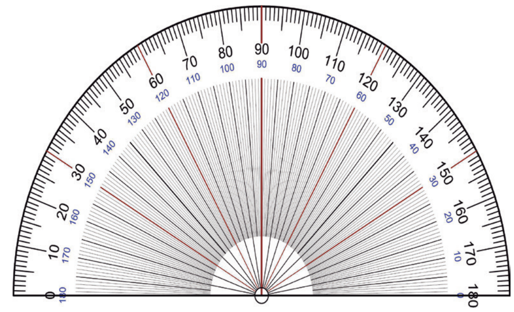


Ejemplo

Un ángulo de 56° es aquel que tiene como abertura 56 veces una abertura de un grado (la unidad). Para hacernos una idea, un grado corresponde a la abertura siguiente:


1°

Así, para un ángulo completo, que corresponde a una vuelta completa se tienen 360° (360 grados). Es decir:



Como se puede observar en el dibujo, una vuelta completa se divide en 360 partes, cada una de ellas es un grado y se designa como 1°. Así pues, un ángulo completo son 360°, un ángulo llano son 180° y un ángulo recto son 90°. Los ángulos agudos tienen menos de 90° y los obtusos más de 90°, pero menos de 180°.

Pero, ¿qué pasa cuando tenemos un ángulo menor que 1°?

Para poder hablar de ángulos que miden menos que 1°, se consideran submúltiplos del grado. De manera que nos ahorramos trabajar con expresiones del tipo:

- Este ángulo mide medio grado
- Este ángulo mide 0,76 grados

Así pues, el grado sexagesimal tiene submúltiplos: éstos son el minuto y el segundo.

El minuto se designa por el símbolo ’ y el segundo por símbolo ’’.

Ejemplo

La medida de un ángulo en grados, minutos y segundos sería, por ejemplo,84°, 17', 43". Se leería: un ángulo de 84 grados, 17 minutos y 43 segundos.

Veamos exactamente qué valen los minutos y los segundos.

Un minuto es el resultado de tomar un grado y dividirlo en 60 partes iguales. Es decir, matemáticamente se expresa:

1 minuto = $\frac{1}{60}$ por lo tanto 60 minutos =1°.

Un segundo es el resultado de tomar un minuto y dividirlo en 60 partes iguales. Es decir, matemáticamente se expresa:

1 segundo = $\frac{1}{60}$ por lo tanto 60 segundos =1 minuto.

Con estas equivalencias veamos cuánto vale un grado en segundos:

$$\left.\begin{array}{r} 1° = 60' \\ 1 \text{ min} = 60'' \end{array}\right] \rightarrow 1° = 60' \cdot 60'' = 3600''$$

Para pasar de grados a minutos y segundos trabajaremos siempre mediante factores de conversión.

Ejemplo 1

1. Queremos escribir 32° en minutos

32° =32 grados · 60' =1920'

2. Queremos escribir 21° en segundos

21° = 21 · 3600" =75 600"

Ahora, veremos algún ejemplo que nos permita expresar cantidades dadas en segundos o minutos en grados.

Ejemplo 2

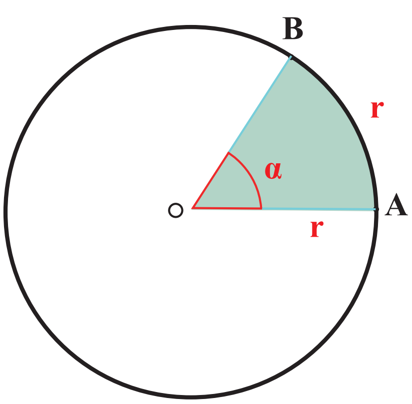
Si tenemos 39 600 segundos y lo queremos expresar en minutos, entonces debemos dividir

39 600 ÷ 60 = 660 minutos

Si lo queremos expresar en grados:

39 600 ÷ 3 600 = 11grados

Los ángulos también se pueden medir en radianes:



Radián: Es la medida de un **ángulo** cuyo **arco mide un radio**.

Un radián se simboliza por **rad**

2π rad = 360°

π rad = 180°

Para convertir grados en radianes se multiplica el ángulo dado por $\frac{\pi}{180^o}$

Para convertir radianes en grados se multiplica el ángulo dado por $\frac{180^o}{\pi}$

Ejemplo

1) Expresemos 3 rad en grados

Solución

Para pasar de grados a radianes multiplicamos el ángulo dado por $\frac{180^o}{\pi}$, es decir:

$$3 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{3 \cdot 180°}{3{,}1416}$$

$$3 \cdot \frac{180°}{\pi} = 171{,}8869°$$

Convirtamos estos grados a minutos y segundos

Pasemos los 0,8869° a minutos

0,8869 · 60 =53,214 minutos

Ahora pasamos los 0,214 minutos a segundos

0,214 · 60=12,8 seg

171,8869= 171°53'13''

2) Expresemos 316° en radianes

Solución

Para pasar de grados a radianes multiplicamos el ángulo dado por $\frac{\pi}{180^o}$, es decir:

$$316° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{360°}{180°}$$

$$316° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{79\pi}{45}$$

1.11 Unidades de tiempo.

Relación entre el tiempo y la longitud

Todos sabemos que la tierra da una vuelta completa en 24 horas o sea que describe una circunferencia, 360° en 24 horas, luego en una hora describe un arco que será $\frac{1}{24}$ de 360° o sea $\frac{360°}{24} = 15°$.

Como 1 hora tiene 60 minutos, si en una hora un punto de la tierra describe un arco de 15°, en un minuto describirá un arco que será $\frac{1}{60}$ de 15°, o sea,

De manera similar tenemos que un minuto tiene 60 segundos, si en un minuto un punto de la tierra describe un arco de 15', en un segundo describirá un arco que será $\frac{1}{60}$ de 15', o sea,

$$\frac{15'}{60} = \frac{1'}{4} = 15''$$

Por tanto:

1 hora de tiempo equivale a 15° de longitud.

1 minuto de tiempo equivale a 15' de longitud.

1 segundo de tiempo equivale a 15" de longitud

De manera análoga podemos concluir que:

15° de longitud equivale a 1 hora de tiempo.

1° de longitud equivale a 4 minutos de tiempo.

1' de longitud equivale a 4 segundos de tiempo.

Ejemplo 1

Expresemos en longitud 2 horas 8 minutos y 16 segundos

Solución:

De acuerdo a las equivalencias establecidas anteriormente:

1 hora de tiempo equivale a 15° de longitud.

1 minuto de tiempo equivale a 15' de longitud.

1 segundo de tiempo equivale a 15" de longitud

Debemos multiplicar **2 horas, 8 minutos y 16 segundos** por 15 y el resultado será la longitud en **grados, minutos y segundos**

2h	8 min	16s
		•15
30°	120'	240''

Reducimos:

En 240" hay 240 ÷ 60 = 4'

En 120' hay 120 ÷ 60 = 2°

Por lo tanto, sumamos y tenemos 32° 4' 0"

Generalizando

Para convertir el tiempo en longitud debemos multiplicar por 15, como si fuesen multiplicaciones por separado, convirtiendo los resultados a magnitudes homogéneas (segundos a minutos y minutos a grados)

Ejemplo 2

Hallar la diferencia de tiempo entre dos ciudades cuya diferencia de longitud es 16°43’9”

Solución:

Dividimos la diferencia de longitud por 15

16°	43'	9"	15
1	+60'	+780"	1h 6 min 52,6 s
· 60	103'	789"	
60'	13'	39"	
	· 60"	90	
	780"	0	

Primeramente dividimos 16 entre 15 ponemos como cociente 1 y residuo 1°, convertimos este grado a minutos multiplicando por 60 y lo sumamos a los minutos, tenemos 43 + 60 = 103 minutos.

Repetimos el proceso ahora dividimos 103 entre 15, obtenemos 6 en el cociente y 13 en el residuo. Nuevamente convertimos los 13 minutos a segundo, multiplicando por 60 y obtenemos 780 segundos que los sumamos a los 9 que teníamos para un total de 789 segundos y volvemos a hacer la división.

Generalizando:

Para convertir la longitud en tiempo debemos dividir entre 15, como si fuesen divisiones por separado, convirtiendo los residuos a magnitudes homogéneas (grados a minutos y minutos a segundos).

1.12 Unidades de medida de distintas clases.

Existen distintas clases de unidades de medida como:

- El metro, la vara, la yarda son unidades de medida para longitudes
- La vara cuadrada, la yarda cuadrada son unidades de medida para superficie
- El metro cúbico, el pie cúbico son unidades de medida para el volumen
- El gramo, la libra son unidades de medida para el peso
- El litro es una unidad de medida para la capacidad

Para pasar o convertir el valor de una unidad al valor de otra unidad de la misma magnitud, son necesarias las tablas de conversión, tales como:

TABLAS DE CONVERSIÓN DE UNIDADES DE LONGITUD						
Unidad	Pulgadas	Pies	Milímetros	Centímetros	Metros	Kilómetro
Pulgadas	1	0,0833	25,4	2,54	0,0254	-
Pies	12	1	304,8	30,48	0,3048	-
Milímetros	0,0394	0,003281	1	0,1	0,001	-
Centímetros	0,3937	0,032808	10	1	0,01	-
Metro	39,3701	3,28084	1000	100	1	0,001
Kilómetros	39370	3280,8	-	100000	1000	1

Métrico	Imperial
1 Metro	1,0936 yardas
1 Kilómetro	0,6214 millas
1 yarda	0,9144 metros
1 milla	1,6093 kilómetros

EQUIVALENCIA DE PESO Y VOLUMEN

UNIDAD	GALÓN (US)	METROS CÚBICOS	LITROS
GALÓN (US)	1	0,00378	3,785
METROS CÚBICOS	284,17	1	1000
LITROS	0,26417	0,001	1

MEDIDAS DE PESO

INGLES A MÉTRICO

Onzas (oz)	28,35 g
Libras (lb)	453,59 g
Libras (lb)	0,4536 Kg

MÉTRICO A INGLES

Gramos (g)	0,0353 oz
Gramos (g)	0,0022 lb
Kilogramo (Kg)	2,2046 lb

Analicemos algunos ejemplos

Ejemplo 1

Ejemplo 1: Convirtamos 135 pulgadas a metros

Solución

Sabemos que 1 pulg = 0,0254 m

Por lo que debemos multiplicar:

$$135 \cdot 0{,}0254 = 3{,}43 \text{ m}$$

Ejemplo 2

Convirtamos 5 libras a kilogramos

Solución

Podemos resolver el ejercicio de dos maneras:

1) Utilizando la conversión 1 lb = 0,4536 Kg
Entonces multiplicamos:
$5 \cdot 0{,}4536 = 2{,}27$ Kg

2) Utilizando la conversión 1 Kg = 2,2046 lb
En este caso debemos dividir
$5 \div 2{,}2046 = 2{,}27$ Kg

Como podemos ver obtenemos el mismo resultado.

Ejemplo 3

Convirtamos 1350 litros a galones

Solución

Partiendo de que 1 l = 0,26417 gal, debemos multiplicar

$$1350 \cdot 0{,}2617 = 353{,}3 \text{ gal}$$

Ejemplo 4

Calculemos y expresemos el resultado en centímetros:

3 Dm + 7m + 5 dm + 4 cm + 5 mm

Solución

Convirtamos todos los sumandos a centímetros:

a) 3 Dm a cm
Para pasar de Dm a cm debemos multiplicar por 1 000
$3 \cdot 1\,000 = 3\,000$ cm

b) 7 m a cm
Para pasar de m a cm debemos multiplicar por 100
$7 \cdot 100 = 700$ cm

c) 5 dm a cm
Para pasar de dm a cm debemos multiplicar por 10
$5 \cdot 10 = 50$ cm

d) 5 mm a cm
Para pasar de mm a cm debemos dividir por 10
$5 \div 10 = 0{,}5$ cm

Ahora que ya tenemos una sola unidad de medida (centímetros) procedemos a sumar:

$$3\,000 \text{ cm} + 700 \text{ cm} + 50 \text{ cm} + 0{,}5 \text{ cm} = 3\,750{,}5 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} 3\,000 \\ 700 \\ 50 \\ +\quad 0{,}5 \\ \hline 3\,750{,}5 \end{array}$$

Ejemplo 5

Convirtamos 12 yardas a pies

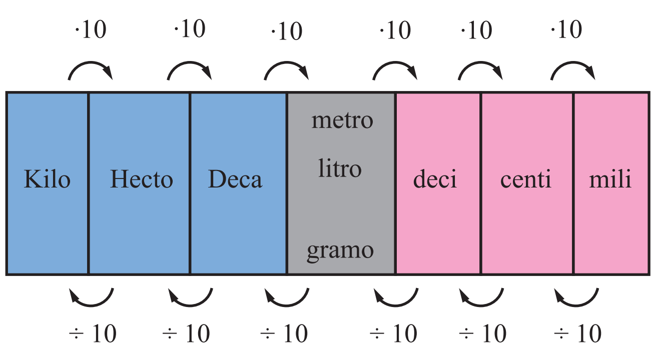
Solución

Este problema lo podemos resolver de varias maneras:

1) Sabemos que 1 yd = 36 pulgadas
También sabemos que 1 pie = 12 pulgadas, por lo tanto 1 yd = 3 pies
Entonces 12 yardas serán 12 · 3 = 36 pies

2) Primero convirtamos las yardas a metros, multiplicando por 0,9144
12 · 0,9144 = 10,97 m
Ahora convirtamos los metros a pies, multiplicando por 3,28084
10,97 · 3,28084 = 36 pies

¡No olvidemos!



Actividades

Comprobemos lo aprendido
Completamos las siguientes tablas:

Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	0,0035		35		350000	
				789		
		0,02				

Metros			100	50
Kilómetros	2	1/4		

kilogramos	3	1,5			7,5
Miligramos	3000000		30000	3000	

Hectolitros		3	1,5		7,5
Litros	300	30		3000	
Litros	3	1,5			7,5
Mililitros	3000		300	30	

Actividades

Comprobemos lo aprendido

Continuemos reafirmando los conocimientos con la solución de estos ejercicios

1. Expresemos en metros las siguientes cantidades:
a) 42 mm
b) $7 \cdot 3 \cdot 10^3$ Hm

2. Realicemos las siguientes conversiones de unidades:
a) 705 Kg a mg
b) 2 345 dm a Km

3. Calculemos y expresemos el resultado en centilitros:
a) 3 Dl + 7l + 5 dl + 4 cl + 5 ml
b) 6 Hl + 8 l + 2 ml

4. Expresemos en gramos:
a) 5 Kg + 3 Hg + 4 g
b) 4 Hg + 8 Dg + 2 g + 5 dg

1.13 Problemas de aplicación a su entorno.

1. Un queso pesa 20 kg ¿Cuántos paquetes de queso de 150 g se pueden cortar?

Solución:

Primero convirtamos a una sola unidad: gramos

Recordemos

Para pasar de una unidad mayor a una unidad menor multiplicamos por 1 seguido de tantos ceros como lugares hayan entre las unidades.
Para pasar de una unidad menor a una unidad mayor dividimos por 1 seguido de tantos ceros como lugares hayan entre las unidades

En este caso vamos a pasar de kg a g, por ello multiplicamos por 1 000.

Entonces tenemos 20 kg .1 000 = 25 000 gramos

Para encontrar el número de paquetes dividimos:

25 000 ÷ 150 = 166,66 paquetes

2. En un incendio se han quemado 800 ha de pinos. Deduce de cuántos m² se trata

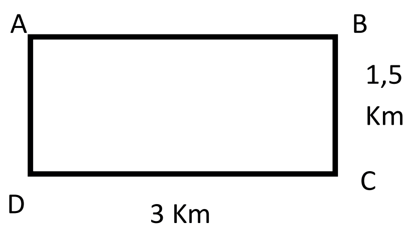
Solución

Sabemos que 1 ha = 10000 m², por lo tanto debemos multiplicar las 800 hectáreas por 10 000, es decir $800 \cdot 10\,000 = 8\,000\,000\ m^2$

3. Existe un terreno rectangular con las siguientes dimensiones 3 Km de largo y 1,5 Km de ancho. Calculemos la superficie del terreno y expresemos en metros cuadrados.

Solución

Representemos el terreno mediante el rectángulo con lados 1,5 Km y 3 Km



El área del terreno será igual a multiplicar las dos dimensiones:

Como nos están pidiendo la respuesta en metros cuadrados debemos multiplicar por 1 000 000. Entonces tenemos $4{,}5 \cdot 1\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^6\ m^2$

4. En una finca existe una presa de agua que mide 15m de largo, 7m de ancho y 2,5m de profundidad. Calculamos la cantidad de agua expresada en litros, que caben en la presa, si el nivel de agua está a 50cm del borde.

Solución

Primero debemos calcular la profundidad del agua.

Como la profundidad de la presa es de 2,5 m y el agua llena a 50 cm de la orilla debemos restar 2,5 – 0,5 = 2m

Ahora calculamos el volumen de agua:

$$15\ m \cdot 7\ m \cdot 2\ m = 210\ m^3$$

Como 1 litro = 0,001 m³ o lo que es equivalente 1 m³ = 1 000 litros, tenemos que 210 m³ serán igual a

$$210 \cdot 1\,000 = 210\,000 \text{ litros}$$

5. Un potrero tiene 100m de largo y 80m de ancho. ¿Cuáles son la longitud y la anchura del potrero en pulgadas?

Solución

Hagamos las conversiones:
1 m = 39,3701 pulgadas
Por lo tanto
80 · 39,3701 = 3 149,61 pulg
100 · 39,3701 =3 937,01 pulg

6. María pidió 14,25 m, de tela en una tienda, pero al vendérsela la midieron con un metro que solo tenía 96 cm. Si pagó C$ 35 por cada metro verdadero de tela, ¿Cuánto perdió?

Solución

Convirtamos los metros a centímetros, multiplicando por 100
14,25 · 100 = 1 425 cm
Realmente a María le midieron
14,25 · 96 = 1 368 cm
Es decir, María perdió 1 425 – 1368 = 57 cm, lo que equivale a 0,57 m, por lo tanto: María perdió 0,57 · 35 = 19,95Córdobas

Actividades

Comprobemos lo aprendido

1. Convirtamos:

a) 10,5 mg a g   b) 4 pies a pulg   c) 25 gal a litros   d) 2,5 yd a varas

2. Calculemos y expresemos el resultado en centilitros:

a) 0,072 Kl + 5,06 Dl + 400 ml   b) 0,000534 Kl + 0,47 litros

3. Analicemos y resolvamos correctamente los siguientes problemas:

a) En una cuadra de 100 m., hay fabricadas cuatro casas cuyos frentes miden:8 m y 24 cm, 10 m y 75 cm 15 m y 16 cm, y 20 m y 32 cm, respectivamente. ¿Cuántos metros de la cuadra quedan sin casas?

b) Un auto consume 30 litros de combustible para hacer 330 kilómetros y otro auto consume 2000 mililitros para hacer 25000 metros. ¿Cuál de los dos consume menos?

c) Un bidón contiene 5 l de agua. Expresemos dicho volumen en cm3.

d) En una lechería, la venta fue de 2,5 m3 en determinado día. ¿Cuántos litros de leche se vendieron?

e) En un recibo de agua aparece que se consumieron 40 m^3 en determinado mes. ¿Cuántos litros de agua se consumieron?

2 Elementos de Geometría

Indicador de logro

Plantea y resuelve problemas del ámbito rural utilizando el marco conceptual de triángulos y equiláteros

2.1 Conceptos primitivos: punto, recta y plano

La Geometría tiene tres elementos fundamentales no definidos: punto, recta y plano.

Las personas solemos tener nociones o ideas acerca del significado de estos tres conceptos.

Algunos de nosotros, por ejemplo tenemos alguna noción del punto como las siguientes:

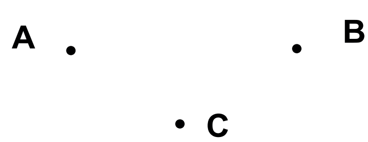
- La marca que deja un lápiz afilado.
- La cabeza de un alfiler.
- La punta de una estaca.
- La punta del alambre de púas.
- Un grano de arena.

Como se puede observar, son varias las ideas existentes acerca de la noción de punto. Pero…

¿Cuál es la representación geométrica de un punto?

Punto

El punto es el primer elemento que no está definido en Geometría. Se representa gráficamente por un pequeño círculo y una letra mayúscula que lo identifica. No tienen dimensión (largo, alto, ancho), La siguiente figura muestra tres puntos A, B y C



Recta

Algunas nociones sobre la recta son las siguientes:

- Un pedazo de hilo extendido y tenso.
- Las intersecciones de las caras de una caja.
- El borde de una hoja de cuaderno.

• La esquina del borde la puerta.

¿Qué otras nociones se podrían agregar a las anteriores? Invente dos nociones más.

El segundo término no definido de la Geometría Euclidiana es el de recta, aunque se entiende que una recta es un conjunto infinito de puntos que se extienden indefinidamente en sentidos opuestos.

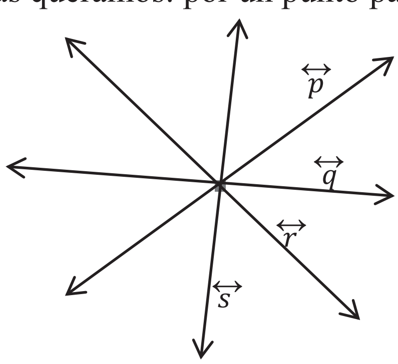
La cuerda de una guitarra o un rayo de luz representan lo que es una recta. Es una línea continua en una dirección que se mantiene fija, sin saltos o interrupciones, que no tiene principio ni tiene fin, ya que está formada por infinitos puntos.

Para referirse a una recta, se seleccionan dos puntos sobre ella; la recta queda determinada por dichos puntos.

Una recta también se puede identificar por una letra minúscula.

La figura siguiente muestra la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por los puntos A y B. La recta de la figura también está identificada como la recta $\overleftrightarrow{r}$.

Cuando pintamos un punto y nos ponemos a dibujar rectas que pasen por él, vemos que podemos dibujar cuantas queramos: por un punto pasan infinitas rectas.



Plano

Algunas nociones de plano son las siguientes:

• El piso de una casa.

• La mesa sobre la que escribimos

• La silla donde nos sentamos

• La hoja de un cuaderno.

• La pared de un aula.

• La pizarra en la que escribimos

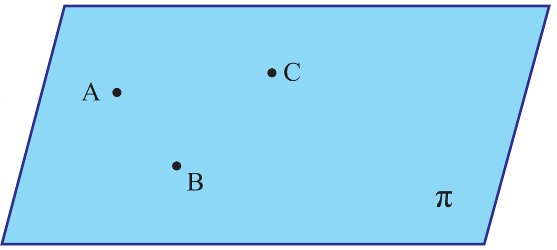
• La huerta donde sembramos maíz

Estas son sólo algunas nociones que dan una idea de plano; sin embargo, a nivel matemático, **los planos no tienen límites, es decir, se extienden infinitamente (similar a las rectas) por lo que sólo es posible representar una parte del mismo.**

El tercer término no definido de la Geometría Euclidiana es el de plano. Se entiende que un plano es una superficie totalmente plana que se extiende indefinidamente.

¿Cuál es la representación geométrica de un plano?

Un plano se representa geométricamente por una figura de cuatro lados (cuadrado, rectángulo o romboide). Se representa por una letra griega o por tres letras que corresponden a tres de sus puntos dibujados en su representación.



Importante

- Dos puntos determinan una recta.
- Tres puntos determinan un plano.
- La intersección de dos planos es una recta.
- La intersección de dos rectas es un punto.
- Los puntos, rectas y planos no tienen grosor.

Observemos los siguientes objetos y respondamos:

- **¿Cuántos planos distintos representan las caras del cubo”? ¿y las del prisma?**

Podemos apreciar que el cubo tiene 6 caras, las cuales representan 6 planos, mientras el prisma tiene 8 caras, las que representan 8 planos.

- **¿Cuántas rectas distintas representan las aristas del cubo? ¿y las del prisma?**

En el cubo contamos 12 rectas y en el prisma 18 rectas.

A partir de los elementos fundamentales se pueden definir todos los otros elementos de la Geometría.

Veamos algunas definiciones fundamentales

Espacio

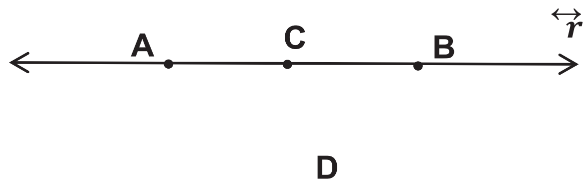
Está formado por todos los puntos posibles y contiene infinitos planos.
El espacio es tridimensional.

Puntos colineales: Son todos los puntos que están situados sobre una misma recta.

Los puntos que no se encuentran contenidos en una recta se dice que son **no colineales.**

Ejemplo

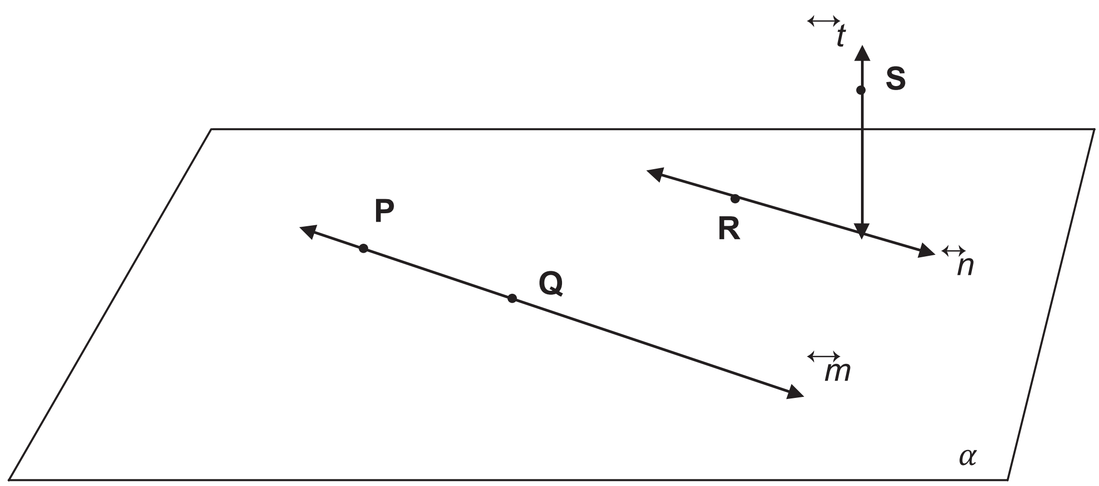
Observemos que los puntos A, B y C están contenidos en la rectar. Estos puntos se dice que son colineales. El punto D no es un punto colineal ya que no pertenece a la rectar



Puntos (o rectas) coplanares: Son todos los puntos (o rectas) que están situados en un mismo plano.

Ejemplo

Los puntos P, Q, R, son coplanares ya que cada uno está en el plano α. Las rectas $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son coplanares al estar las dos en el plano α.
La recta t es no coplanar. El punto S es no coplanar, ya que no están contenidos en el plano.



Afiancemos nuestros conocimientos.

1) Dibujemos una figura para cada una de las siguientes relaciones:
2) El punto S es colineal a $\overleftrightarrow{PR}$
3) Las rectas $\overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{u}$ está en el plano β y contiene el punto R
4) Las rectas $\overleftrightarrow{a}$, b y $\overleftrightarrow{c}$ son coplanares, pero no se intersecan
5) Los planos α y β se intersecan en la recta $\overleftrightarrow{p}$

Segmento

El segmento $\overline{AB}$ está formado por todos los puntos entre A y B incluyendo los puntos A y B.

La longitud de un segmento es la distancia entre sus puntos extremos. Para indicar que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es 5 escribimos AB = 5. La siguiente figura muestra el segmento $\overline{AB}$.

Rayo

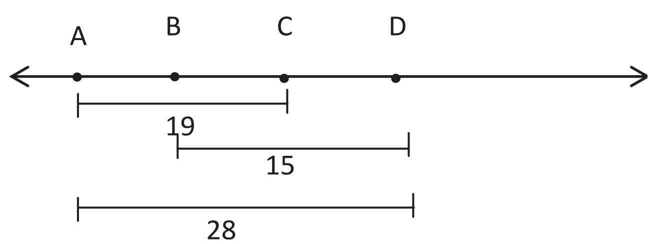
El Rayo ($\overleftrightarrow{AB}$) está formado por todos los puntos que se extienden en una sola dirección a partir del punto A pasando por el punto B. El punto A se llama origen o punto extremo del rayo. La siguiente figura muestra el rayo($\overleftrightarrow{AB}$)

Punto medio de un segmento

Es el punto que divide un segmento en dos segmentos iguales. Si C es el punto medio de ($\overline{AB}$) , entonces ($\overline{AC}$) = ($\overline{CB}$)

Ahora analizaremos algunos ejemplos donde trabajamos con segmentos.

1. Sean los puntos A, B, C, D puntos colineales tal como se muestra en el gráfico. Determinemos ($\overline{BC}$)



Solución

Del gráfico vemos que

AB = AD - BD

AB = 28-15

AB = 13

Símbolo

AB = Medida del segmento

$\overline{AB}$ = Indica la figura

Sabiendo la longitud del segmento ($\overline{AB}$), podemos encontrar la longitud del segmento ($\overline{BC}$)

BC = AC - AB

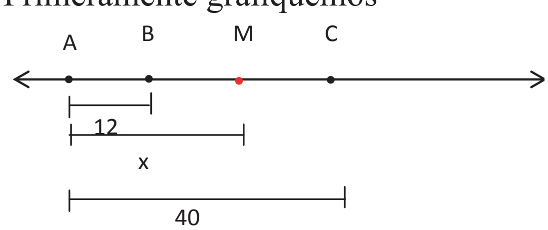
BC = 19 -13

BC = 6

2.Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, y C si ($\overline{AB}$) = 12 y ($\overline{AC}$) = 40. Hallar la distancia del punto medio ($\overline{BC}$) al punto A

Solución

Primeramente grafiquemos



Vemos que

BC = AC - AB

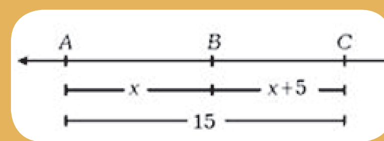
BC = 40 - 12

BC = 28

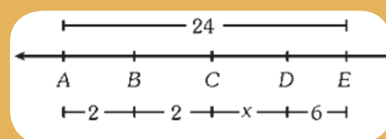
Como M es el punto medio de ($\overline{BC}$) y (BC) = 28, la distancia de (BM) = 28÷2=14. Por lo tanto x= (AM) = (AB) + (BM) = 12+14 = 26

Comprobemos lo aprendido

1. Sobre una recta se dan los puntos consecutivos A, B, C, D, de tal manera que : (AB) = 6 cm (AC) = 15 cm y (AD) = 21 cm. Calcular (BC) + (AD)
2. Se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D, siendo B punto medio de (AC) . Calcular (AB) , sabiendo que (AD) = 44 y (CD) = 20
3. De la siguiente figura calcular el valor de x



4. De la figura calcular el valor de x



2.2 Ángulos y su medida.

Antiguamente la distribución de los terrenos o la tarea de dar forma a los bloques de piedra para la construcción de templos o pirámides exigieron a los egipcios el trazado de líneas rectas, ángulos y en consecuencia tuvieron la necesidad de trabajar con sus respectivas medidas. Actualmente con la medida de las líneas y de los ángulos se sigue trabajando como por ejemplo: los topógrafos al realizar levantamientos topográficos utilizan un instrumento para medir ángulos (teodolito): así mismo realizan el trazado de líneas y trabajan con su medida.

Nos preguntamos **¿Qué son los ángulos?**

Dos rectas que se cortan dividen al plano en cuatro regiones, cada una de esas regiones es un ángulo.

Tradicionalmente por error se ha utilizado la siguiente simbología para indicar la medida de un ángulo

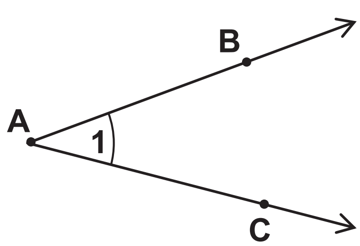
$\measuredangle A = 35°$ o $m\measuredangle A = 35°$

En este texto se trabajará suprimiendo el símbolo grado (°) y la medida del ángulo anterior utilizando el lenguaje matemático internacional será representado como:

$\measuredangle A = 35$

o

$m\angle A = 35$



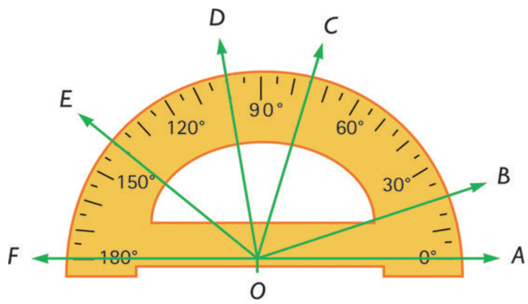
Un ángulo está formado por dos rayos que tienen el mismo punto extremo. Al punto extremo común se le llama vértice y a los dos rayos se las llama **lados del ángulo.** El ángulo de la figura siguiente está formado por los rayos ($\overrightarrow{AB}$) y ($\overrightarrow{AC}$), su vértice está en el punto A y sus lados son los rayos ($\overrightarrow{AB}$) y ($\overrightarrow{AC}$).

Para referirse al ángulo de la figura anterior se puede hacer como $\measuredangle 1$, $\measuredangle CAB$, $\measuredangle BAC$ y si el vértice no es compartido con otro ángulo puede identificarse como $\measuredangle A$.

En Geometría usualmente la medida de un ángulo se expresa en grados sexagesimales.

Sabemos que, un círculo tiene 360 grados, así un grado (1º) es el ángulo formado por $\frac{1}{360}$ parte de un círculo. Un grado se divide en 60 minutos y un minuto se divide en 60 segundos.

¿Cuáles son las medidas de un ángulo?



Las medidas de los ángulos pueden ser:

Ángulo agudo

Es un ángulo cuya medida es mayor que cero y menor que 90.

Por ejemplo el ángulo AOB de la figura tiene una medida de 20, es decir $\measuredangle AOB = 20$

Ángulo recto

Es un ángulo cuya medida es 90 y usualmente se representa con una pequeña escuadra en el vértice del ángulo.

Ángulo obtuso

Es un ángulo cuya medida es mayor que 90º pero menor que 180, en la figura superior (transportador) se muestran ángulos obtusos de 100 y 140.

Ángulo llano

Es un ángulo cuyos lados son rayos opuestos. La medida de un ángulo llano es 180

El ángulo que se forma en el "sube y baja" es de 180.

Comprobemos lo aprendido

Elaboremos un cuadro sinóptico o un mapa conceptual donde reflejemos lo que aprendimos sobre los ángulos y su clasificación.

2.3 Postulados y teoremas.

El estudio formal de la Geometría requiere el uso de postulados, teoremas y demostraciones.

Los postulados son enunciados que se aceptan como verdaderos y ellos no pueden demostrarse mientras que los teoremas son proposiciones derivadas de los postulados y pueden ser demostradas, aunque en muchos casos las demostraciones son muy complicadas.

Por el momento estudiaremos únicamente los postulados y teoremas que se consideran necesarios para la solución de problemas geométricos.

Importante

Recuerden que en Geometría Euclidiana la medida es el grado sexagesimal. Por tanto, al decir: ángulos, se escribe 30, 40, 60. Sin el símbolo de grado.

Postulados importantes
1. Una recta contiene cuando menos dos puntos; un plano contiene cuando menos tres puntos, no todos en la misma recta; el espacio contiene cuando menos cuatro puntos, no todos en el mismo plano.
2. Existe una recta y sólo una que pasa por dos puntos.
3. Existe un plano y sólo uno que pasa por tres puntos no están en una sola recta.
4. Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene se encuentra también en el mismo plano.
5. Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.
6. Entre dos puntos existe una distancia, y sólo una.
7. A cada ángulo le corresponde un número real único mayor o igual a 0 y menor o igual a 180.

2.4 Rectas: paralelas, perpendiculares y oblicuas.

Las rectas paralelas son dos o más rectas en un plano que nunca se intersecan. Hay muchos ejemplos de rectas paralelas como los lados opuestos del marco rectangular de un cuadro y los estantes de un librero.

La idea de paralelismo se utiliza en la vida cotidiana en varios aspectos. Podemos citar varios ejemplos uno de los cuales es cuando al preguntar sobre la dirección de una calle nos contestan: Es en la otra cuadra PARALELA a esta. También podemos encontrar líneas paralelas en nuestro cuaderno rayado, así como también el paralelismo se utiliza para hacer algunos objetos, por ejemplo las orillas de las paredes, la construcción de una mesa, las orillas de una puerta, entre otras.

Las rectas perpendiculares también están en todos lados, no sólo en una gráfica en papel sino en el mundo real, desde el patrón de cruce en las calles a la intersección de las líneas coloreadas de una camisa a cuadros.

Las rectas perpendiculares son dos o más rectas que se intersecan formando un ángulo de 90.

Las calles son larguísimas líneas rectas paralelas y perpendiculares.

Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno punto.
Significa que todos los puntos entre ambas rectas están a la misma distancia.

En las fotografías siguientes podemos apreciar ejemplos de rectas paralelas y perpendiculares. ¡Identifiquémoslas!

Rectas Oblicuas: Si dos rectas tienen un punto de intersección, y forman ángulos no todos iguales, las rectas se llaman oblicuas.

Las torres de comunicación son ejemplo de líneas oblicuas.

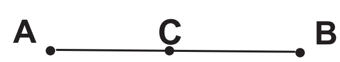
2.5 Relaciones entre puntos, rectas y ángulos.

Cuando se combinan puntos rectas, segmentos y ángulos, se obtienen figuras geométricas; las cuales dan origen a definiciones y teoremas que relacionan los elementos geométricos. A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas importantes.

Puntos sobre una recta

Si tres puntos A, B y C se encuentran sobre una recta, y el punto B está entre los puntos A y C, entonces las distancias entre ellos se relacionan de la siguiente forma.

$$(AC) + (CB) = (AB)$$



¿Cómo pueden ser los ángulos según sus lados?
Los ángulos según sus lados pueden ser:

2.6 Ángulos adyacentes, complementarios y suplementarios.

Ángulos adyacentes:

Son dos ángulos que están en el mismo plano, tienen el mismo vértice y un lado en común, pero no tienen puntos interiores comunes. La suma de las medidas de los ángulos adyacentes da como resultado la medida del ángulo mayor formado.

Ángulos opuestos por el vértice

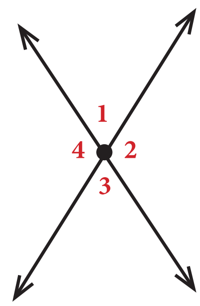
Si dos rectas se intersecan en un punto, los ángulos opuestos por el vértice son iguales

Par lineal

Un **par lineal** es un par de ángulos adyacentes formado cuando dos líneas se intersecan.

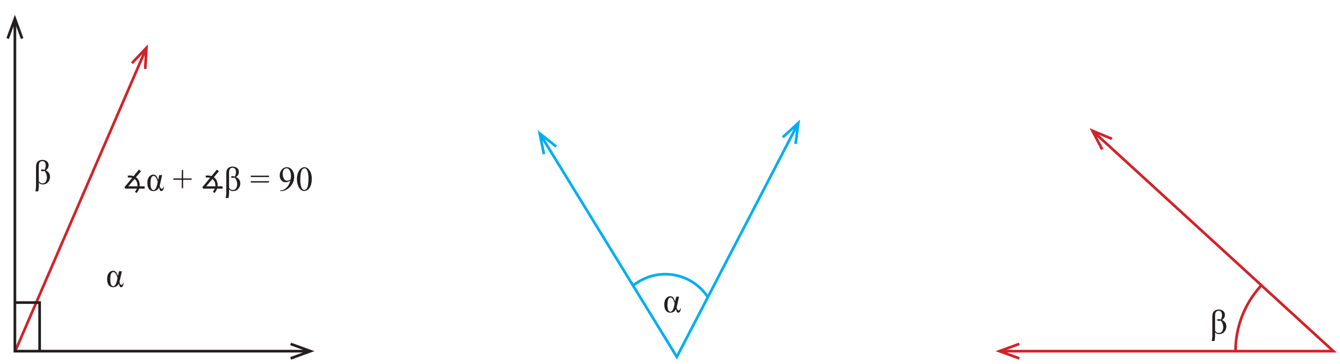
En la figura, $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ forman un par lineal. Así también $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$, $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 4$, y $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 4$.

Los dos ángulos de un par lineal son siempre suplementarios, lo que significa que sus medidas suman 180.



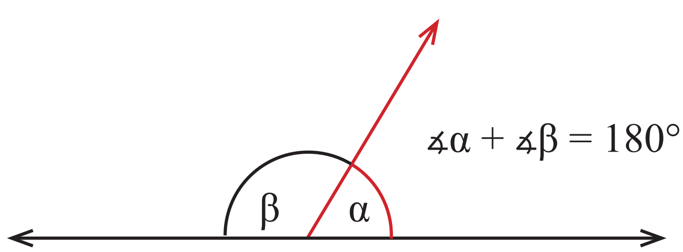
Ángulos complementarios

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90º, los ángulos se llaman complementarios. En las dos figuras se muestran ángulos complementarios.



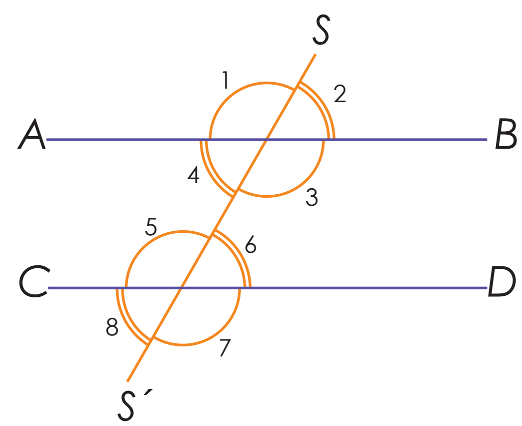
Ángulos suplementarios

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, los ángulos son suplementarios.



2.7 Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

Al cortar dos paralelas, con una tercera recta llamada secante, se forman ocho ángulos. Cuatro en cada punto de intersección.



Ángulos internos

Son los ángulos ∠4, ∠3, ∠6 y ∠5.

Ángulos externos

Son los ángulos ∠1, ∠2, ∠8 y ∠7.

Ángulos alternos

Son los pares de ∠3 y ∠5, ∠4 y ∠6, ∠1 y ∠7,

además de ∠2 y ∠8.

Los ángulos alternos pueden ser:

- **Alternos internos:** son los **pares de ángulos** en lados opuestos de la transversal pero entre las líneas ∠3 y ∠5, ∠4 y ∠6. Además, cada par tienen la misma medida.

  Para recordarlo mejor: los pares de ángulos en lados "alternos" de la transversal, y están en el "interior" de las líneas a las que cruza.

- **Alternos externos:** los **pares de ángulos** en lados opuestos de la transversal pero fuera de las líneas ∠1 y ∠7, ∠2 y ∠8. Igual que con los anteriores, cada par tiene la misma medida.

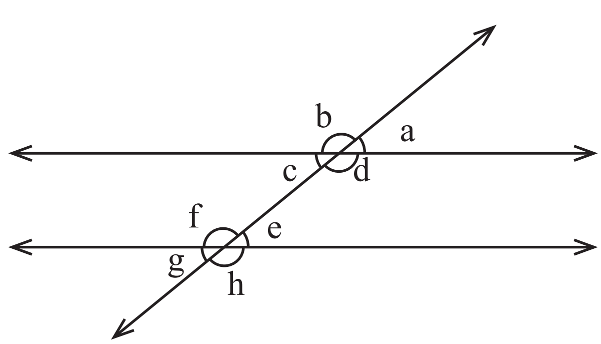
  Para recordarlo mejor: los pares de ángulos en lados "alternos" de la transversal, y están en el "exterior" de las líneas a las que cruza.

Ángulos correspondientes

Son los ángulos en las esquinas correspondientes: ∠1 y ∠5, ∠2 y ∠6, ∠4 y ∠8, ∠3 y ∠7.

A continuación resolveremos algunos ejercicios y problemas del tema de ángulos.

1. Identifiquemos en la siguiente figura el nombre que corresponda a los ángulos y completemos la tabla.

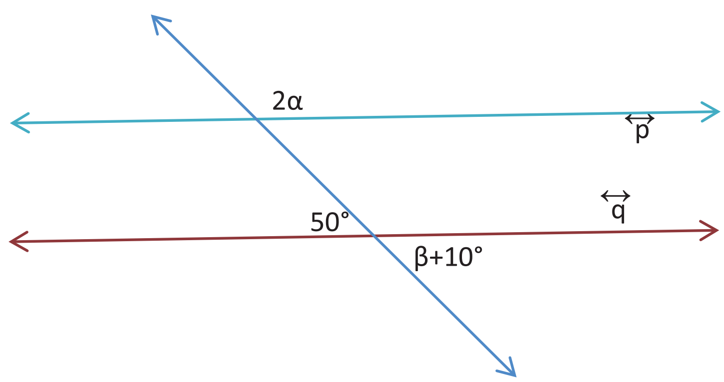


Nombre del ángulo	Letras			
Externos	**a**	**b**	**g**	**h**
Internos	**c**	**d**	**e**	**f**
Alternos – externos	**a = g**		**b = h**	
Alternos – internos	**c = e**		**d = f**	
Correspondientes	**a y e**	**b y f**	**c y g**	**d y h**

2. Si $\measuredangle c=42$. Calculemos la medida de los demás ángulos

Ángulo	Medida (grados)	Justificación
a	42	Ángulo opuesto por el vértice a c
b	138	Ángulo complementario con a
c	42	Ángulo dado
d	138	Ángulo complementario con a y con c
e	42	Ángulo alterno – interno con c
f	138	Ángulo complementario con e y alterno interno con d
g	42	Ángulo alterno - externo
h	138	Ángulo complementario, alterno - externo

3. En la siguiente figura la recta $\overleftrightarrow{p}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{q}$, encontremos las medidas de α y β



Solución

- Son ángulos opuestos por el vértice y por lo tanto iguales los ángulos

  $\measuredangle\beta + 10 = 50$

  Por lo tanto $\measuredangle\beta = 40$

- El ángulo correspondiente a 2α, es suplementario al ángulo de 50

  De aquí que $\measuredangle 2\alpha + 50 = 180$

  Por lo tanto $\measuredangle\alpha = 65$

4. Encontrar dos ángulos que sean suplementarios, siendo la medida del mayor 20 más pequeña que el triple de la medida del menor.

Solución

- La suma de los ángulos suplementarios debe ser igual a 180.

$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 180$

- De acuerdo a lo que plantea el problema un ángulo menor debe ser igual a $\measuredangle\alpha$ y el otro ángulo debe ser igual a $\measuredangle 3 \cdot \alpha - 20$. Por lo tanto

$\measuredangle\alpha + \measuredangle 3\alpha - 20 = 180$

$\measuredangle 4\alpha = 200$

$\measuredangle\alpha = \dfrac{200}{4} = 50$

Es decir, el ángulo menor mide 50, entonces el ángulo mayor debe medir

$180 - 50 = 130$

5. Encontrar dos ángulos que sean suplementarios y opuestos por el vértice.

Solución

De acuerdo a lo que sabemos los ángulos opuestos por el vértice son iguales y para que sean complementarios la suma de ellos debe ser igual a 180, por lo tanto los ángulos deben ser iguales a 90.

6. Encontrar dos ángulos que sean complementarios, siendo uno el doble del otro.

Solución

Similar al ejercicio 1: La suma de los ángulos complementarios debe ser igual a 90.

$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 90$

De acuerdo a lo que plantea el problema un ángulo menor debe ser igual a $\measuredangle$ y el otro ángulo debe ser igual a $2 \cdot \alpha$. Por lo tanto

$\measuredangle\alpha + \measuredangle 2\alpha = 90$

$\measuredangle 3\alpha = 90$

$\measuredangle\alpha = \dfrac{90}{3} = 30$

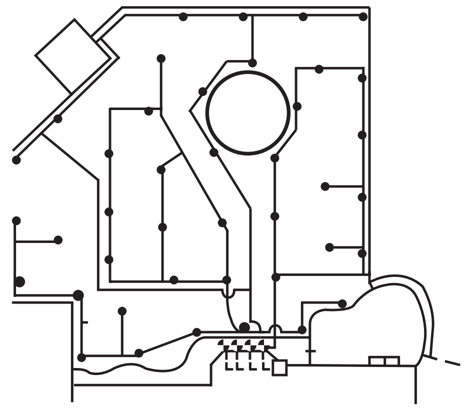
Es decir, el ángulo menor mide 30, entonces el ángulo mayor debe medir

$90 - 30 = 60$

Apliquemos nuestros conocimientos

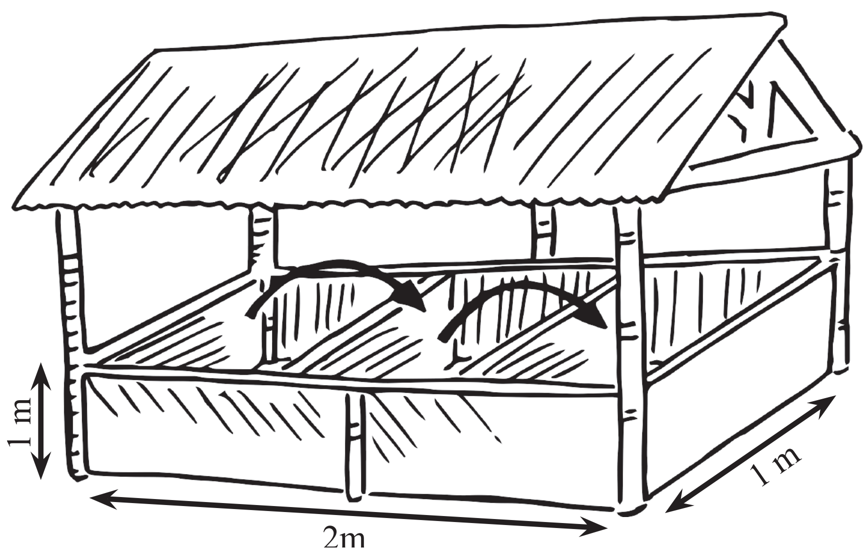
I. Para un sistema de riego se utilizan aspersores separados entre ellos una distancia de 8 m y entre líneas 11 m. Según las características técnicas cada aspersor tira 1 m^3/h a determinada presión.

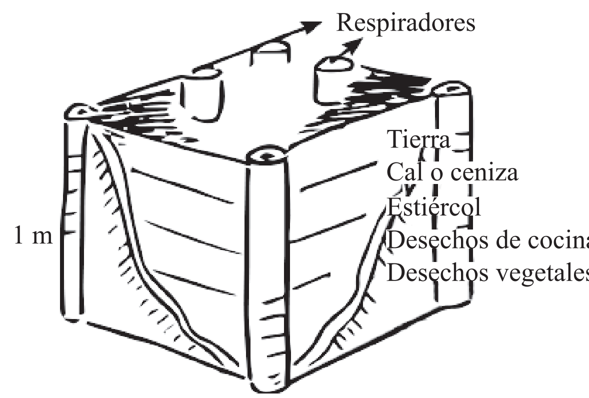
Identifiquemos en el diseño de abajo rectas y ángulos estudiados y clasifiquémoslos.



II. Para construir una abonera en cajón o en forma de corral el terreno donde la instalaremos debe tener buen drenaje, con un pequeño desnivel, para evitar encharcamientos y tener la posibilidad de ser cubierto, además debe tener en el centro mayor altura que en los costados.

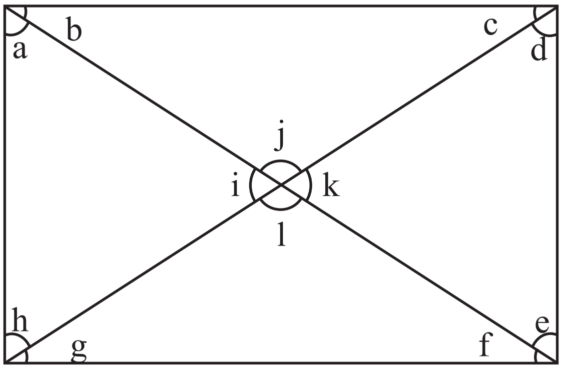
A continuación presentamos un diseño de una abonera en forma de corral y abonera en forma de cajón, identifiquemos las rectas y ángulos estudiados y clasifiquémoslos





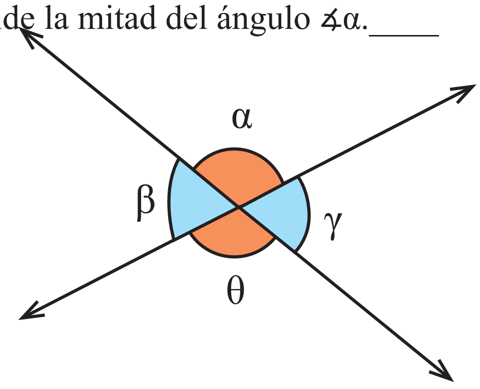
III. En la siguiente figura, nombremos lo siguiente:

1. Ángulos adyacentes
2. Ángulos opuestos por el vértice
3. Ángulos rectos
4. Ángulos agudos
5. Ángulos obtusos



IV. Escribamos sobre la raya de la derecha, V ó F según sea verdadera o falsa la proposición. Justifiquemos las proposiciones falsas

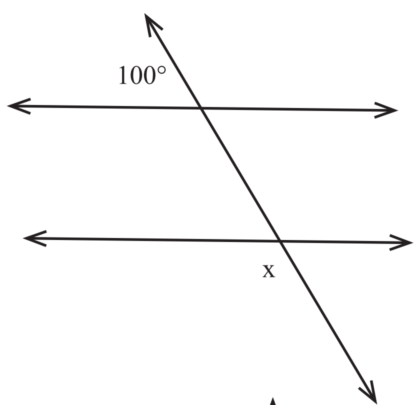
1. Dos ángulos opuestos por el vértice miden igual. ____
2. Dos ángulos consecutivos siempre son iguales.____
3. Dos ángulos adyacentes siempre tienen los lados de 5 cm cada uno ___
4. Si dos ángulos son consecutivos, también serán adyacentes_____
5. La suma de dos ángulos rectos siempre equivale a un ángulo llano.____
6. La suma de dos ángulos agudos siempre equivale a un ángulo recto.___
7. La suma de dos ángulos agudos puede equivaler a un ángulo llano.____
8. La suma de dos ángulos llanos siempre equivale a un ángulo completo 360____
9. Teniendo en cuenta el siguiente esquema y que $\measuredangle\alpha=111$
   a) El ángulo $\measuredangle\beta$ mide 111. _____
   b) Para calcular la medida del ángulo $\measuredangle\theta$ hay que calcular la diferencia 180 - 111. ___
   c) El ángulo $\measuredangle\gamma$ mide lo mismo que el ángulo $\measuredangle\alpha$. ____
   d) El ángulo $\measuredangle\beta$ mide la mitad del ángulo $\measuredangle\alpha$.____

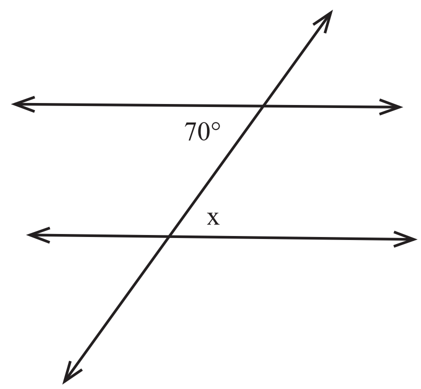


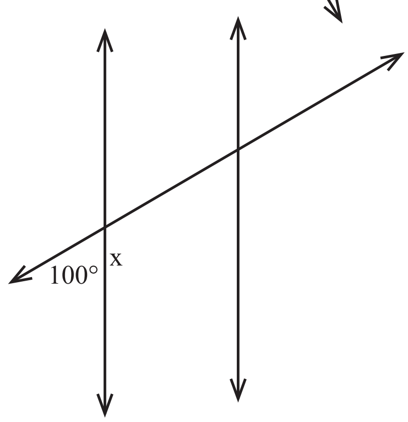
Contestemos correctamente las siguientes preguntas:

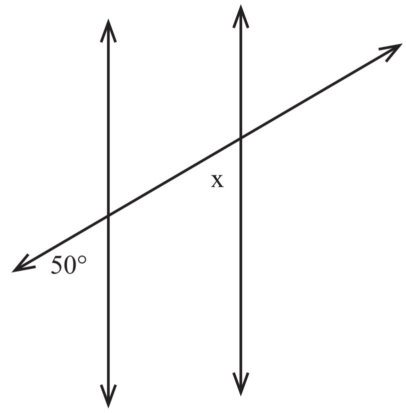
1. Si un ángulo es igual que su complementario, ¿cuánto mide ese ángulo?
2. Si un ángulo es igual que su suplementario, ¿cuánto mide ese ángulo?
3. Si un ángulo es agudo, ¿su suplementario será un ángulo agudo, recto, obtuso o llano?

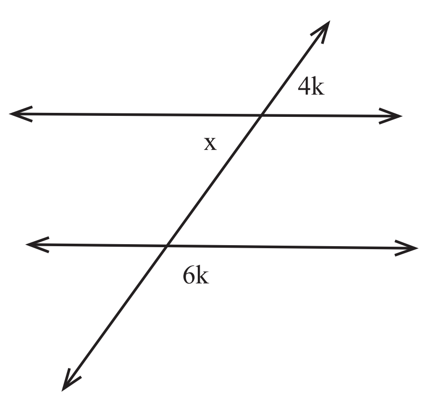
Encontremos el valor de x, aplicando la definición de ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justifiquemos











3 Área y Perímetro de triángulos y cuadriláteros

Indicador de logro

Resuelve problemas de la cultura campesina utilizando área y perímetro de triángulos y cuadriláteros.

3.1 Triángulo.

Desde la antigüedad se utiliza un tipo de figuras geométricas llamadas triángulos. Por historia sabemos que el hombre primitivo a las puntas de sus herramientas de caza le daba forma triangular, así también se conoce que los faraones tuvieron uso de los triángulos por medio de la construcción de tumba en forma de pirámides, cuyas caras eran de forma triangular. Y hoy en día se utilizan en diversos campos, como en la arquitectura, ingeniería, topografía, etc.

Por lo tanto, el tema de los triángulos nos servirá de base para luego conocer figuras de mayor cantidad y para resolver problemas de nuestra vida diaria; pero para ello necesitamos conocer su definición, clasificación y las propiedades más importantes que podemos aplicar para resolver ejercicios y problemas que involucren a los triángulos.

El triángulo es el polígono más sencillo, pero no por eso menos interesante. Alrededor nuestro lo encontramos formando parte de construcciones, objetos, figuras, etc....

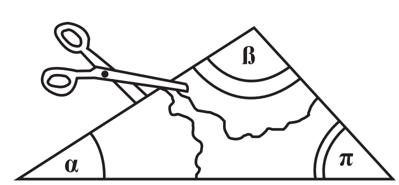
Una gran cantidad de imágenes de la vida real, tales como las que muestra la fotografía, el techo de una casa, las señales de peligro de tráfico, entre otras, nos da idea de la forma de los triángulos, cuya definición es:

El **TRIÁNGULO** es un polígono de tres lados

Propiedades de los triángulos:

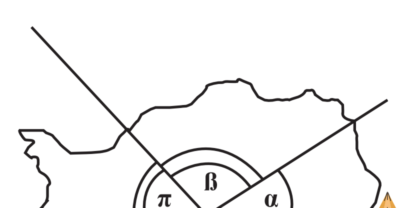
- Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180.
- El valor de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

A manera de demostración - práctica comprobemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180.



Para ello:

- Dibujemos un triángulo y los cortamos como lo indica la siguiente figura.

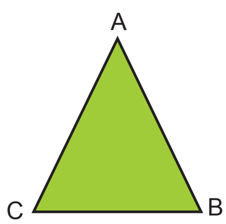


- Pongamos los tres ángulos uno al lado del otro y comprobaremos que la suma es igual a un ángulo de 180.

3.2 Clasifican los triángulos.

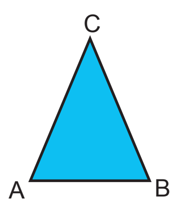
Clasificación de triángulos

- **De acuerdo con sus lados**
  - **Equilátero**
  - **Escaleno**
  - **Isósceles**
- **De acuerdo con sus ángulos**
  - **Acutángulo**
  - **Obtusángulo**
  - **Rectángulo**



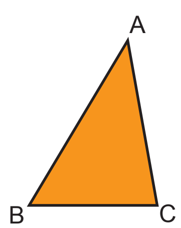
Triángulo equilátero:

El triángulo equilátero es aquél que tiene los tres lados iguales y por lo tanto sus ángulos, siendo cada uno de 60 grados.



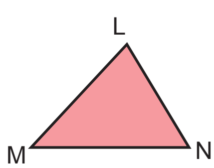
Triángulo Isósceles:

El triángulo isósceles aquél que tiene dos lados iguales y uno desigual, los ángulos de la base son congruentes (misma forma y misma medida).



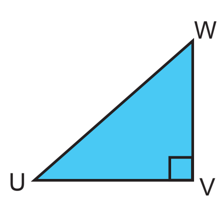
Triángulo Escaleno:

El triángulo escaleno es aquél que tiene los tres lados desiguales y por lo tanto sus ángulos.



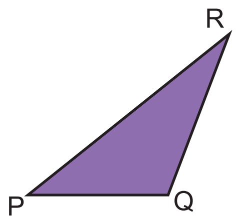
Triángulo Acutángulo:

Este tipo de triángulos tienen sus tres ángulos menores de 90°. El ΔLMN es acutángulo.



Triángulo Rectángulo:

Este triángulo tiene un ángulo cuya medida es 90º.

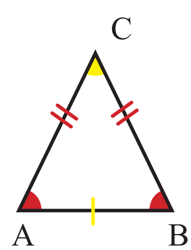
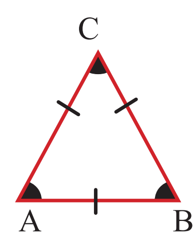
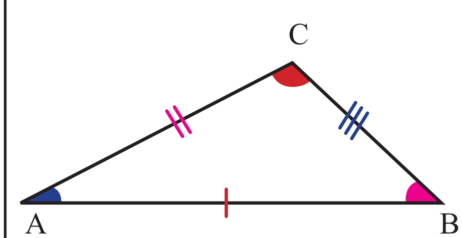
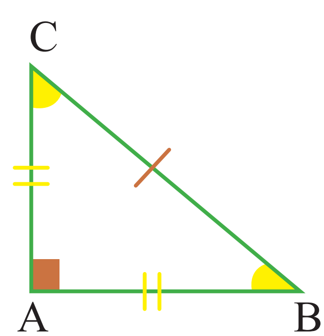
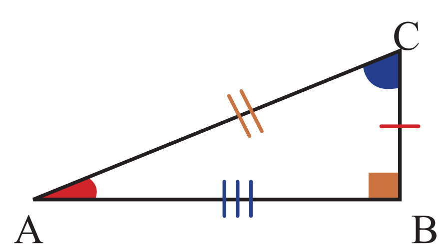
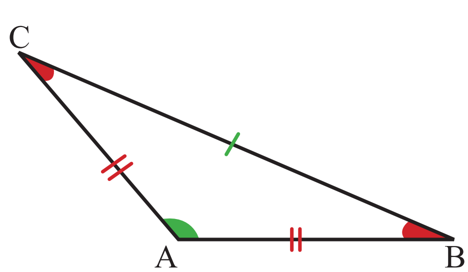
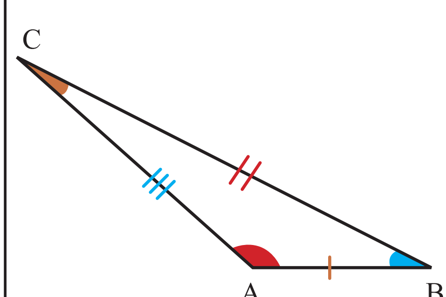


Triángulo Obtusángulo:

Es aquel en que la longitud de uno de sus ángulos es mayor de 90°. En la figura PQR mide más de 90° y es un ángulo obtuso.

Ahora elaboraremos una tabla que nos facilitará la visualización y la comprensión delos diferentes triángulos.

Señalamos con colores las características propias de cada uno. Usamos el mismo color para señalar los ángulos congruentes entre sí; el mismo color e igual cantidad de marcas para los lados de longitudes iguales:

Clasificación de Triángulos			
	Según sus lados		
		Isósceles	**Escaleno**
Según sus ángulos	**Acutángulo**	 	
	Rectángulo		
	Obtusángulo		

Hagamos algunas reflexiones

¿En algunos triángulos podemos asegurar la medida de sus ángulos?

Sí, podemos. En el triángulo equilátero y en el triángulo isósceles-rectángulo.

- **Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60°cada uno.**
- **Los ángulos agudos de un triángulo isósceles-rectángulo miden45° cada uno.**

¿Podemos establecer alguna otra relación?

- **Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. Es decir suman 90°**

¿Qué relación existe entre los ángulos y los lados opuestos?

- **En todo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado, y a menor ángulo se opone menor lado.**
- **En todo triángulo, a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.**

¡Ahora repasemos los conocimientos adquiridos sobre triángulos!

Escribamos una V o F en la raya de la derecha, si consideramos que el enunciado es verdadero o falso. En caso de ser falso, escribamos el enunciado correctamente, como lo muestra el ejemplo.

a) El triángulo escaleno tiene sus tres lados iguales. _F_ .

El triángulo escaleno tiene sus tres lados desiguales.

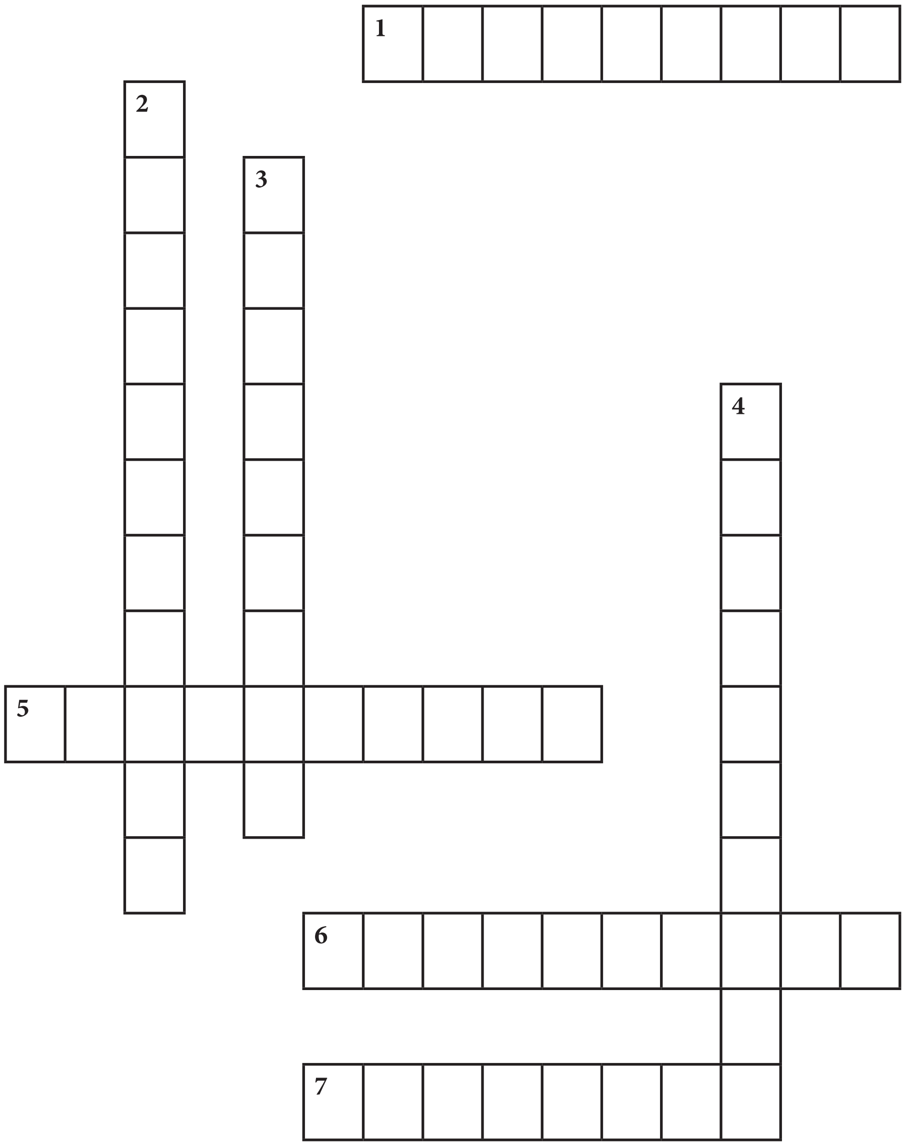
b) El triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual.____

c) El triángulo obtusángulo tiene un ángulo agudo y dos obtusos.____

d) El triángulo equilátero tiene todos sus lados iguales. ____

e) El triángulo acutángulo tiene un ángulo obtuso y dos agudos. _____

Completa el crucigrama.



Verticales:

2. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

3. Polígono de tres lados

4. Nombre del triángulo que tiene un ángulo de 90º.

Horizontales:

1. Triángulo que tiene por lo menos dos lados iguales.

5. Triángulo que tiene sus lados iguales.

6. Triángulo que tiene sus ángulos agudos.

7. Triángulo con sus tres lados de diferente longitud.

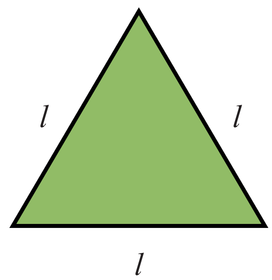
Perímetro del triángulo

El triángulo, a pesar de su aparente sencillez, esconde multitud de resultados interesantes. Además cualquier otro polígono se puede descomponer en triángulos, por ello todas las propiedades sobre áreas, ángulos, etc. se trasladan inmediatamente desde el triángulo a otras figuras más complejas.

El perímetro de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus tres lados.

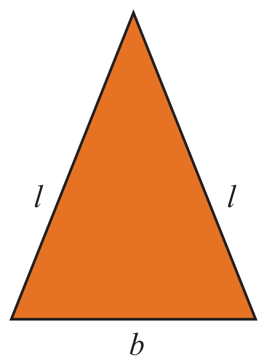
Perímetro: es la suma de los lados de una figura geométrica. Es su contorno.

Para un triángulo equilátero:



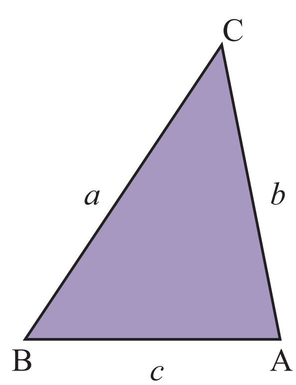
$P = l + l + l = 3l$

Para un triángulo isósceles:



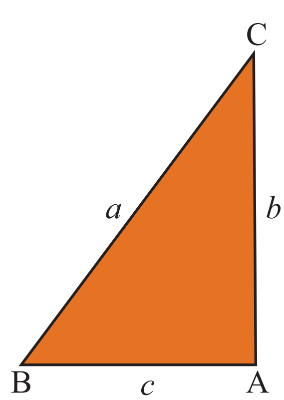
$P = l + l + b = 2l + b$

Para un triángulo escaleno:



$P = a + b + c$

Para un triángulo rectángulo:



$P = a + b + c$

Bien, antes de continuar, comprobemos los conocimientos adquiridos.

¡Intentémoslo!

Elaboremos un cuadro sinóptico sobre el perímetro de un triángulo teniendo en cuenta su clasificación.

Área de un triángulo.

El área de un triángulo es igual a la mitad de su base por la altura.

La altura es la **recta perpendicular** trazada desde un **vértice al lado opuesto** (o su prolongación).

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

El semiperímetro de un triángulo es igual a la suma de sus lados dividido entre 2.

Se nombra con la letra *p*.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

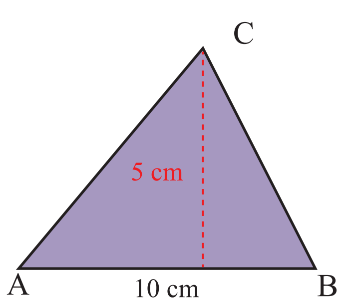
La fórmula de Herón se utiliza para hallar el área de un triángulo, cuando conocemos sus tres lados, pero no la altura.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ejemplo 1

Si la base de un triángulo mide 10 cm y su altura mide 5 cm. Calculemos el área del triángulo

Solución: Dibujemos el triángulo.



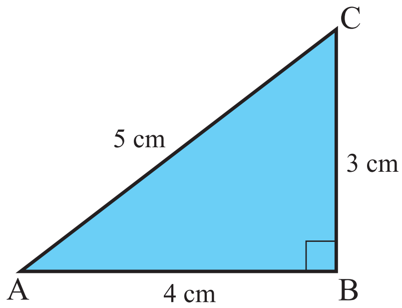
Para calcular el área aplique la fórmula, que ya conocemos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25\,cm^2$$

Ejemplo 2

Calculemos el perímetro y el área de los siguientes triángulos:

a. Sabemos que para calcular el perímetro debemos sumar todos los lados:



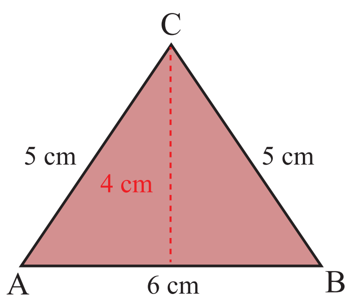
$4 + 3 + 5 = 12$ cm

Para calcular el área aplicamos la fórmula: En este caso tenemos un triángulo rectángulo, entonces la altura es igual al lado que mide 3 cm.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ cm^2$$

b. Sabemos que para calcular el perímetro debemos sumar todos los lados:

$5 + 5 + 6 = 16$ cm

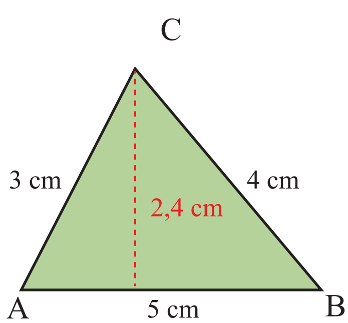


Para calcular el área aplique la fórmula, que ya conocemos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\,cm^2$$

c. Para calcular el perímetro debemos sumar todos los lados:

$3 + 4 + 5 = 13$ cm

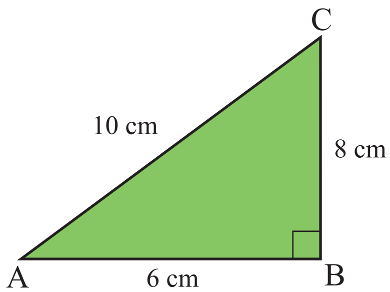


Para calcular el área aplique la fórmula, que ya conocemos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 2{,}4}{2} = 6\ cm^2$$

d. Para calcular el perímetro debemos sumar todos los lados:

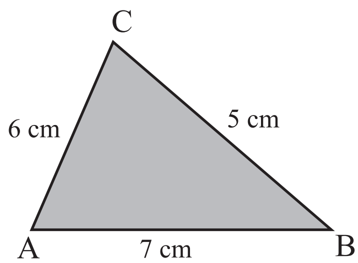
$10 + 6 + 8 = 24$ cm



Para calcular el área aplicamos la fórmula:
En este caso tenemos un triángulo rectángulo, entonces la altura es igual al lado que mide 8 cm.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$$

e. Calcular el área del triángulo ABC, teniendo en cuenta las medidas dadas.



Primero calculemos el semiperímetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{7+5+6}{2} = 9 \text{ cm}$$

Ahora calculemos $p - a$, $p - b$ y $p - c$

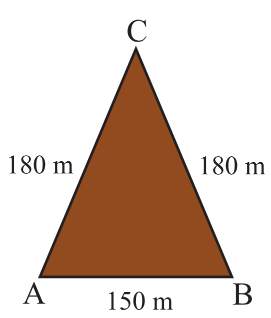
$p - a = 9 - 7 = 2$ cm

$p - b = 9 = \sqrt{262} = 14{,}7$ cm^2

Problemas de aplicación

Se necesita cercar un huerto de forma triangular cuyos lados miden 180 m, 150 m y 180 m respectivamente. Calcular cuántos metros de alambre se necesitan si se quiere cercar con 6 hilos de alambre.

Solución Dibujemos primeramente el huerto.



Para calcular los metros de alambre que necesitamos debemos calcular el perímetro del triángulo

$P = 180 + 180 + 150 = 510$ m

Como necesitamos 6 hilos de alambre debemos multiplicar:

$510 \cdot 6 = 3\,060$ m

Conclusión: En total necesitamos 3 060 m de alambre.

Actividades

Comprobemos lo aprendido

Resolvamos correctamente los siguientes ejercicios y seleccionemos la respuesta correcta:

1. Si el perímetro de un triángulo equilátero mide 18 cm. ¿cuánto mide su lado?
   a. 5 cm
   b. 3 cm
   c. 6 cm
2. Los lados de un triángulo escaleno miden: 4 cm, 7 cm y 9 cm. Su perímetro es:
   a. 23 cm
   b. 20 cm
   c. 27 cm
3. ¿Cuál es el área de un triángulo que mide 6,8m de base y 9,3m de altura?
   a. 24,62 cm
   b. 15,67 cm
   c. 31,62 cm
4. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6cm y la hipotenusa 10cm?
   a. 18 cm
   b. 19 cm
   c. 23 cm

Analicemos y resolvamos correctamente:

1. Se siembra un terreno triangular con hortalizas utilizando abono orgánico. Si el terreno tiene las siguientes dimensiones: 7,5 m; 4,5 m y 9m. Calculemos el perímetro y el área sembrada.
2. Si el terreno del ejercicio anterior es equilátero y tiene un perímetro de 48 m. ¿Cuánto mide cada lado?
3. Una zona boscosa tiene forma de triángulo cuyos lados miden 45 m, 28 m y 53 m. Determinemos el área de la zona.

3.3 Cuadrilátero.

Pensemos por un momento, ¿cuáles son las formas que caracterizan a la mayoría de los objetos o estructuras que nos rodean? Si analizamos por un instante, las palabras cuadrado,rectángulo, entre otras, podrían venir a nuestra mente. Y, en efecto, éstos son cuadriláteros.

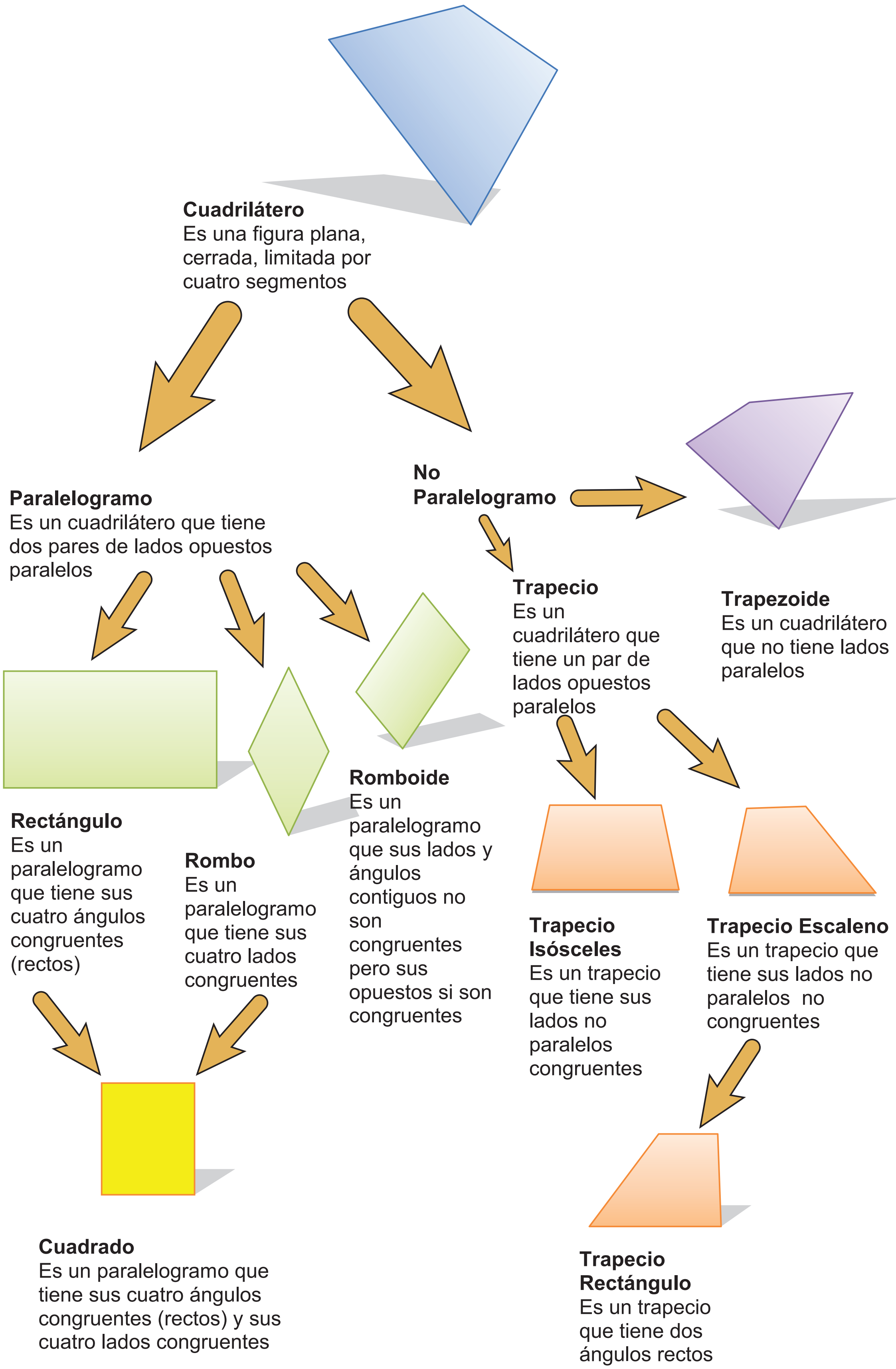
Los polígonos limitados por cuatro lados y que además forman entre sí cuatro ángulos, se denominan **Cuadriláteros.**

Propiedades de los cuadriláteros:

1. Los **“lados opuestos”** son iguales y no tienen ningún vértice en común.
2. Los **“lados consecutivos”** son los que tienen un vértice en común.
3. Los **“vértices y ángulos opuestos”** son los que no pertenecen a un mismo lado, siendo los ángulos iguales.
4. La **“suma de ángulos interiores”** es igual a cuatro rectos (360).
5. Los **“ángulos adyacentes”** a un mismo lado son suplementarios, es decir, suman 180.
6. Las **“diagonales”** se cortan en su punto medio.
7. El **“número total de diagonales”** que pueden trazarse siempre son dos y se cortan en un punto interior.
8. Desde un vértice solo puede trazarse una **“diagonal”.**

Hay varias formas de clasificar los cuadriláteros; a continuación se presenta la más extendida, con las respectivas definiciones, que atiende al paralelismo de los lados del cuadrilátero.

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS



Calculemos el perímetro de un cuadrilátero

El perímetro de un cuadrilátero podemos encontrarlo sumando la longitud de sus lados, igual como lo hicimos en el caso del triángulo.

Para acercar a los estudiantes al mundo de la agricultura y la naturaleza nuestro Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional está promoviendo la construcción de huertos escolares con el objetivo de que avancemos hacia una comunidad más sostenible, más limpia, más ahorradora y más saludable.

Supongamos que en la escuela José Benito Escolar los estudiantes de séptimo grado han sembrado un área de hortalizas en forma rectangular, cuyas dimensiones son 6m y 4m por lado encontremos el perímetro de este huerto.

Como la forma que tiene el huerto es un rectángulo, significa que dos de sus lados miden 6m y los otros dos lados miden 4m

Para calcular el perímetro sumamos los cuatro lados, es decir

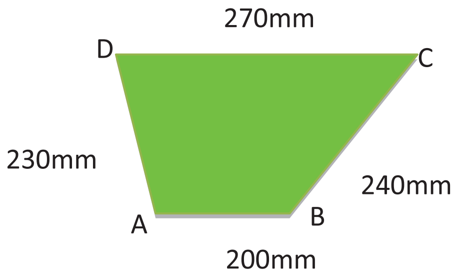
$\mathbf{6 + 6 + 4 + 4 = 20}\ \boldsymbol{m}$

De la misma manera se hace para encontrar el perímetro de cualquier cuadrilátero

Ejemplo

Encontremos el perímetro de los siguientes cuadriláteros

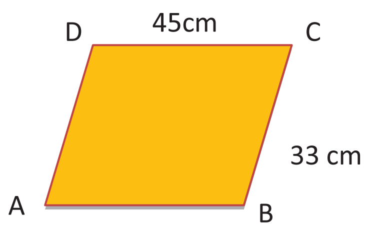
a)



Para encontrar el perímetro del trapecio de la figura sumemos los lados

$\mathbf{270 + 230 + 200 + 240 = 940}$ ***mm***

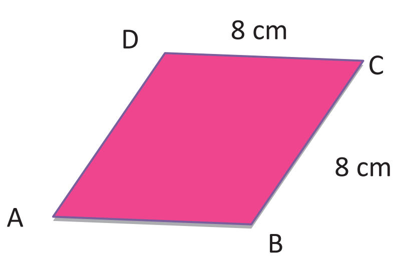
b)



En este caso tenemos un romboide, tiene los dos lados paralelos iguales, por lo tanto, el perímetro será

$\mathbf{45 + 45 + 33 + 33 = 156}$ ***cm***

c)

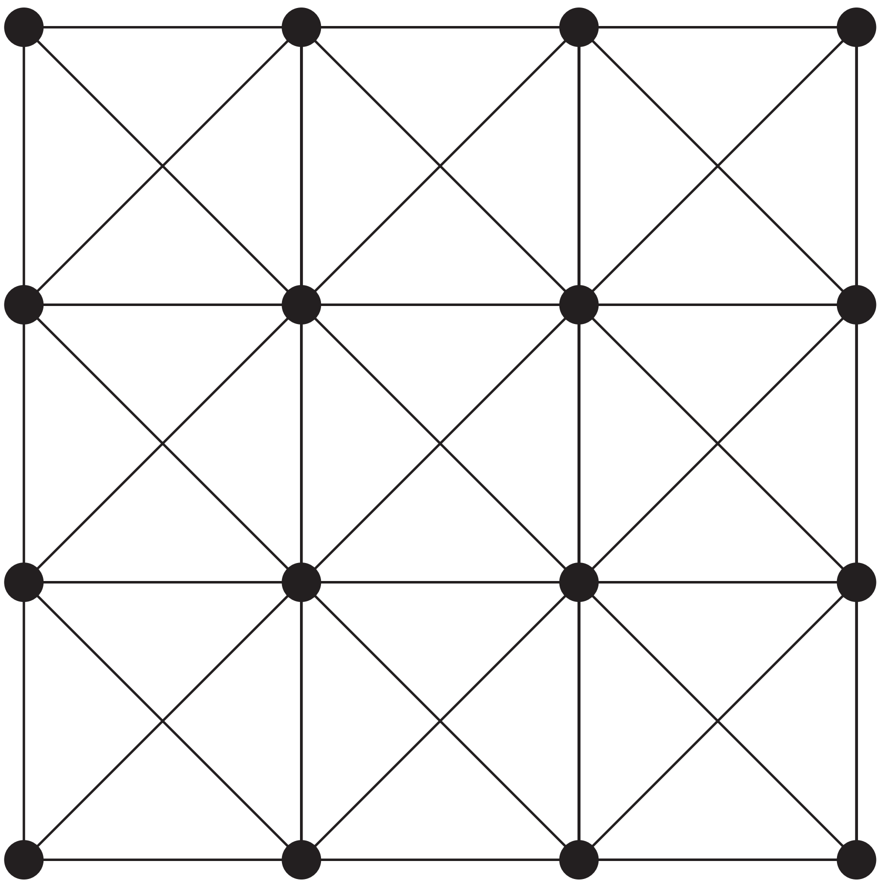


En este caso tenemos un rombo cuyos lados miden 8 cm. Su perímetro será:

$\mathbf{8 + 8 + 8 + 8 = 32}$ ***cm***

Bien, comprobemos los conocimientos adquiridos

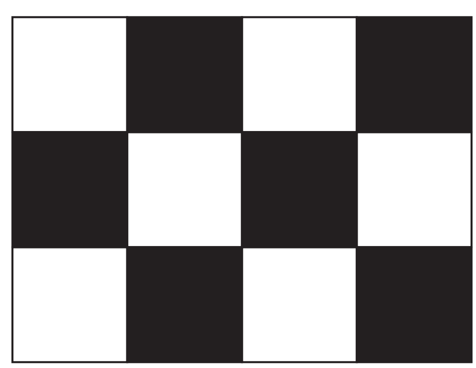
A continuación tenemos un tablero que tiene 16 clavos. Supongamos que la distancia entre los clavos es de 5 cm. Formemos figuras de diferentes tamaños de los cuadriláteros que conocemos y calculemos su perímetro.



Procederemos al estudio del área de los cuadriláteros:

Área de cuadriláteros

Observemos la siguiente figura.



Notemos que está dividido en varios cuadrados iguales. Si cada cuadrado mide $1m^2$ entonces podemos decir que la superficie que ocupa la figura es de $12m^2$.

Definiremos el área de una figura plana como:

La medida de la superficie que ocupa una figura

Observemos la siguiente figura.

Luisa y Pablo están pegando azulejos en la pared que será la cocina de su casa.

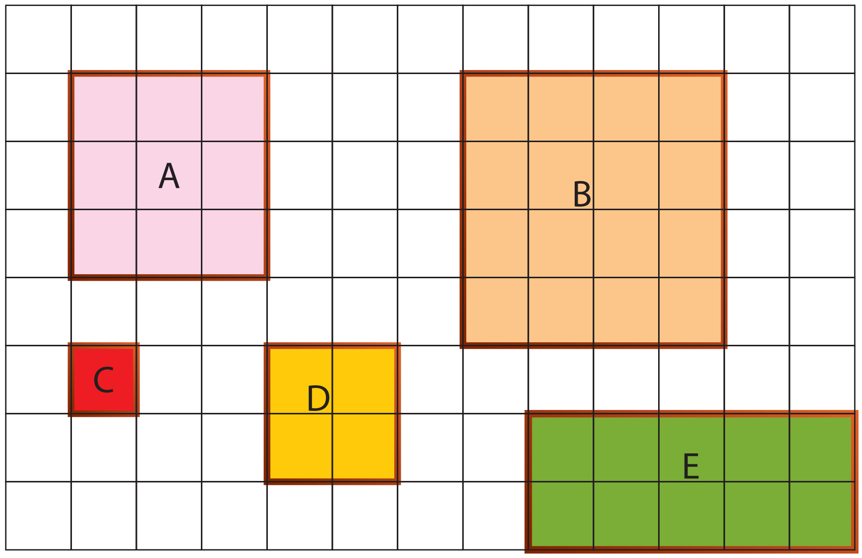
¿Quién ha cubierto más pared?

Podemos ver que las dos superficies cubiertas tienen formas diferentes. Para saber cuál de las dos es mayor utilizamos un cuadrado como unidad de medida, por ejemplo, un azulejo.

Contemos cuántos azulejos ha colocado cada uno.

Podemos ver que Luisa ha pegado 17 azulejos y Pablo solamente 15, por lo tanto Luisa ha cubierto **17 unidades cuadradas** y Pablo ha cubierto **15 unidades cuadradas,** entonces el área cubierta por Luisa es mayor.

Veamos otro ejemplo, calculemos el área de las siguientes figuras:



Podemos observar que las figuras A, B, C y D son cuadrados de diferentes tamaños.

El área del cuadrado A es igual a 9 unidades cuadradas. También observamos que cada lado de este cuadrado mide 3 unidades.

El área del cuadrado B es igual a 16 unidades cuadradas. Cada lado de este cuadrado mide 4 unidades

El área del cuadrado C es igual a 1 unidad cuadrada. Cada lado de este cuadrado mide 1 unidad.

El área del cuadrado D es igual a 4 unidades cuadradas. Cada lado de este cuadrado mide 2 unidades.

Generalizando podemos decir que:

El área de un cuadrado es lado por lado

$$A = a \cdot a = a^2$$

El área del rectángulo E es igual a 10 unidades cuadradas. Un lado de este rectángulo mide 5 unidades y el otro 2 unidades

El área de un rectángulo se calcula de forma semejante al del cuadrado, lo único que cambia es que las medidas de los lados son distintas. Al largo, lo denominaremos a, y al ancho, b. También al largo se le denomina base y al ancho, altura

Por lo tanto

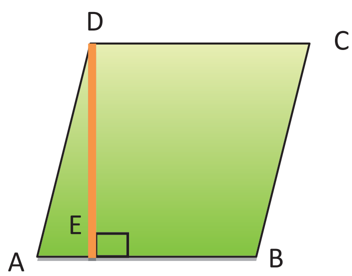
El área de un rectángulo es largo por ancho, o lo que es lo mismo base por altura

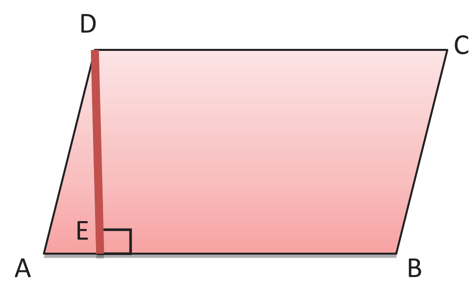
$$A = a \cdot b$$

Área de Rombos y romboides

Recordemos que los rombos y romboides son paralelogramos que no tienen ángulos rectos, por lo que en ellos no se puede aplicar la fórmula anterior.

Para calcular su área, recurriremos a un elemento secundario: la altura, un segmento perpendicular (forma ángulo de 90°) que une un lado con su vértice opuesto.



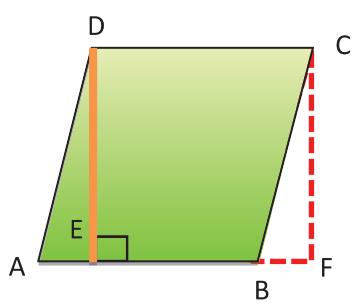


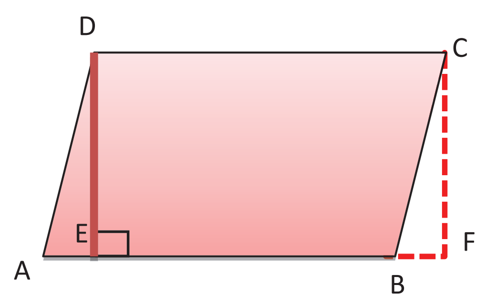
En el rombo y romboide dibujados, DE corresponde a la altura.

¿Por qué necesitamos la altura para calcular el área?

Trazaremos una paralela a la altura desde C y prolongaremos el lado AB hasta obtener F.

Se formó un triángulo BFC, congruente con AED y nos quedó el rectángulo EFCD.





Podemos apreciar que el rectángulo formado tiene como largo el lado del rombo o romboide, y su ancho es la altura dibujada.

Entonces, concluimos que:

El área del rombo o romboide = b • h, donde b es la base y h, la altura

En resumen,

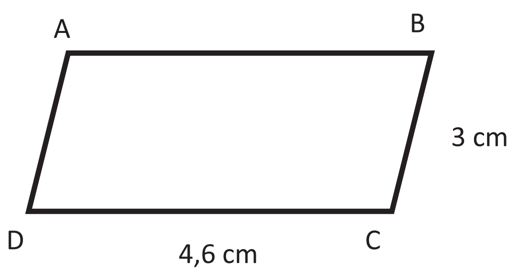
Cualquier paralelogramo tiene una sola fórmula para calcular su área, ya que, en el cuadrado y en el rectángulo, un lado es la base y el otro, la altura. Entonces:

Área de un paralelogramo = b • h, donde b es la base y h, la altura

Veamos un ejemplo:

Calculemos el área de un paralelogramo que tiene 4,6 cm por lado y su altura es de 3 cm.

Dibujemos primero el paralelogramo



Apliquemos la fórmula:

$$\textit{Área del rombo} = b \cdot h$$

$$\textit{Área del rombo} = 4{,}6 \cdot 3 = 13{,}8\ cm^2$$

Importante

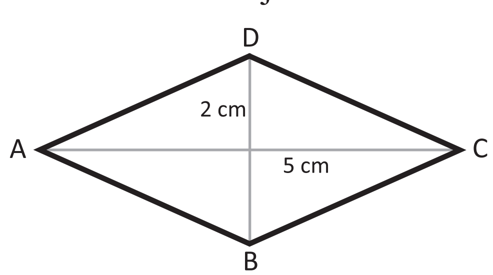
Si en un rombo se conocen las diagonales, podemos calcular el área utilizando la siguiente fórmula:

$$\textit{Área del rombo} = \frac{\textit{Diagonal mayor} \cdot \textit{Diagonal menor}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo

Hallar el área de un rombo con diagonales de 5 cm y 2 cm.

Procedemos a dibujar el rombo.

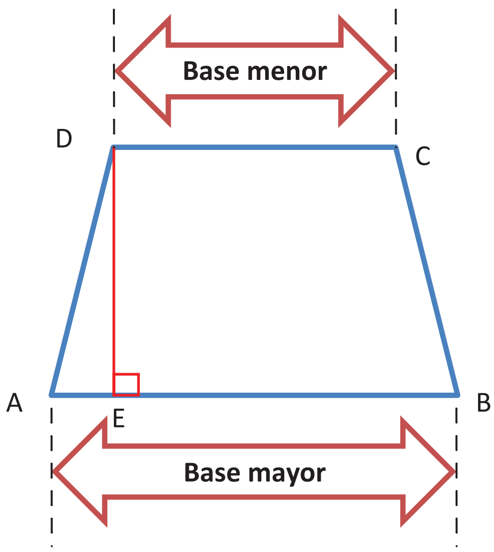


Aplicamos la fórmula

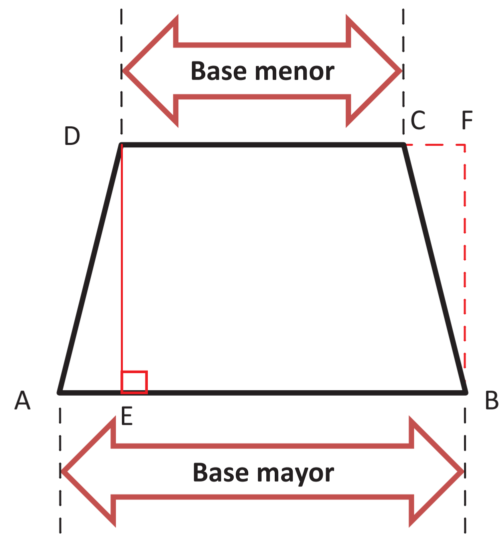
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A = \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{10}{2} = 5cm^2$$

Ahora calcularemos el área del trapecio



Sabemos que los trapecios son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos llamados bases. Sus lados, es decir, los no paralelos, no son perpendiculares a las bases, salvo el trapecio rectángulo que tiene perpendicular uno de ellos. Para el cálculo de su área también necesitamos considerar la altura.



Para formar un rectángulo trazamos la paralela a DE desde B y prolongamos DC hasta formar F.

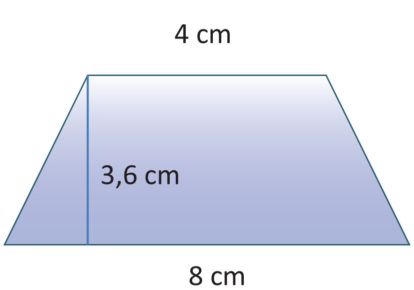
Nos queda el triángulo AED que es congruente con el triángulo CFB y nuestro rectángulo es EBFD.

El rectángulo tiene como largo la mitad de la suma de las bases del trapecio y su ancho es la altura que trazamos. El área del trapecio se puede calcular aplicando la fórmula:

$$\textit{Área del trapecio} = \frac{(\textit{Base mayor} + \textit{Base menor})}{2} \cdot h = \frac{(B+b)h}{2}$$

Calculemos el área del siguiente trapecio:

Tenemos todos los elementos para aplicar la fórmula del área del trapecio.



$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

$$A = \frac{(8+4)}{2} \cdot 3{,}6$$

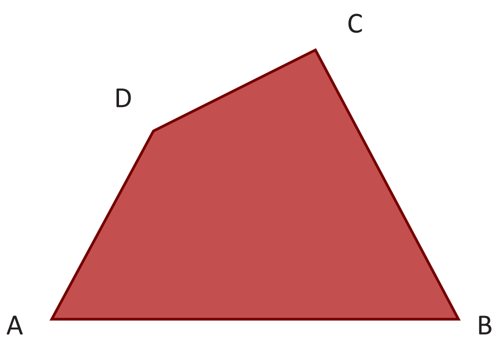
$$A = \frac{12}{2} \cdot 3{,}6$$

$$A = 6 \cdot 3{,}6$$

$$A = 21{,}6\ cm^2$$

Calculemos ahora el área de un trapezoide.

Recordemos que un trapezoide es un cuadrilátero que no posee lados paralelos

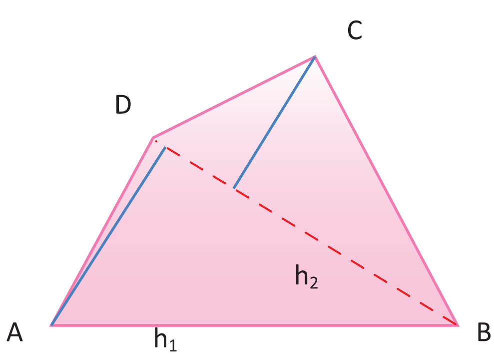


Vamos a calcular el área del trapezoide a partir del área de un triángulo.

Sabemos que el área de un triángulo es:

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Partiremos dibujando un trazo entre dos vértices opuestos para así obtener dos triángulos:



También dibujamos las alturas de cada triángulo.

El área del trapezoide será la suma del área de ambos triángulos. Como sabemos que el área de un triángulo es la mitad del producto entre la base y la altura, dibujaremos ahora la altura de ambos triángulos:

El área del trapezoide será entonces

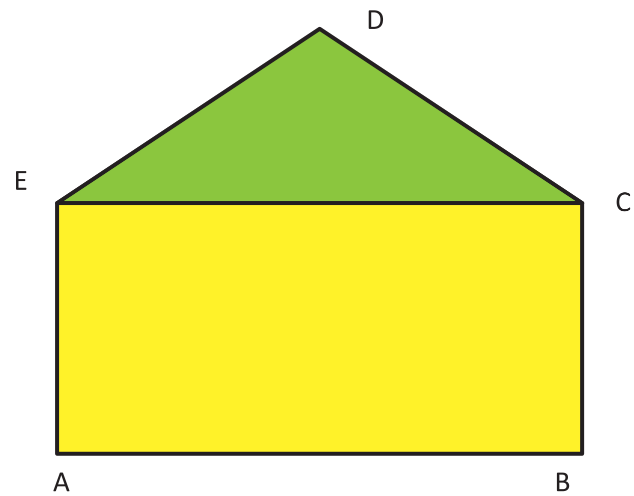
$$\textit{Área del triángulo} = \frac{\overline{BD} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{BD} \cdot h_2}{2}$$

Como ya sabemos calcular el área de triángulos y cuadriláteros podemos obtener el área de figuras formadas por ambos.

Para distinguir la parte que se debe calcular como resultado final se procede a dividarla en polígonos conocidos, es decir, se pinta o raya cada polígono encontrado, luego hacemos el cálculo de cada parte, y finalmente, sumamos para encontrar el área total.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Tenemos la siguiente figura



Nuestra figura está formada por un rectángulo y un triángulo, por lo tanto, el área de ésta será la suma del área de ambas figuras (rectángulo y triángulo).

Si AB = 8 m, BC = 3 m y la altura del triángulo es 2 m. ¿Cuál es el área de nuestra figura?

Solución

Calculemos el área de cada una de nuestras figuras, aplicando las respectivas fórmulas:

$$\textit{Área del rectángulo} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$\textit{Área del rectángulo} = 8 \cdot 3 = 24\ m^2$$

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{\overline{EC} \cdot h}{2}$$

como el lado $\overline{EC} = \overline{AB} = 8m$, sustituimos

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{8 \cdot 2}{2} = \frac{16}{2} = 8cm^2$$

Para encontrar el área total sumamos los dos resultados anteriores:

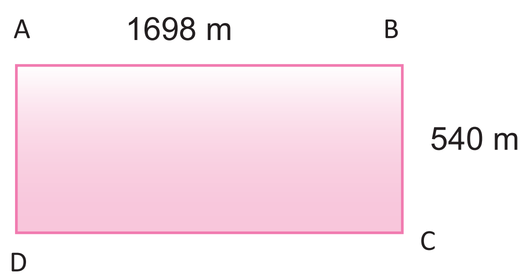
$$\textit{Área total} = 24 + 8 = 32m^2$$

3.4 Problemas de aplicación

1. **Una finca rectangular que mide 1698 m de largo por 540 m de ancho se sembró de maíz. Al realizar la cosecha cada decámetro cuadrado de terreno ha producido 7890 kg de maíz. ¿Cuántos kg se han cosechado?**

Solución:

Dibujemos primeramente un rectángulo que representa la finca



Ahora calculemos el área del rectángulo para saber cuántos metros cuadrados se sembraron. Para ello apliquemos la fórmula

Área del rectángulo = *largo* · *ancho*

Área del rectángulo = 1698 · 540

Área del rectángulo = 916 920 m^2

Convertimos los metros cuadrados a decámetros cuadrados

Como vamos a pasar de una cantidad menor a una mayor debemos dividir entre 100.

Recordemos que para dividir entre la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares a la izquierda como ceros hayan.

En nuestro caso debemos correr dos lugares a la izquierda

Entonces tenemos

$$\frac{916\,920}{100} = 9\,169{,}20\ Dm^2$$

Calculemos los kg cosechados

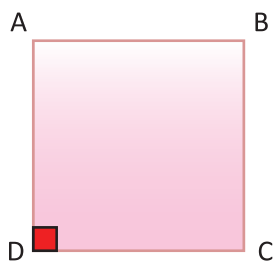
Para calcular la cantidad en kilogramos multiplicamos por el número de Kg que se cosecha por decámetro cuadrado, es decir por 7890.

$7890 \cdot 9\,169{,}20 = 72\,344\,988\ kg$

2. Un señor compró un solar cuadrado en el centro del pueblo de 36 metros de lado para hacerse una vivienda. Pagó C$112,75 el metro cuadrado. ¿Cuánto dinero ha invertido en el solar?

Solución

Dibujemos el área del solar



Hemos señalado con rojo 1 m^2 del solar comprado.

Calculemos cuántos metros cuadrados mide el solar:

Área = lado · lado

Área = 36 · 36 = 1 296 m^2

Como cada metro cuadrado tiene un valor de C$ 112,75 calculemos el valor total, para ello debemos multiplicar

1 296 ·112,75 = C$ 146 124

Conclusión: El señor invierte en el solar C$ 146 124

3. Calcula el número de árboles que se pueden plantar en un campo de 32 m de largo y 30 m de ancho, si cada árbol necesita para desarrollarse 4 m^2.

Solución

Dibujemos el área del campo que se plantará de árboles

Calculemos cuántos metros cuadrados mide el campo:

Área = largo · ancho

Área = 32 · 30 = 960 m^2

Como cada árbol necesita 4 m^2 para desarrollarse calculemos cuántos árboles podemos sembrar, para eso vamos a dividir

960 ÷ 4 = 240

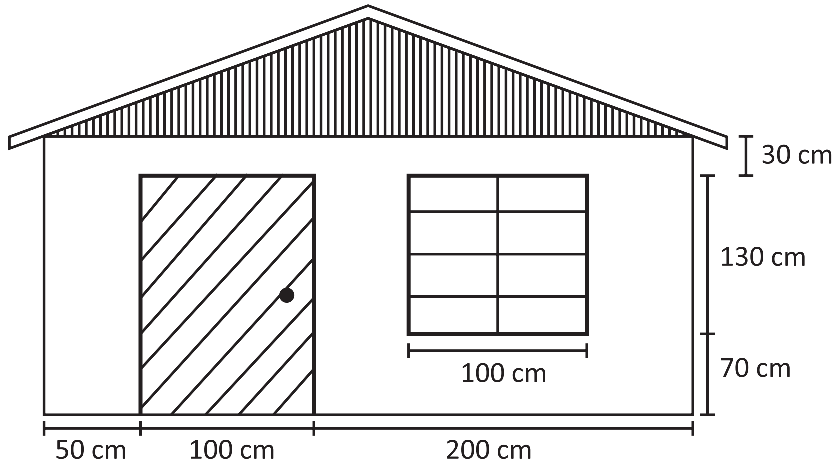
Conclusión: en el campo se pueden sembrar 240 árboles

4. Se tiene una bodega cuyas medidas se indican en la figura:

a) ¿Cuál es el perímetro de la puerta?

b) ¿Cuál es el perímetro de la ventana?

c) El frente de la bodega se pinta color amarillo ¿Cuánto mide la superficie a pintar?



Solución

a) De acuerdo a la figura la puerta mide 100 cm de ancho y 200 cm de alto, por lo que su perímetro será:

$$100+100+200+200=600\ cm$$

b) La ventana mide 100 cm de ancho y 130 de alto, entonces su perímetro será:

$$100+100+130+130=460\ cm$$

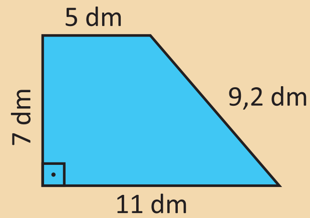
c) La superficie que se pintará mide 250 cm de ancho y 230 cm de alto por lo que el área será la del rectángulo con esas dimensiones:

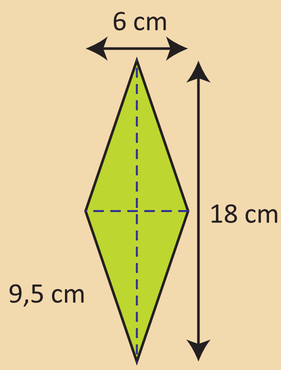
$$\acute{A}rea = ancho \cdot alto$$

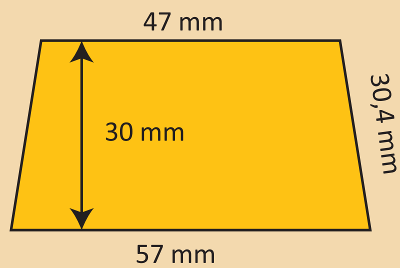
$$\acute{A}rea = 250 \cdot 230 = 57\ 500\ cm^2$$

Comprobemos lo aprendido

I. Hallemos el área y el perímetro de las siguientes figuras







II. Analicemos y resolvamos correctamente:

1. **Una finca cuadrada mide 348 metros, está plantada de árboles frutales. Si cada árbol ocupa una extensión de 9 m. ¿cuántos arboles habrán plantados en dicha finca?**

2. **Una familia ha decidido cambiar el piso del comedor que es de forma rectangular y mide 6,75 m. de largo y 4,5 m. de ancho. Desean colocar ladrillos cuadrados de 25 cm de lado. ¿Cuántos ladrillos necesitarán?**

3. **En el centro de un jardín cuadrado de 150 m de lado hay una piscina también cuadrada, de 25 m de largo. Calcula el área del jardín.**

4. **Una zona boscosa tiene forma de trapecio, cuyas bases miden 128 m y 92 m. La anchura de la zona mide 40 m. Se construye un paseo de 4 m de ancho perpendicular a las dos bases. Calcula el área de la zona arbolada que queda.**

5. **En una parcela de 450 m^2. se quiere construir una casa de una planta rectangular de 15 m de lado y 12 m de ancho. ¿Qué superficie libre quedará en la parcela para el jardín?**

Actividades

De acuerdo a los conocimientos adquiridos realicemos correctamente las siguientes actividades.

1. Marquemos con una X en la V si la expresión es verdadera o en F si es falsa.

	V	F
Los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.		
El rombo tiene todos los lados iguales y los ángulos opuestos iguales.		
El rectángulo es un trapezoide.		
El trapecio es un polígono.		
El cuadrado tiene todos los lados iguales y ángulos iguales a 90°.		
El trapezoide tiene todos sus ángulos rectos y los lados consecutivos desiguales.		
El paralelogramo tiene un solo par de lados paralelos.		

2. A continuación, se nos presenta una serie de preguntas referente a triángulos y cuadriláteros. Marquemos con una X la respuesta que consideremos correcta.

a. Un triángulo es un polígono que tiene:

Cuatro lados ( ) Tres lados ( ) Cinco lados( )

b. Un cuadrilátero es un polígono que tiene:

Seis lados ( ) Tres lados ( ) Cuatro lados ( )

c. Un triángulo tiene:

Dos vértices ( ) Tres vértices ( ) Cuatro vértices ( )

d. Un cuadrilátero tiene:

Cuatro vértices ( ) Un vértice ( ) Tres vértices ( )

e. El rectángulo es un:

Triángulo ( ) Cuadrilátero ( ) Hexágono ( )

f. El cuadrado tiene sus lados:

Iguales ( ) Desiguales ( ) Dos iguales y dos desiguales ( )

g. Un triángulo rectángulo se caracteriza por tener:

Un ángulo mayor de 90 ( ) Un ángulo de 90 ( ) Un ángulo menor de 90 ( ).

h. Los cuadriláteros se clasifican en:

Trapecios y triángulos ( ) Paralelogramos y cuadrados ( )

Paralelogramos y no paralelogramos ( )

i. Según sus lados, los triángulos se clasifican en:

Rombo-rectángulo ( ) Trapecio-trapezoide ( ) Escaleno-isósceles-equilátero ( )

j. Según sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

Rectángulos-rombo-isósceles ( ) Rectángulo-acutángulo-obtusángulo( )

Escaleno-acutángulo-isósceles ( )

3. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de 7cm de lado.

4. ¿Cuántos sacos de cereal se obtienen al sembrar un lote de 15 metros por 45 metros si se estima que cada metro cuadrado produce 10 sacos?

Autoevaluación

Copiemos y resolvamos cada ejercicio en el cuaderno. Luego elijamos la alternativa correcta

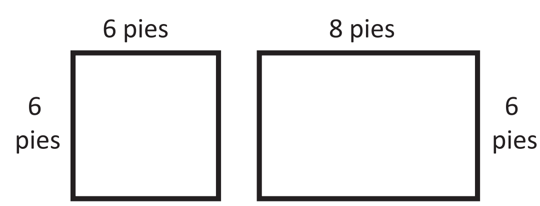
1. Una costurera necesita comprar 48 yardas de tela para hacer unos vestidos. ¿Cuántos pies de tela necesita comprar la costurera?

a. 3 pies
b. 51 pies
c. 124 pies
d. 144 pies

2. Una tabla rectangular mide 14 pies de largo y 4 pies de ancho. ¿Cuántos pies cuadrados mide el área de esta tabla?

a. 28 pies cuadrados
b. 36 pies cuadrados
c. 46 pies cuadrados
d. 56 pies cuadrados

3. Observa estas figuras. Si se compara el perímetro de estas figuras, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a. El perímetro del rectángulo es menor que el perímetro del cuadrado.

b. El perímetro del cuadrado es menor que el perímetro del rectángulo.

c. Ambas figuras tienen el mismo perímetro.

d. Ambas figuras tienen la misma área.

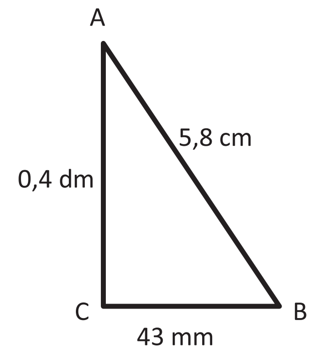
4. La cuarta parte en centímetros de 20 m es:

a. 40 cm
b. 400 cm
c. 4 m
d. 20 cm

5. 1 700 m equivale a:

a. 1 Km 7 m
b. 1 Km 70 m
c. 170 Dm
d. 1 Km 700 m

6. El perímetro del triángulo que se muestra en la figura es:



a. 141 cm b. 14,1 cm

c. 1,41 cm d. 14,1 dm

7. Un terreno para pastar, de forma cuadrada, tiene 305 dm de lado. Si se quiere cercar con cinco hilos de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitarán?

a. 122 m b. 6 100 m

c. 610 m d. 930,25 m

8. 13462 ha equivale a:

a. 134,62 a b. 13 462 m^2

c. 1 346,2 Km^2 d. 1,3462 Km^2

9. 92 m^2 equivale a:

a. 920,0 dm^2 b. 9 200 dm^2

c. 9,2 a d. 92 000 cm^2

1

0. En el huerto de una escuela se tiene sembrado repollo que tiene forma rectangular de 8,4 m de largo por 20 dm de ancho y cubre dos séptimos del mismo. El área del huerto es:

a. 58,8 m b. 58,8 dm^2

c. 48 m^2 d. 58,8 m^2

11. Un litro equivale a:

a Un metro cúbico

b Un centímetro cúbico

c Un decímetro cúbico

12. ¿Cuántos decilitros hay en 1/4 litro?

a. 2,5 dl b. 25 dl c. 1,4 dl

13. ¿Cuántos kl hay en 33 000 litros?

a. 330 kl b. 33 kl c. 3,3 kl

14. ¿Cuántos litros hay en 1 200 cl?

a. 1,2 l b. 12 l c. 120 l

15 ¿Cuántos ml hay en 4,5 dl?

a. 450 ml b. 45 ml c. 0,45 ml

16 En un ángulo se mide su:

a. longitud b. abertura c. superficie

17 Si con el transportador mido 90 grados, estoy midiendo:

a. un ángulo recto b. un ángulo agudo c. uno llano

18. Un ángulo llano equivale a:

a. dos ángulos obtusos b. dos ángulos agudos c. dos ángulos rectos

19. Los ángulos complementarios suman:

a. dos rectos b. un recto c. la suma de los ángulos que se dan

20. Dados tres ángulos con diferentes medidas:

a. siempre son suplementarios b. pueden ser suplementarios c. siempre son agudos

21. El valor de un ángulo depende:

a. de su abertura b. de la longitud de los lados

22. El círculo completo tiene:

a. 360 b. 180 c. 270

23. Dos ángulos son consecutivos si tienen:

a. dos lados iguales b. un lado y un vértice común c. la misma abertura

24. El grado es la unidad de medida:

a. de la amplitud de los ángulos b. de la longitud de los lados c. de la temperatura de los ángulos

Bibliografía

1. Burgos de J. Curso de Álgebra y Geometría. Madrid: Alhambra Longman, s.f.
2. Aurelio Baldor. Aritmética. Teórico-Práctica. España: Ramblas, 23 Barcelona, s.f.
3. Aurelio Baldor. Geometría plana y del espacio. España: MOSTOLES, Madrid, 1 978.
4. Clemens. Geometría. México: Addison Wesley Longman, 1 998.
5. Educación, Ministerio de. Matemática de Séptimo Grado. EL Salvador, 2 012.
6. Larson, R. E.; Hostetler, R. P. Álgebra. México, 1 993.
7. Swokowski y Cole. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Thomson, s.f.
8. Zill, D. ; Dewar, E. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. México: McGraw-Hill, 1 993.