



REPÚBLICA DE NICARAGUA



Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional

El Pueblo, Presidente!

MINISTERIO DE EDUCACIÓN



UNIÓN EUROPEA

Programa de Apoyo al Sector de Educación en Nicaragua

PROSEN

Orgullo de mi País!

MÓDULO Autoformativo de

MATEMÁTICA

8° Grado

2016

Vamos Adelante!

EN BUENA
ESPERANZA,

EN VICTORIAS!

EDUCACIÓN SECUNDARIA
A DISTANCIA EN EL CAMPO

Serie Educativa:

"Educación Gratuita y de Calidad, Derecho Humano Fundamental de las y los Nicaragüenses"

CRISTIANA,
SOCIALISTA,
SOLIDARIA!

Coordinación General, Revisión y Asesoría Técnica

Profesora María Elsa Guillén
Profesora Rosalía Ríos Rivas

Autores:

MSc. Mayra Azucena Blandón Gutiérrez
MSc. Julia Argentina Granera Rugama

Revisión Técnica General

Profesora Rosalía Ríos Rivas

Revisión y Asesoría Técnica Científica

Profesor Francisco Emilio Díaz Vega
Profesor Humberto Antonio Jarquín López

Diseño y Diagramación

Kristhel del Socorro Pérez Gutiérrez
Róger Iván Zamora
Miguel Ángel Lazo

Fuente de Financiamiento

Recursos del Tesoro - PROSEN

Primera Edición 2016

© Todos los derechos son reservados al Ministerio de Educación (MINED), de la República de Nicaragua.

Este Módulo es propiedad del Ministerio de Educación (MINED) , de la República de Nicaragua. Se prohíbe su venta y reproducción total o parcial.

«La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Unión Europea a través del Programa de Apoyo al Sector Educación en Nicaragua (PROSEN). El contenido de la misma es responsabilidad exclusiva del MINED y en ningún caso debe considerarse que refleja los puntos de vista de la Unión Europea».

PRESENTACIÓN

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través del Ministerio de Educación (MINED), entrega a docentes y a estudiantes de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, el módulo autoformativo el cual ha sido elaborado con el propósito de fortalecer el proceso de aprendizaje de las y los estudiantes y los valores de la cultura campesina.

El módulo es un instrumento de trabajo independiente para el estudiante con actividades de iniciación, desarrollo y consolidación, que permitirán alcanzar los indicadores de logro en cada una de las disciplinas.

Las diversas actividades que se orientan en el módulo contribuyen a promover el autoestudio, el autocontrol, la autoevaluación y el “aprender a aprender” en la que el estudiante apliquen los conocimientos, habilidades, actitudes y valores adquiridos a través de su formación, transformar su entorno, su comunidad y país.

El módulo contiene información diversificada que propiciará en las y los educandos empoderarse y fortalecer sus conocimientos, lo cual evidentemente servirá como instrumento didáctico muy valioso que le facilitará valorar, corregir y perfeccionar sus habilidades respetando la cultura campesina de trabajar y estudiar, a fin de que se sienta miembro fundamental de su comunidad.

Este documento es propiedad social, por tanto debe cuidarse para que también le sea de provecho a otros estudiantes, razón por la que le sugerimos lo forre, evite mancharlo, ensuciarlo, romperlo o deshojarlo. Esa será su contribución desinteresada y solidaria, con los próximos estudiantes que utilizarán este módulo.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INTRODUCCIÓN

Apreciables niñas, niños y adolescentes:

El presente módulo corresponde a octavo grado de Matemática en la modalidad de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, el cual se ha elaborado con mucho esfuerzo y dedicación, haciendo realidad una vez más la restitución de derechos que promueve nuestro Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional.

Se pretende que este recurso didáctico sea un instrumento eficaz para su el aprendizaje y desarrollo de sus habilidades y destrezas, utilizando las operaciones y propiedades del conjunto de los números enteros y racionales, así como las magnitudes proporcionales y aplicación de Sistema Internacional de Unidades en la resolución de problemas que a diario acontecen en la vida cotidiana.

El módulo está estructurado en cuatro unidades:

- I. El conjunto de los números reales en la naturaleza (\mathbb{R}).
- II. El álgebra en la vida cotidiana.
- III. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones en la vida rural.
- IV. Aplicaciones de la Geometría Euclidiana en el campo.

Esta herramienta didáctica se elaboró utilizando un lenguaje sencillo y comprensible. En él se proporcionan: conceptos, definiciones, propiedades, ejemplos y problemas de aplicación a la vida del al campo, así como ilustraciones, imágenes y mapas conceptuales, que facilitarán el análisis y comprensión de la Matemática.

Se recomienda realizar las “Actividades de aprendizaje” propuestas en el módulo, así como las soluciones correspondientes a las mismas. De igual manera, les sugerimos exponer sus dudas en los encuentros presenciales y tutoriales.

Estas actividades les brindan la oportunidad de poner en práctica la creatividad, adaptada a sus capacidades e intereses y encaminados hacia el logro de los desempeños de aprendizaje e indicadores de logro propuestos en el programa de Matemática.

Al finalizar el estudio de cada unidad, se les presentan actividades de autoevaluación, donde aplicarán los conocimientos y habilidades adquiridos durante el desarrollo del módulo; lo que permitirá una valoración del avance de su aprendizaje.

Es importante recordar que los módulos son propiedad social, razón por la cual se deben cuidar con esmero, no rayarlos ni destruirlos; lo que permitirá que otros estudiantes que están en los grados que les anteceden, también puedan hacer uso de ellos. De esta forma se demuestra el sentido de responsabilidad, compañerismo y solidaridad, valores que deben prevalecer en ustedes y que son promovidos y fortalecidos permanentemente por el Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional (GRUN).

ÍNDICE

I UNIDAD

| | |
|--|-----------|
| 1. Conjunto de los números reales | 2 |
| 1.1 Números irracionales..... | 3 |
| 1.2 Necesidad del surgimiento de los Números Irracionales..... | 4 |
| 1.3 Definición del Número Irracional..... | 6 |
| 1.4 Números irracionales opuestos..... | 8 |
| 1.5 Representación de los números irracionales en la recta numérica..... | 11 |
| 2. Operaciones con números reales y sus aplicaciones | 15 |
| 2.1 Definición..... | 15 |
| 2.2 Orden de los números reales..... | 15 |
| 2.3 Operaciones: Adición, Sustracción, Multiplicación y División..... | 20 |
| 2.4 Problemas de aplicación a su entorno..... | 26 |
| 2.5 Propiedad de la Adición, Sustracción, y la Multiplicación..... | 35 |
| 2.6 Propiedades de las potencias con respecto a la Multiplicación..... | 40 |
| 2.7 Propiedades de las potencias con respecto a la división..... | 41 |

II UNIDAD

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción al Álgebra | 60 |
| 1.1 Necesidad del surgimiento del Álgebra..... | 60 |
| 1.2 Variable numérica y constante numérica..... | 61 |
| 1.3 Traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico..... | 62 |
| 2. Expresiones algebraicas | 68 |
| 2.1 Término y sus elementos..... | 68 |
| 2.2 Polinomios..... | 72 |
| 3. Valor numérico de una expresión algebraica | 77 |
| 3.1 Problemas de aplicación a su entorno..... | 77 |
| 4. Operaciones con Polinomios | 82 |
| 4.1 Reducción de términos semejantes..... | 82 |
| 4.2 Supresión de signos de agrupación en expresiones algebraicas..... | 85 |
| 4.3 Operaciones con polinomios..... | 88 |

5. Productos Notables 98

| | |
|--|-----|
| 5.1 Cuadrado de la suma y diferencia de dos términos..... | 98 |
| 5.2 Suma por la diferencia de binomios..... | 101 |
| 5.3 Cubo de la suma y diferencia de dos términos..... | 103 |
| 5.4 Producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ y $(ax + b)(cx + d)$ | 104 |

6. Factorización 107

| | |
|---|-----|
| 6.1 Factor común monomio..... | 107 |
| 6.2 Factor común polinomio..... | 109 |
| 6.3 Diferencia de cuadrados..... | 110 |
| 6.4 Suma y diferencia de cubos..... | 115 |
| 6.5 Trinomio cuadrado perfecto..... | 112 |
| 6.6 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ ó $ax^2 + bx + c$ | 113 |
| 6.7 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ | 114 |

7. Operaciones con fracciones algebraicas 117

| | |
|--|-----|
| 7.1 Simplificación de fracciones algebraicas..... | 117 |
| 7.2 Suma y resta de fracciones algebraicas..... | 119 |
| 7.3 Producto (multiplicación) de fracciones algebraicas..... | 122 |
| 7.4 Cociente o división de fracciones algebraicas..... | 123 |

III UNIDAD

1. Igualdad 128

| | |
|-------------------------------------|-----|
| 1.1 Ecuación..... | 129 |
| 1.2 Propiedades de la igualdad..... | 130 |

2. Ecuación lineal 133

| | |
|--|-----|
| 2.1 Definición de Ecuación Lineal..... | 133 |
| 2.2 Clasificación..... | 134 |
| 2.3 Conjunto Solución..... | 136 |
| 2.4 Ecuaciones reducibles a la forma lineal..... | 141 |

3. Sistemas de dos Ecuaciones lineales con dos incógnitas 161

| | |
|--------------------------------|-----|
| 3.1 Método de Sustitución..... | 162 |
| 3.2 Método de Igualación..... | 164 |
| 3.3 Método de Reducción..... | 165 |

| | |
|--------------------------------|-----|
| 3.4 Método de Sustitución..... | 167 |
| 3.5 Método de Igualación..... | 169 |

IV UNIDAD

| | |
|---|------------|
| 1. Área y Perímetro de polígonos regulares | 188 |
| 1.1 Definición de polígonos..... | 188 |
| 1.2 Clasificación de los polígonos..... | 191 |
| 1.3 Diagonales. Suma de los ángulos internos y externos..... | 193 |
| 1.4 Perímetro y área de polígonos..... | 196 |
| | |
| 2. Círculo y circunferencia | 206 |
| 2.1 Círculo y circunferencia..... | 206 |
| 2.2 Posiciones relativas de un punto y una recta con respecto a una circunferencia..... | 208 |
| 2.3 Área de círculo y sectores circulares..... | 214 |
| 2.4 Ángulos notables en la circunferencia..... | 225 |

DESEMPEÑOS DE APRENDIZAJE

I. Plantea y resuelve problemas , utilizando las operaciones con los números reales y sus propiedades.

II. Interpreta y utiliza el lenguaje algebraico y realiza operaciones con polinomios aplicados en situaciones de la vida cotidiana.

III. Resuelve problemas de su entorno, utilizando las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 .

IV. Resuelve problemas de sus entornos rurales vinculados con área y perímetro de polígonos regulares así como círculo y circunferencia.

I UNIDAD

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES EN LA NATURALEZA

Desempeños de Aprendizaje

Plantea y resuelve problemas, utilizando las operaciones con números reales y sus propiedades

Ejes Transversales

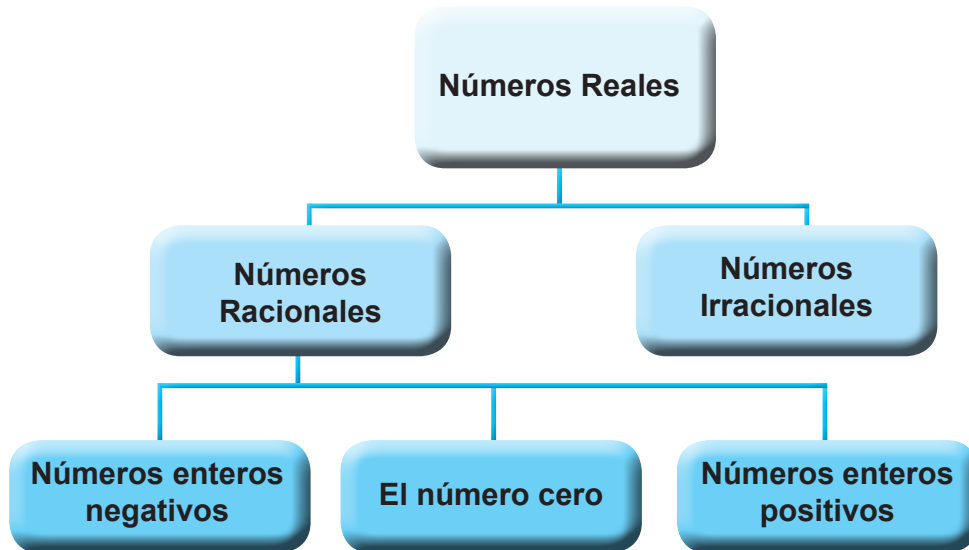
Practica y promueve acciones de sensibilización para la protección, conservación y preservación del medio ambiente y los recursos naturales, en el hogar, escuela y comunidad, a fin de alcanzar un comportamiento amigable con el medio ambiente.



1 Conjunto de los números reales

Indicador de Logro:

Represente el conjunto de los números irracionales en la recta numérica, a partir de situaciones de la vida cotidiana.



INTRODUCCIÓN:

La maestra después de observar a los niños tomar su vaso de leche, decidió medir la longitud de la circunferencia y el diámetro del borde del vaso. Las medidas que tomó son:

longitud de la circunferencia = 24,66 cm y diámetro = 7,85 cm.

Seguidamente encontró la razón entre las dos medidas y obtuvo:

$$\frac{24,66}{7,85} = 3,1414012\dots$$

¿Qué número nos recuerda el resultado?



1.1 Números irracionales

Observemos los resultados de los siguientes cocientes:

$$\bullet \quad 3 \div 1 = 1 = \frac{3}{1} = 3$$

$$\bullet \quad \frac{5}{8} = 0,625$$

$$\bullet \quad \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\bullet \quad \frac{2}{3} = 0,666$$

$$\bullet \quad \frac{6}{8} = 0,75$$

$$\bullet \quad \frac{5}{11} = 0,4545$$

Los cocientes los hemos escrito en la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y $b \neq 0$.

¿Cómo son los resultados obtenidos?

Sabemos que un decimal exacto es aquel que tiene un número finito de cifras diferentes de cero. Por ejemplo: 0,6; 0,75; 0,625. Un decimal periódico es aquel en que se repite indefinidamente un grupo de cifras decimales, llamado período. Por ejemplo, 0,666; 0,4545. Todos ellos resultan de dividir un entero entre otro entero.

Ahora encontremos con la calculadora $\sqrt{2}$ y busquemos el valor de π

Seguramente obtuvimos los resultados: $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

$$\pi = 3,141592654\dots$$

¿Cómo son los resultados obtenidos?

Estos números no son decimales exactos ni periódicos, como los anteriores, ya que algunos matemáticos han calculado muchas cifras y observado que no tienen período alguno. Por tanto no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, ya que no son números racionales. A estos números les llamamos números irracionales y los denotamos por \mathbb{Q}' .

1.2 Necesidad del surgimiento de los números irracionales.

¿Cuál es la importancia del desarrollo de la historia los números irracionales?

¿Cuáles son las necesidades de los números irracionales en la comunidad?

Desde el principio, el hombre ha producido en la tierra hierba verde que da semilla según su naturaleza, árboles que han dado fruto según su género. Y todo esto ha sido para el beneficio de la humanidad porque al producir la tierra se incrementa la producción y aumentan los ingresos en el hogar, en la comunidad, en el municipio, en el departamento y en el país.

Sabemos que, los primeros números que se utilizaron fueron los naturales, sin embargo, estos números no fueron suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por ello, se dio el surgimiento de otros números como los enteros, los racionales, los irracionales, entre otros.



Los números irracionales presentan una particularidad muy interesante. Son todos los números decimales interminables que no se repiten o no son periódicos y que no pueden expresarse en forma de cociente. Los números irracionales surgen por la necesidad de calcular áreas y volúmenes de diferentes cuerpos geométricos. A continuación se presentan algunos ejemplos:

- Calcular la diagonal de un mesa cuadrada de un metro de lado
- Encontrar el volumen de un barril para saber cuántos litros de gasolina
- Determinar el número de ladrillos que se necesita para hacer el brocal de un pozo.
- Calcular la cantidad de metros de alambre que se necesitan para cercar un terreno circular.
- Calcular los metros de plástico que se necesitan para forrar un invernadero.
- Calcular el plástico necesario para forrar un biodigestor.





ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Establezca comparaciones entre la pareja de números y escriba el símbolo $<$, $>$ $0 =$, para que la proposición sea verdadera.

1. $\frac{1}{11}$ ___ 0,090

7. -7 ___ 0,090

2. $\frac{2}{3}$ ___ 0,666

8. $\frac{\pi}{2}$ ___ 1,571

3. $\frac{22}{7}$ ___ π

9. $\sqrt{225}$ ___ 15

4. $\frac{1}{7}$ ___ 0,143

10. -3 ___ -5

5. $\frac{5}{6}$ ___ 0,833

11. $\frac{\pi}{4}$ ___ 0,785

6. $\sqrt{2}$ ___ 1,414

12. $\sqrt{289}$ ___ 17

II. Escriba en cada espacio en blanco ejemplos de la utilización de los números irracionales en:



Nuestra Comunidad



Nuestro Hogar



Nuestro Centro de Educación Secundaria a distancia en el campo

1.3 Definición de Número Irracional.

Número Irracional (\mathbb{Q}'):

Los números irracionales son los números cuya parte decimal es infinita no periódica, y también son aquellos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros. Los denotaremos por la letra \mathbb{Q}' (se lee \mathbb{Q} prima)

Por ejemplo, el número π (letra griega pi) lo utilizamos en algunas fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes. Recordemos que para calcular el perímetro de una circunferencia la fórmula que utilizamos es $C = \pi d$ ó $C = 2\pi r$.

El número π (pi) es la relación que existe entre la longitud de una circunferencia (C) y su diámetro (d), es decir:

$$\pi = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Longitud del diámetro}} = 3,1416$$

Este símbolo π es el más conocido de los números irracionales, y se utiliza en su mayoría en matemáticas, física e ingeniería.

Otro **número irracional** famoso, utilizado en cálculo, es el número de *Euler* $e \approx 2,718$, y de él también se han calculado infinidad de decimales sin llegar a encontrar una repetición periódica. Sus primeros decimales son 2,718281828459...

El número áureo o razón de oro, representado con la letra griega Φ que se lee "phi" también es muy utilizado por muchos artistas, en especial se lo conoce por las proporciones corporales usadas por Leonardo da Vinci, cuya aproximación es 1,618, es decir $\Phi = 1,618$.

Al conjunto de los números irracionales lo denotamos con la letra mayúscula \mathbb{Q}' que se lee " \mathbb{Q} prima".

Son números irracionales las raíces inexactas de radicales como:

$$\sqrt{2} \approx 1,414 (\approx \text{se lee "aproximadamente a."})$$

$$-\sqrt{3} \approx -1,732$$

$$\sqrt{8} \approx 2,828$$

$$\sqrt[3]{5} \approx 1,710$$

$$\sqrt[3]{12} \approx 1,426$$

Aplicaremos el número irracional π en ecuaciones propias de geometría y las utilizaremos para resolver problemas de aplicación del entorno.



EJEMPLO

Si el diámetro de una tortilla de maíz mide 15 cm, ¿cuál es la longitud de su circunferencia?

Solución:

La ecuación a usar es $L_c = \pi \cdot d$

Como el $d = 15$ cm, entonces sustituyendo en la ecuación: $L_c = \pi d$

$$L_c = 3,1416 \cdot 15 \text{ cm}$$

$$L_c = 47,124 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la longitud de la circunferencia de la tortilla es 47,124 cm.



EJEMPLO

Si un barril tiene 1,5 metros de altura y $\sqrt{2}$ metros de diámetro. Encontramos el volumen del barril para saber cuántos litros de miel podemos almacenar.

Solución:

La ecuación del volumen de un cilindro es $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Como $h = 1,5$ metros y el $d = \sqrt{2}$ entonces sustituyendo en la ecuación:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = 3,1416 \cdot (\sqrt{2} \text{ m})^2 \cdot 1,5 \text{ m}$$

$$V = 3,1416 \cdot 2 \cdot 1,5 \text{ m}^3$$

$$V = 9,425 \text{ m}^3$$



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Resuelva correctamente los siguientes problemas del entorno:

1. Un Señor necesita cercar un terreno circular con alambre de púa. Si el diámetro del terreno mide 800 metros, ¿cuál será la longitud de la circunferencia?.

2. El diámetro de la circunferencia de un disco de una máquina mide 23 cm. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia del disco?
3. ¿Cuál es la longitud que recorre la rueda de un carro al dar una vuelta completa, si se conoce que el diámetro mide 60 cm?
4. Calculemos la diagonal de una tapadera de un pozo de área cuadrada de un metro de longitud.
5. Determinemos la longitud del brocal de un pozo que tiene $\sqrt{3}$ metros de diámetro.
6. Calcular la cantidad de plástico que se requiere para forrar un biodigestor en forma de cilindro que tiene 8,5 metros de longitud y 2,27 metros de radio.
7. Si un tanque para almacenar agua tiene 3,5 metros de altura y $2\sqrt{3}$ metros de diámetro. Encontramos el volumen del tanque para saber cuántos metros cúbicos se pueden almacenar.
8. ¿Cuál es la longitud que recorre la rueda de una bicicleta después de recorrer tres vueltas completas, si se sabe que el diámetro mide 55 cm?
9. Utiliza una calculadora y encuentra $\sqrt{3}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{81}$. Encierra en un círculo los resultados que son números irracionales.

1.4 Números irracionales opuestos

Así como **todo número entero tiene su número entero opuesto**, **todo número racional tiene su número racional opuesto**, también podemos afirmar que **todo número real tiene su número real opuesto**.

En la recta numérica también podemos observar números reales opuestos o simétricos. A continuación observaremos ejemplos gráficos de pares de puntos opuestos o simétricos con respecto al origen (0).

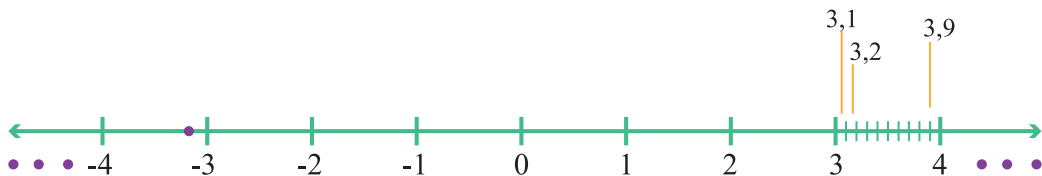
Todo número irracional “a” tiene su opuesto o simétrico “-a” y están asociados a sus puntos correspondientes a la misma distancia en la recta numérica con respecto al punto asociado al cero.



EJEMPLO

Si graficamos en la recta numérica el punto que corresponde a $\pi = 3,1416$; entonces observamos que el valor π queda asociado a un punto entre los números enteros 3 y 4. De igual manera, si graficamos el punto que corresponde a $-\pi = -3,1416$, podemos observar que el $-\pi$ queda asociado a un punto entre los números enteros -3 y -4.

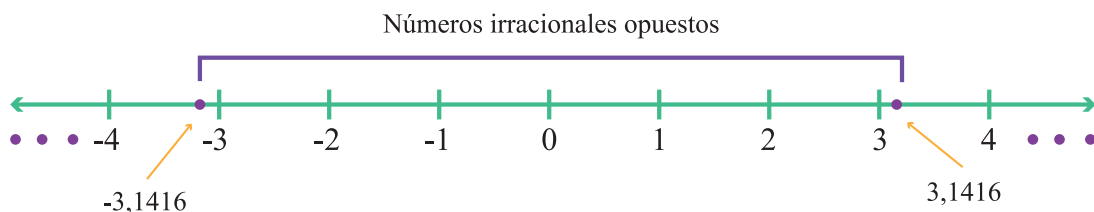
Ahora, si a cada unidad de la recta numérica la dividimos en 10 partes iguales para representar el valor π , podemos ubicar los números que se encuentran entre 3 y 4. Por ejemplo: 3,1; 3,2; ... 3,8; 3,9; entre otros. A continuación se presentan estos números en la recta numérica.



En la recta numérica podemos observar que el punto correspondiente al valor 3,1416 queda entre los números 3,1 y 3,2. Para saber exactamente donde queda ubicado el punto que se le asigna al valor 3,1416 debemos de seguir dividiendo en 100, 1 000 ... partes iguales el segmento de recta. ¿Cómo podemos resolver esta situación?

Redondeamos 3,1416 a la décima más cercana, que en este caso es 3,1 y ubicamos el punto en la recta un poco a la derecha de 3,1. ¿por qué? Porque 14 está más cerca de 10 que de 20.

Sabemos que el número irracional $\pi = 3,1416$ y el opuesto es $-\pi = -3,1416$. Los pares de puntos correspondientes a los números irracionales $-\pi$ y π son simétricos ya que poseen la misma distancia con respecto al punto asociado al cero. A continuación se representan en la recta numérica:



Así podemos expresar que:

El opuesto de $-\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}$ y el opuesto de $\sqrt{2}$ es $-\sqrt{2}$.

El opuesto de $-\sqrt{3}$ es $\sqrt{3}$ y el opuesto de $\sqrt{3}$ es $-\sqrt{3}$.

El opuesto de $-\sqrt[3]{5}$ es $\sqrt[3]{5}$ y el opuesto de $\sqrt[3]{5}$ es $-\sqrt[3]{5}$.

El opuesto de $-\sqrt[3]{7}$ es $\sqrt[3]{7}$ y el opuesto de $\sqrt[3]{7}$ es $-\sqrt[3]{7}$; y así sucesivamente podemos expresar los opuesto de los números.



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Escribamos en la línea en blanco el opuesto de los siguientes números:

1. El opuesto del número $-\sqrt[3]{7}$ _____
2. El opuesto del número $\sqrt{23}$ _____
3. El opuesto del número $-\frac{2}{7}$ _____
4. El opuesto del número $-0,203$ _____
5. El opuesto del número $5,254$ _____
6. El opuesto del número $2,718$ _____
7. El opuesto del número $1,618$ _____
8. El opuesto del número $-1,618$ _____

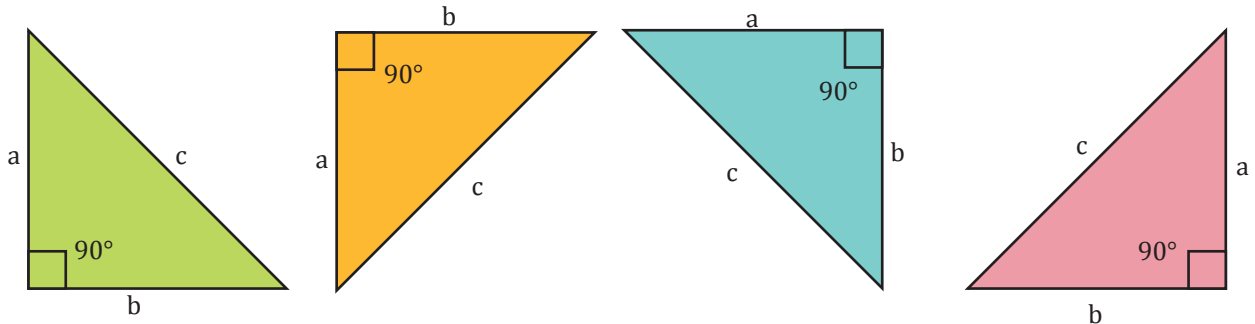
II. Graficamos en la recta numérica los puntos que corresponden a los siguientes números con sus opuestos:

1. $e \approx 1,718$
2. $\Phi \approx 1,618$
3. $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{5}$

1.5 Representación de los números irracionales en la recta numérica

Al igual que los números racionales, los números irracionales también se pueden ubicar de forma precisa en la recta numérica. Necesitamos utilizar una regla y un compás.

Debemos saber que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90 grados. Los lados que forman el ángulo de 90 grados se llaman catetos y el tercer lado y de mayor longitud se llama hipotenusa.

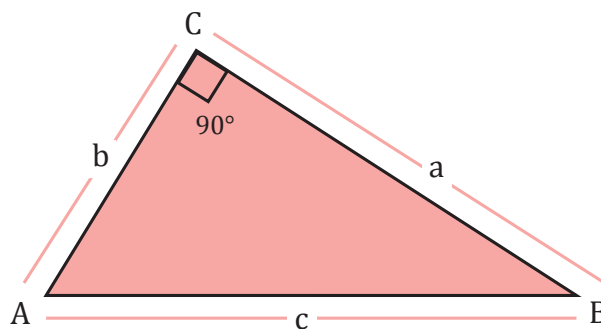


En esto se aplica un teorema especial.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Simbólicamente el teorema se expresa: $c^2 = a^2 + b^2$ donde: c es la hipotenusa, a y b son los catetos del triángulo rectángulo.



En la figura, los lados a y b son los catetos y c la hipotenusa. Veámos un ejemplo:

Supongamos que el lado a mide 5 cm y el lado b mide 4 cm y se quiere calcular la hipotenusa (el lado c). Entonces por el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$c^2 = 5^2 + 4^2$$

$$c^2 = 25 + 16$$

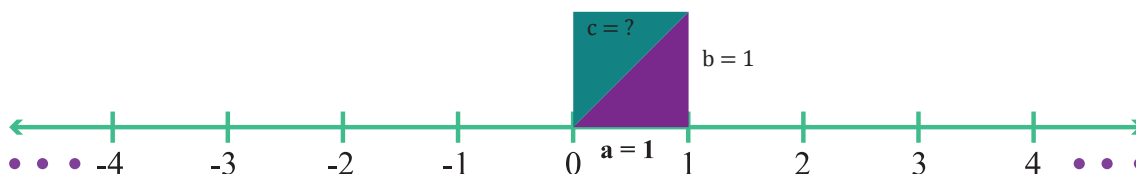
$$c^2 = 41$$

$$c = \sqrt{41}$$

$$c = 6,40$$

Para representar gráficamente en la recta numérica los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ seguiremos el siguiente procedimiento:

Primeramente trazaremos la recta numérica y ubicaremos el punto cero; a cada punto de la recta se le asocia un número real. Sobre la recta numérica trazaremos un cuadrado de lado uno, y una diagonal al cuadrado partiendo desde el punto cero al vértice opuesto.



Al trazar una diagonal, el cuadrado queda dividido en dos triángulos rectángulos isósceles (2 lados iguales), en el que conocemos el valor de sus lados, porque la distancia es igual a 1 y se desconoce el valor de la hipotenusa (diagonal).

Como el cuadrado quedó dividido en dos triángulos rectángulos, entonces podemos encontrar el valor de la hipotenusa c , mediante el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

Como el teorema de Pitágoras es:

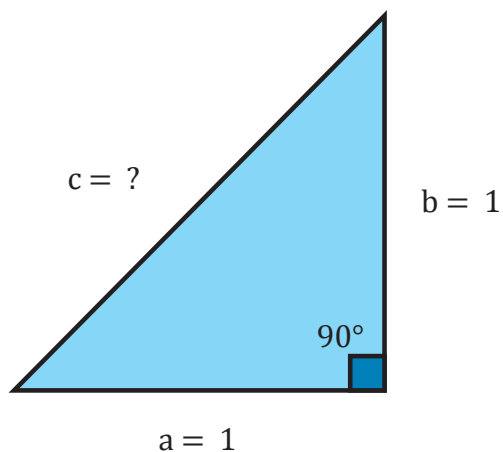
$c^2 = a^2 + b^2$, entonces, sustituyendo a y b , obtenemos:

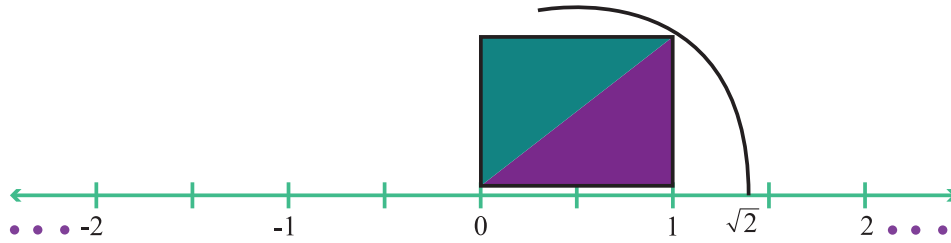
$$c^2 = 1^2 + 1^2 \text{ De donde}$$

$$c^2 = 1 + 1 \text{ Resolviendo los cuadrados}$$

$$c^2 = 2 \text{ Resolviendo la suma}$$

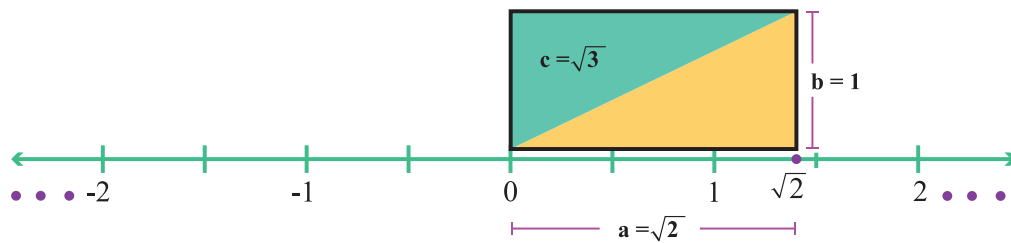
$$c = \sqrt{2}$$





Con un compás hacemos el centro en el punto de referencia cero y trazamos un arco de circunferencia con una abertura igual a la longitud de la diagonal del cuadrado, lo hacemos por la recta numérica y marcamos el punto $\sqrt{2}$.

Ahora que tenemos localizado el punto $\sqrt{2}$, lo tomamos como base para construir un rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura igual a 1. Luego trazamos una diagonal al rectángulo para construir dos triángulos rectángulos.



Al triángulo rectángulo sombreado, le calcularemos el valor de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras.

$$c = \sqrt{3}$$

Es el valor de la hipotenusa

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2}$$

Sustituyendo los catetos a y b

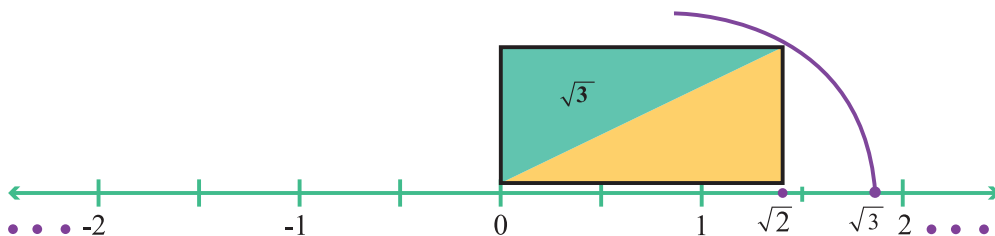
$$c = \sqrt{2 + 1}$$

Resolviendo los cuadrados

$$c = \sqrt{3}$$

Suma de las cantidades

Volviendo a la recta numérica y de nuevo con un compás hacemos el centro en el punto cero y trazamos un arco de circunferencia que tenga por radio la diagonal del rectángulo, hacemos pasar por la recta numérica y se marca el punto $\sqrt{3}$.



Siguiendo este mismo procedimiento, se logra ubicar en la recta numérica diferentes puntos correspondientes a números irracionales.



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Trazaremos sobre la recta numérica un cuadrado de lado uno, y una diagonal al cuadrado partiendo desde el punto cero al vértice opuesto. Seguidamente representemos gráficamente los siguientes números reales:

- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{7}$
- $\sqrt{13}$
- $-\sqrt{3}$
- $-\sqrt{5}$

II. Asigne el valor verdadero (v) o falso (F) a las siguientes afirmaciones:

1. Todo número real es natural. ____
2. Algunos números reales son irracionales. ____
3. Todo número irracional es real. ____
4. Los números irracionales son decimales infinitos. ____
5. Todos los números reales son infinitos. ____

2 Operaciones con números reales y sus aplicaciones

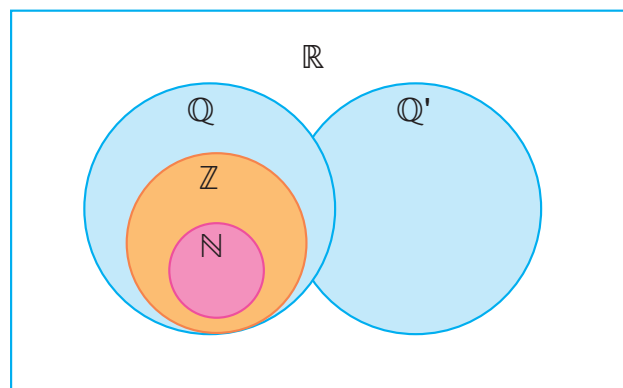
Indicador de Logro:

Resuelve problemas aplicando las operaciones con números reales propios de su realidad.

2.1 Definición

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales y los números irracionales.

Como el conjunto de los números racionales lo denotamos con la letra \mathbb{Q} y el conjunto de los números irracionales con \mathbb{Q}' ; entonces podemos escribir que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, o sea que "la unión de \mathbb{Q} y \mathbb{Q}' es igual a \mathbb{R} ". A continuación lo ilustraremos la relación de los conjuntos en un diagrama de Venn Euler.



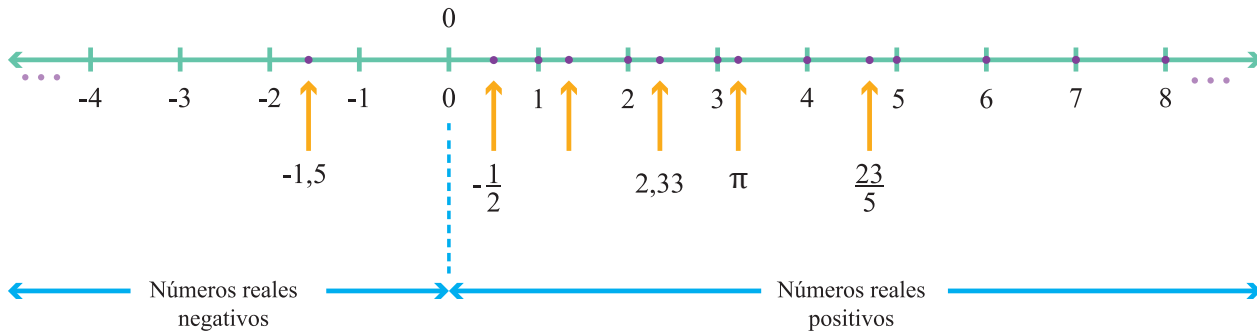
2.2 Orden en los números reales

a. Representación gráfica

Es posible establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta (recta numérica) de la siguiente manera.

Dada una recta, se selecciona un punto arbitrario de ésta para representar el cero (0) y otro punto a la derecha del cero para representar el uno (1). Luego dividimos toda la recta en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento de cero a uno, para así representar los números enteros, los números 1, 2, 3, 4, ... (en este orden) a la derecha del cero y los números - 1, - 2, - 3, ... (en este orden) a la izquierda del cero.

Los restantes números reales se representan en esta recta, usando su expansión decimal tal como se muestra en el ejemplo que sigue.



En la figura observamos que los números que corresponden a puntos a la derecha de 0, son los números reales positivos. Los que corresponden a puntos a la izquierda de 0, son los números reales negativos. El número real 0 no es positivo, ni negativo.



EJEMPLO

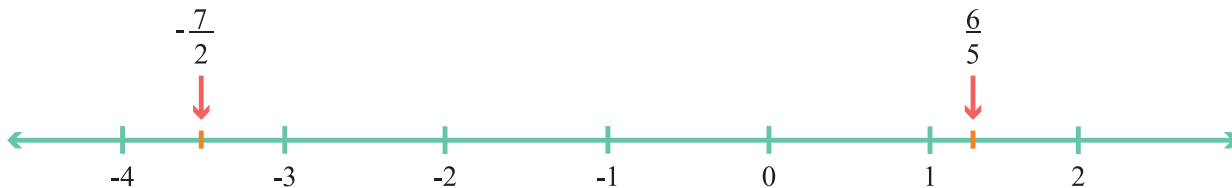
Represente en la recta numérica los números $\frac{6}{5}$ y $-\frac{7}{2}$

Solución:

$$\frac{6}{5} \text{ y } -\frac{7}{2} = 1,2$$

$$-\frac{7}{2} = -3,5$$

Usando estos resultados, podemos representar en la recta numérica $\frac{6}{5}$ y $-\frac{7}{2}$ de la siguiente manera.



Definición

En una recta numérica el punto que representa el cero recibe el nombre de origen.

Definición

1. Los números reales que se representan a la derecha del origen se llaman números reales positivos.
2. Los números reales que se representan a la izquierda del origen se llaman números reales negativos.

b. La relación “menor que” en el conjunto de los números reales.

En el conjunto de los números reales se define una relación, llamada “menor que”, de la siguiente manera.

Definición

Sean $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. **Se dice que** a **es menor que** b , **y se escribe** $a < b$, **si** $a - b$ **es un número negativo.**

**EJEMPLO**

- a. $2 < 3$ porque $2 - 3 = -1$ y -1 es negativo
- b. $-3 < 1$ porque $-3 - 1 = -4$ y -4 es negativo
- c. $-\frac{2}{7} < -\frac{1}{5}$ porque $-\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{3}{35}$ y $-\frac{3}{35}$ es negativo
- d. $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ porque $\sqrt{3} - \sqrt{5} = 1,7320 - 2,2360 = -0,5039\dots$ y $-0,5039\dots$ es negativo

De la definición de la relación “menor que” se tiene que todo número negativo es menor que cero.

c. La relación “mayor que” en el conjunto de los números reales.**Definición**

Sean $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. **Se dice que** a **es mayor que** b , **y se escribe** $a > b$, **si** $a - b$ **es un número positivo.**

**EJEMPLO**

- a. $5 > 2$ porque $5 - 2 = 3$ y 3 es positivo.
- b. $3 > -1$ porque $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$ y 4 es positivo
- c. $-\frac{1}{5} > -\frac{2}{7}$ porque $-\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{35}$ y $\frac{3}{35}$ es positivo.
- d. $\pi > \sqrt{5}$ porque $\pi - \sqrt{5} = 3,1416 - 2,2360 = 0,9055$ y $0,9055$

De la definición de la relación “mayor que” se tiene que todo número positivo es mayor que cero.



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Completemos la siguiente tabla, colocando una equis en las columnas correspondientes a los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número.

| Número | Natural | Entero | Racional | Irracional | Real |
|------------------------|---------|--------|----------|------------|------|
| 2,2541 | | | | | |
| -1,121314 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| -10 000 | | | | | |
| $1 + \sqrt{5}$ | | | | | |
| $\sqrt[3]{27}$ | | | | | |
| $\frac{4}{5}$ | | | | | |
| $-\frac{4}{2}$ | | | | | |
| 0 | | | | | |
| 1,45678... | | | | | |
| $4 + 5$ | | | | | |
| $\sqrt{7} - \sqrt{17}$ | | | | | |
| $1 - \frac{3}{7}$ | | | | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | | | | |
| $\sqrt[3]{23}$ | | | | | |
| -0,00254 | | | | | |
| 1,50 | | | | | |

II. Leamos, analicemos y asignemos valor verdadero (V) o falso (F) a las siguientes aseveraciones.

1. $-2 \in \mathbb{N}$ ____
2. $\sqrt{16} \in \mathbb{Z}$ ____
3. $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ ____
4. $\frac{5}{21} \in \mathbb{Q}$ ____
5. $\sqrt{29} \in \mathbb{R}$ ____
6. $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ ____
7. $-\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$ ____
8. $7,280 \in \mathbb{R}$ ____
9. $6,556 \in \mathbb{R}$ ____
10. $0,286 \in \mathbb{R}$ ____

III. Establezcamos comparación entre los siguientes números y ubiquemos en la recta numérica.

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. 5 y 6,50 | 6. $-\frac{5}{7}$ y $-\sqrt{2}$ |
| 2. -1,25 y -1,15 | 7. $\frac{12}{13}$ y $\frac{11}{15}$ |
| 3. -0,56 y 0,28 | 8. $\sqrt{7}$ y 2π |
| 4. $-\frac{7}{3}$ y $\frac{4}{7}$ | 9. 2 y 0,5 |
| 5. $\frac{2}{9}$ y $\frac{3}{7}$ | 10. π y e |

2.3 Operaciones con números reales

Adición de números reales

En el conjunto de los números reales está definida la operación, adición de números reales, en donde al sumar dos o más números reales, el resultado es un número real.



EJEMPLO

1. Resolver la suma de los números reales: 2,04721; 5,9826 y 0,2537

Resolviendo la suma de forma vertical:

$$\begin{array}{r} 2,04721 \\ + 5,9826 \\ \underline{0,2537} \\ 8,28351 \end{array}$$

Resultado:

$$2,047 + 5,983 + 0,254 = 8,28351$$



EJEMPLO

2. Resolver la suma $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

Consideremos que $\sqrt{2} \approx 1,414$ y que $\frac{1}{2}$ es 0,5

$$\begin{array}{r} 1,414 \\ + 0,5 \\ \hline 1,914 \end{array}$$

**EJEMPLO**

3. Resolver correctamente la suma de los números reales $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + 3\sqrt{2} &= (1 + 3)\sqrt{2} && \text{Aplicando el factor común } \sqrt{2}. \\ &= 4\sqrt{2} && \text{Efectuando la suma de 1 y 3} \\ &= 4(1,4142) && \text{Sustituyendo el valor aproximado de } \sqrt{2} \\ &= 5,656854... && \text{Resolviendo el producto} \\ &= 5,66 && \text{Redondeando a dos cifras decimales} \end{aligned}$$

**EJEMPLO**

4. Resolver correctamente la suma de los números reales $\frac{1}{7}$ y $\frac{2}{7}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} + \frac{2}{7} &= \frac{1+2}{7} && \text{Efectuando la suma} \\ &= \frac{3}{7} && \text{Resolviendo el cociente} \\ &= 0,42857142... && \text{Redondeando a dos cifras decimales} \\ &= 0,43 && \text{Respuesta} \end{aligned}$$

Sustracción de números reales**Definición**

Dados dos números reales a y b , es decir $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, llamaremos sustracción de a y b , a la suma del minuendo con el inverso del sustraendo. La denotaremos: $a - b = a + (-b)$



EJEMPLO

1. Resolver correctamente la sustracción de los números reales 5 y 3.

$$\begin{aligned} 5 - 3 &= 5 + (-3) && \text{Aplicando la definición de sustracción} \\ &= 2 && \text{Sumando cantidades con signos diferentes} \end{aligned}$$



EJEMPLO

2. Resolver correctamente la sustracción de los números reales $\frac{5}{4}$ y $\frac{1}{7}$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} - \frac{1}{7} &= \frac{5+(-1)}{7} && \text{Aplicando la definición de diferencia} \\ &= \frac{4}{7} && \text{Respuesta} \\ &= 0,571428 && \text{Efectuando el cociente} \end{aligned}$$



EJEMPLO

3. Resolver correctamente la sustracción de los números reales $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{7}$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} - \frac{3}{7} &= \frac{5 \cdot 7 - 3 \cdot 8}{56} && \text{Aplicando la definición de diferencia} \\ &= \frac{35 - 24}{56} && \text{Resolviendo los productos} \\ &= \frac{11}{56} && \text{Respuesta} \\ &= 0,19642857... && \text{Redondeando a dos cifras decimales} \\ &= 0,20 && \text{Efectuando el cociente} \end{aligned}$$



EJEMPLO

4. Resolver correctamente la sustracción de los números reales $5\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} &= (5 - 2)\sqrt{3} && \text{Aplicando factor común} \\ &= 3\sqrt{3} && \text{Resolviendo la diferencia} \end{aligned}$$

Multiplicación de números reales

Definición

Dados dos números reales a y b , es decir $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, el producto $a \cdot b$ es el número c tal que $c = a \cdot b$

Para los números reales se cumplen las mismas leyes de los signos que para los números enteros y racionales, es decir:

1

La multiplicación de dos números reales positivos es siempre otro número real positivo.

2

La multiplicación de un número real positivo y un real negativo es siempre otro número real negativo.

3

La multiplicación de dos números reales de signos negativos es siempre otro número real positivo.



EJEMPLO

1. Resolver correctamente la multiplicación de los números reales -5 y $\frac{3}{7}$.

$$-5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{-5 \cdot 3}{7}$$

Multiplicamos numeradores entre sí

$$= \frac{-15}{7}$$

Resolvemos el producto

$$= -2,143$$

Efectuamos la división



EJEMPLO

2. Resolver correctamente la multiplicación de los números reales $-\frac{5}{8}$ y $-\frac{9}{7}$.

$$-\frac{5}{8} \cdot -\frac{9}{7} = \frac{-5 \cdot -9}{8 \cdot 7}$$

Multiplicamos numeradores entre sí

$$= \frac{45}{56}$$

Resolvemos el producto

$$= 0,804$$

Efectuamos la división



EJEMPLO

3. Resolver correctamente la multiplicación de los números reales $5\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} &= (5 \cdot 2) \sqrt{3} && \text{Aplicando el factor común } \sqrt{3} \\
 &= 10 \sqrt{3} && \text{Resolviendo el producto de 5 y 2.} \\
 &= 10 (1,73205080\dots) && \text{Sustituyendo el valor de la } \sqrt{3} \\
 &= 17,32050807\dots \approx 17,32 && \text{Resolviendo el producto}
 \end{aligned}$$

División de números reales

Definición

Dados dos números reales a y b , es decir $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, el cociente $a \div b$ es el número real c tal que el producto $c \cdot b = a$.

Recordemos que si $\frac{a}{b}$ representa un número real entonces b tiene que ser diferente de cero, pues la división por cero no está definida matemáticamente.

Igualmente, para los números reales se cumplen las mismas leyes de los signos que para los números enteros y racionales, es decir:

1 El cociente de dos números reales de igual signo es positivo.

2 El cociente de dos números reales de diferente signo es negativo.



EJEMPLO

1. Resolver correctamente el cociente de los números reales -6 y $\frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned}
 -6 \div \frac{3}{5} &= -6 \cdot \frac{5}{3} && \text{Aplicando la definición del cociente} \\
 &= \frac{-6 \cdot 5}{3} && \text{Resolviendo el producto} \\
 &= \frac{-30}{3} && \text{Efectuando el cociente} \\
 &= -10 && \text{Respuesta}
 \end{aligned}$$



EJEMPLO

2. Resolver correctamente el cociente de los números reales $-\frac{5}{8}$ y $-\frac{9}{7}$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{5}{8} \div \left(-\frac{2}{7}\right) &= -\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) && \text{Aplicando definición del cociente} \\
 &= \frac{-5 \cdot -7}{8 \cdot 2} && \text{Efectuando el producto} \\
 &= \frac{35}{16} && \text{Resolvemos el cociente} \\
 &= 0,804 && \text{Respuesta}
 \end{aligned}$$



EJEMPLO

3. Resolver correctamente el cociente de los números reales $5\sqrt{6}$ y $2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 5\sqrt{6} \div 2\sqrt{3} &= (5 \div 2) (\sqrt{6} \div \sqrt{3}) && \text{Planteando el cociente} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} && \text{Aplicando cociente de radicales} \\
 &= \frac{5}{2} \sqrt{\frac{6}{3}} && \text{Efectuando el cociente} \\
 &= \frac{5}{2} \sqrt{2} && \text{Sustituyendo el valor de } \sqrt{2} \\
 &= (2,5)(1,4142) && \text{Resolviendo el producto} \\
 &= 3,5355 && \text{Redondeando a dos cifras decimales} \\
 &= 3,53 && \text{Respuesta}
 \end{aligned}$$



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Resolvamos correctamente las siguientes operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

1. $16 - (-5) =$

2. $-8 + (-0,025) =$

3. $0,153 - 2,137 =$

4. $-\frac{5}{2} + e =$

5. $e - (-0,3) =$

6. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$

7. $\pi - \sqrt{3} =$

8. $\frac{7}{8}\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} =$

9. $6\sqrt{5} \div 4\sqrt{5} =$

10. $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} =$

11. $\frac{5}{8} - \frac{3}{7} =$

12. $-\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} =$

13. $-\frac{4}{9} \div \frac{7}{2} =$

14. $-\frac{5}{9} \cdot -\frac{11}{7} =$

15. $-\frac{2}{13} \div -\frac{6}{15} =$

16. $-8 \cdot (-0,025) =$

17. $0,153 \cdot 2,137 =$

18. $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} =$

19. $\frac{5}{8} \div \frac{3}{7} =$

20. $-0,153 - \pi =$

2.4 Problemas de aplicación a su entorno



EJEMPLO

1. Un productor ha sembrado $\frac{1}{5}$ partes de un terreno de lechuga y $\frac{5}{7}$ de repollos. Si el terreno tiene $7\,000\text{ m}^2$, ¿qué área total se sembró del terreno y qué área quedó sin sembrar?

Solución: El área sembrada es $\frac{1}{5} + \frac{5}{7} = \frac{7+25}{35}$
 $= \frac{32}{35}$
 $= 0,9143$



Resolviendo el producto: $7\,000 \cdot 0,9143 = 6\,400,1$

Podemos concluir que el área sembrada es $6\,400\text{ m}^2$.

Considerando que la unidad corresponde a la superficie total del campo sembrado, la parte que no se sembró será:

$$1 - 0,9143 = 0,0857 \quad \text{Lo que equivale a:}$$

$$0,0857 \cdot 7\,500 = 599,99 \approx 600$$

El área que quedó sin sembrar es 600 m^2 .



EJEMPLO

2. Un grupo de 45 estudiantes tienen que participar en una feria para ofertar las hortalizas que han producido. $\frac{1}{9}$ de los estudiantes vendieron lechugas; $\frac{2}{5}$ vendieron tomates, $\frac{1}{3}$ pepinos y el resto otras hortalizas. ¿Cuántos estudiantes ofertaron otras hortalizas?

Solución

Este problema lo podemos resolver de dos maneras:

a) Hallamos el número de miembros que equivale los $\frac{1}{9}$ de 45, que son los estudiantes que vendieron lechugas.

$$\frac{1}{9} \cdot 45 = \frac{1 \cdot 45}{9} = \frac{45}{9} = 5 \quad \text{Estudiantes ofertaron lechugas}$$

También encontramos los $\frac{1}{5}$ de 45, que son los estudiantes que vendieron tomates

$$\frac{2}{5} \cdot 45 = \frac{2 \cdot 45}{5} = \frac{90}{5} = 18 \quad \text{Estudiantes ofertaron tomates}$$

Igualmente encontramos los $\frac{1}{3}$ de 45, que son los estudiantes que vendieron pepinos

$$\frac{1}{3} \cdot 45 = \frac{1 \cdot 45}{3} = \frac{45}{3} = 15 \quad \text{Estudiantes ofertaron pepinos}$$

Los miembros que ofertaron otras hortalizas serán:

$$45 - (5+18+15) = 45 - 38 = 7 \quad \text{Estudiantes ofertaron otras hortalizas}$$

b) También podemos aplicar la suma de $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$, para ello buscamos el MCM.

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{5 + 18 + 15}{45} = \frac{38}{45}, \text{ luego encontramos la diferencia de la unidad}$$

$$1 - \frac{38}{45} = \frac{45 - 38}{45} = \frac{7}{45} \text{ y ahora encontramos } \frac{7}{45} \cdot 45 = 7$$

Conclusión: De los 45 estudiantes solamente 7 vendieron otras hortalizas.



EJEMPLO

3. El 40% de los ingresos de una cooperativa agrícola se emplea en combustible, el 15% se emplea en electricidad, el 8% en la recolección de basura, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento y el resto se emplea en limpieza. ¿Qué cantidad de los ingresos se emplea en limpieza?

Solución:

Primeramente encontraremos la equivalencia de:

a. $40\% = \frac{40}{100} = 0,40$

b. $15\% = \frac{15}{100} = 0,15$

c. $8\% = \frac{8}{100} = 0,08$

d. $\frac{1}{4} = 0,25$



Lo que se gasta en combustible, electricidad, basura y mantenimiento es:

$$0,40 + 0,15 + 0,08 + 0,25 = 0,88$$

Lo que se emplea en limpieza será $1 - 0,88 = 0,12$ de los ingresos

El 12% es lo que se emplea en limpieza

**EJEMPLO**

4. Un grupo de mujeres realizan labores de campo en tres momentos. Primero realizan 35% del trabajo, en el segundo momento 25% del trabajo. ¿Qué cantidad del trabajo realizaron en el tercer momento? Si trabajaron en 10 manzanas de terreno recogiendo la cosecha de frijoles, cuánto trabajo hicieron en cada momento?

Solución:

Primeramente, expresaremos la equivalencia de:

$$a. 35\% = \frac{35}{100} = 0,35$$

$$b. 25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

En el tercer momento los estudiantes realizan

$$1 - (0,35 + 0,25) = 1 - 0,60 = 0,40$$

En el primer momento trabajan 35% de las 10 manzanas, lo que equivale a

$$0,35 \text{ de } 10 = 0,35 \cdot 10 = 3,5 \text{ manzanas}$$

En el segundo momento trabajan 25% de las 10 manzanas, lo que equivale a

$$0,25 \text{ de } 10 = 0,25 \cdot 10 = 2,5 \text{ manzanas}$$

En el tercer momento trabajan 0,40 de las 10 manzanas, lo que equivale a

$$0,40 \text{ de } 10 = 0,40 \cdot 10 = 4 \text{ manzanas}$$

**EJEMPLO**

5. Un productor de frijoles ha manejado un tractor durante 30 minutos, esto corresponde a $\frac{2}{7}$ del tiempo que tiene que cumplir en el día. ¿Cuánto tiempo empleará para finalizar la preparación de la tierra, si continuó trabajando a la misma velocidad?

Primeramente encontraremos la equivalencia de $\frac{2}{7}$ del tiempo:

$$\frac{2}{7} = 0,286$$

Fracción de tiempo que ha trabajado.

$$1 - 0,286 = 0,714$$

Fracción de tiempo que le falta para cumplir en el día

Aplicando la regla de tres simple, obtenemos:

| Cumplimiento | Tiempo |
|--------------|------------|
| 0,286 | 30 minutos |
| 0,714 | x |

$$\frac{0,286}{7} = \frac{0,714}{x}$$

Estableciendo las proporciones

$$0,286 \cdot x = 30 \cdot 0,714$$

Aplicando la propiedad fundamental de proporciones

$$x = \frac{30 \cdot 0,714}{0,286}$$

Transponiendo términos

$$x = \frac{21,42}{0,286}$$

Resolviendo el producto

$$x = 74,89$$

Efectuando el cociente

$$x = 75 \text{ minutos}$$

Redondeando

$$x = 1 \text{ hora}, 15 \text{ minutos}$$

Es el tiempo que le falta manejar el tractor para finalizar la preparación de la tierra



EJEMPLO

6. En una hacienda de bananos hay 450 cabezas de bananos, se cortaron $\frac{2}{9}$ partes, pero estaban tiernos y se perdieron. Días después, en el momento adecuado se cortaron $\frac{7}{9}$ restantes de los bananos. ¿Cuántos cabezas de bananos se cortaron a tiempo?



a. $\frac{2}{9} \cdot 450 = 100$

Cabezas de banano que se cortaron y se perdieron.

b. $\frac{7}{9} \cdot 450 = 350$

Cabezas de banano que se cortaron a tiempo.

c. $100 + 350 = 450$

Comprobando el resultado

Por lo tanto, se cortaron 350 cabezas de bananos a tiempo.



EJEMPLO

7. Un depósito de leche contiene 40 litros y ésta equivale a dos quintas partes. ¿Qué capacidad tiene el depósito? Primero, presentaremos en una tabla la información:

| Litros de leche | Partes |
|-----------------|---------------|
| 40 | $\frac{2}{5}$ |
| x | 1 |

$$\frac{40}{x} = \frac{\frac{2}{5}}{1}$$

Estableciendo las proporciones

$$\frac{2}{5} \cdot x = 1 \cdot 40$$

Aplicando el principio fundamental de proporciones

$$\frac{2}{5} x = 40$$

Resolviendo el producto

$$x = 40 \div \frac{2}{5}$$

Planteando el cociente

$$x = 40 \cdot \frac{5}{2}$$

Efectuando el producto

$$x = 100$$

Respuesta

Por lo tanto, la capacidad del depósito de leche es 100 litros.



EJEMPLO

8. Un grupo de 15 estudiantes se disponen para realizar una gira de campo y han comprado 4 libras de pollo a 30 córdobas la libra, 2 libras de lomo de cerdo por 130 córdobas, hortalizas por 80 córdobas y refrescos por 235 córdobas. ¿Cuánto dinero tiene que aportar cada estudiante?

Primero, plantearemos el costo de las compras que se realizaron

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| a. $4 \cdot 30 = 120$ córdobas | Cuatro libras de pollo |
| b. 130 córdobas | Dos libras de cerdo |
| c. 80 córdobas | Hortalizas |
| d. 235 córdobas | Refrescos |

Seguidamente, sumaremos las diferentes cantidades que resultaron de la compra:

$$\begin{array}{r} 120 \\ + 130 \\ 80 \\ \hline 235 \\ \hline 565 \end{array}$$

El total de dinero que se gastó es 565 córdobas. Resolviendo $565 \div 15 = 37,67$

Por lo tanto el dinero que aportar cada estudiante son 37,67 córdobas. Redondeando esta cantidad, 37,70 córdobas.



EJEMPLO

9. Una joven desea leer un libro que tiene 66 temas y 1 157 páginas. Si la joven ha programado leer 5 páginas diarias, ¿cuántos días necesito para leer todo el libro?

Presentamos la situación en la siguiente tabla:

| Número de páginas | Número de días |
|-------------------|----------------|
| 5 | 1 |
| 1 157 | X |

$$\frac{5}{1} = \frac{1157}{x}$$

Estableciendo la proporción

$$5 \cdot x = 1 \cdot 1157$$

Propiedad fundamental de las proporciones

$$x = \frac{1 \cdot 1157}{5}$$

Resolviendo el producto

$$x = \frac{1157}{5}$$

Efectuando la división

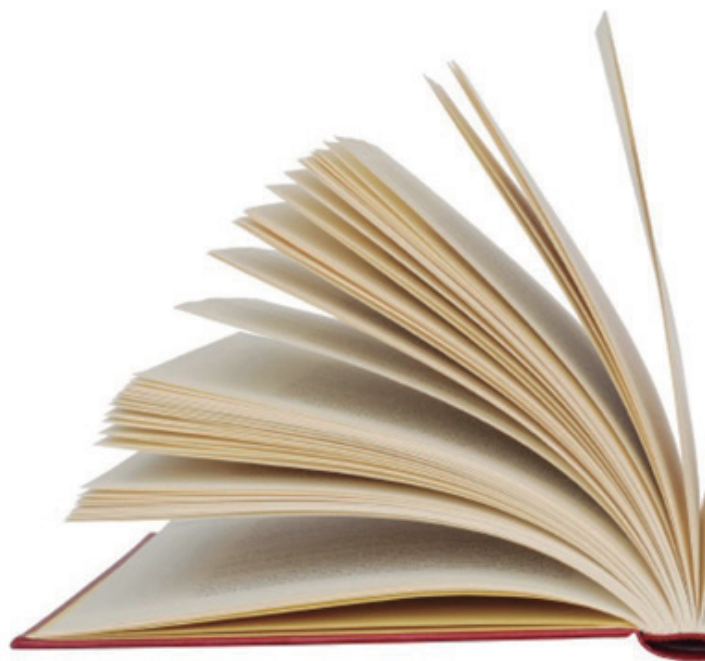
$$x = 231,4 \text{ días}$$

Redondeando

$$x = 231 \text{ días}$$

Respuesta

¿Cuántos días necesitará si decide leer 8 páginas diario? ¿Y cuántos días necesitará si decide leer 12 páginas diario? Respondamos estas preguntas en nuestro cuaderno de trabajo.





EJEMPLO

10. El mes pasado, Paola tenía en su alcancía 250,50 córdobas. Ayer tenía el doble, pero sacó 325 para comprar una blusa. ¿Cuánto dinero hay en su alcancía si hoy guardó 75,50 córdobas.



$$2(250,50) = 501 \text{ córdobas}$$

Dinero disponible hasta el día de ayer

$$501 - 325 = 176 \text{ córdobas}$$

Dinero después de la compra

$$176 + 75,50 = 251,50$$

Dinero que hay en la alcancía

Por lo tanto, el dinero que hay después de haber guardado 75,50 es 251,50 córdobas.



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Resolvamos correctamente los siguientes problemas de aplicación del conjunto de los números reales.

1. Un productor ha preparado un terreno para sembrar maíz y frijoles. Sembró solamente $\frac{2}{7}$ partes de frijoles y $\frac{3}{5}$ de maíz. Si el terreno tiene 5 000 m², ¿qué área sembró y qué área quedó sin sembrar?

2. Un grupo de 50 estudiantes tienen que participar en la feria territorial de su Departamento para ofertar las hortalizas que han producido. $\frac{2}{9}$ de los estudiantes vendieron lechugas; $\frac{4}{7}$ vendieron tomates, $\frac{1}{6}$ pepinos y el resto otras hortalizas. ¿Cuántos estudiantes ofertaron otras hortalizas?

3. El 30% de los ingresos de una cooperativa se emplea en combustible, el 20% se emplea en electricidad, el 10% en la recolección de basura, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento y el resto se emplea en limpieza. ¿Qué cantidad de los ingresos se emplea en limpieza?

4. Un grupo de mujeres realizan labores de campo en tres momentos. Primero realizan 42% del trabajo, en el segundo momento 32% del trabajo. ¿Qué cantidad del trabajo realizaron en el tercer momento? Si trabajaron en 9 manzanas de terreno recogiendo la cosecha de café, cuánto trabajo hicieron en cada momento?

5. Un camión ganadero lleva circulando 26 minutos, en los cuales ha recorrido $\frac{2}{3}$ de su trayecto. ¿Cuánto tiempo empleará en recorrer todo el trayecto, yendo siempre a la misma velocidad?
6. En un pinar hay 210 pinos y se talaron $\frac{1}{5}$ partes, poco después hubo un incendio, en el que se quemaron los $\frac{5}{7}$ de los pinos que quedaban. ¿Cuántos pinos sobrevivieron?
7. Un depósito de suero de leche contiene 320 litros y está equivale a dos terceras partes de su capacidad. ¿Cuántos litros de capacidad tiene el depósito?
8. Angelita tenía en su agenda 34 números de teléfono y al llegar al colegio alcanzó el triple. En el verano apuntó 12 más y borró 18, ¿cuántos teléfonos hay ahora en la agenda de Angelita?
9. Marta tenía una colección de 59 minerales, pero ha cambiado 14 de ellos por otros tres más difíciles de conseguir. Si guarda los que tiene ahora en cajas de 6 unidades, ¿cuántas cajas utiliza?
10. Hace un mes, Antonio tenía en su alcancía 350 córdobas. Ayer tenía el doble, pero sacó 125 para comprar un libro. ¿Cuánto dinero hay en su alcancía si hoy metió 75 córdobas?
11. En un barril había 16 litros de aceite y se han sacado 7 litros. Si el precio de un litro de aceite es de 40 córdobas. ¿Cuánto cuesta el aceite que queda en el barril?
12. Una persona compra 35 cartucheras a 25 córdobas cada una y 35 cuadernos a 15 córdobas cada uno. Paga con cuatro billetes de 500 pesos. ¿Cuánto le devolvieron?
13. Subo a partir del segundo escalón número 2. Subí cinco escalones y luego bajé tres escalones. A continuación subí ocho escalones y al final baje dos más. ¿En qué escalón me encuentro?
14. Cuatro familias salen de excursión y han comprado 2 libras de chuletas a 65 córdobas la libra. También compraron embutidos por 268 córdobas y bebidas por 736 córdobas. ¿Cuánto dinero tiene que pagar cada familia, si los gastos deben ser equitativos?
15. Quiero leer 5 libros. Cada libro tiene 55 páginas. Si leo cada día 11 páginas, ¿cuántos días necesito para leer los libros?

2.5 Propiedades de las operaciones con números reales

a) Propiedades de la adición y la sustracción

| Propiedades | Caso general | Ejemplo |
|--|---------------------|---|
| 1. Propiedad conmutativa: No importa el orden al sumar dos números | $a+b = b+a$ | $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ |
| 2. Propiedad asociativa: No importa el agrupamiento al sumar tres números | $a+(b+c) = (a+b)+c$ | $\sqrt{3}+(\sqrt{5}+\sqrt{7}) = (\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{7}$ |
| 3. 0 es el neutro aditivo: Al sumar 0 a todo número se obtiene el mismo número | $a+0 = a$ | $\sqrt{35}+0 = \sqrt{35}$ |
| 4. -a es el inverso aditivo (o negativo) de a: Al sumar un número con su negativo se obtiene 0 | $a+(-a) = 0$ | $\sqrt{19}+(-\sqrt{19}) = 0$ |

b) Propiedades de la Multiplicación de números reales

| Definición | Caso general | Ejemplo |
|---|-------------------------------|---|
| 1. Propiedad conmutativa: No importa el orden cuando se multiplican dos números | $ab = ba$ | $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{6} = \sqrt{6}$ |
| 2. Propiedad asociativa: No importa el agrupamiento cuando se multiplican tres números | $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$ | $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}) = (\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})\cdot\sqrt{7}$ $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{35}) = (\sqrt{15})\cdot\sqrt{7}$ $\sqrt{105} = \sqrt{105}$ |
| 3. Propiedad del elemento identidad: Al multiplicar cualquier número por 1 se obtiene el mismo número | $a \cdot 1 = a$ | $\sqrt{8}\cdot 1 = \sqrt{8}$ |

c) Propiedades de la Multiplicación de números reales (Continuación)

| Definición | Caso general | Ejemplo |
|---|--|--|
| <p>1. Propiedad del inverso</p> <p>Si $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo o recíproco de a. Al multiplicar un número diferente de cero por su recíproco, se obtiene 1.</p> | $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$ | $\sqrt{13}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = 1$ |
| <p>2. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:</p> <p>Multiplicar un número por una suma de dos números, equivale a multiplicar cada uno de los dos números de la suma por el primer número y a continuación sumar los productos.</p> | $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ <p style="text-align: center;">y</p> $(a+b)c = a \cdot c + b \cdot c$ | $\begin{aligned} \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{10} \\ &= 2,45 + 3,16 \\ &= 5,61 \end{aligned}$ $\begin{aligned} (\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{10} + \sqrt{15} \\ &= 3,16 + 3,87 \\ &= 7,03 \end{aligned}$ |
| <p>3. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción:</p> <p>Multiplicar un número por una resta de dos números, equivale a multiplicar cada uno de los dos números de la resta por el primer número y a continuación restar los productos.</p> | $a(b-c) = a \cdot b - a \cdot c$ <p style="text-align: center;">y</p> $(a-b)c = a \cdot c - b \cdot c$ | $\begin{aligned} \sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5}) &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{10} \\ &= 2,45 - 3,16 \\ &= -0,71279 \end{aligned}$ $\begin{aligned} (\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{5} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{15} \\ &= 3,16 - 3,87 \\ &= -0,71071 \end{aligned}$ |

| Definición | Caso general | Ejemplo |
|---|---|--|
| 4. El opuesto del opuesto de un número real es el número real a . | $-(-a) = a$ | $-(-\frac{2}{7}) = \frac{2}{7}$ |
| 5. El producto del opuesto de a por b es igual al producto del opuesto de b por a ; y es igual al opuesto del producto de a y b . | $-a(b) = -b(a) = -(ab)$ | $-\frac{1}{7}\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{7}\right)$ $= -\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7}\right)$ $= -\left(\frac{3}{35}\right)$ |
| 6. El producto del opuesto de a y el opuesto de b es igual al producto de a y b . | $(-a)(-b) = ab$ | $-\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ $= \frac{2}{6}$ $= \frac{1}{3}$ |
| 7. El producto del opuesto de 1 por a es igual al opuesto de a | $-1(a) = -a$ | $-1(0,71) = -0,71$ |
| 8. El cociente del opuesto de a entre b es igual al cociente de a y el opuesto de b | $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; b \neq 0$ | $\frac{-4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{-\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ |
| 9. El cociente del opuesto de a y el opuesto de b es igual al opuesto del cociente del opuesto de a y b ; y es igual al opuesto del cociente de a y el opuesto de b ; y es igual al cociente de a y b | $\frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}; b \neq 0$ | $\frac{-1}{-7} = -\frac{-1}{7}$ $= \frac{1}{-7}$ $= \frac{1}{7}$ |

Ejercicios de aplicación de las propiedades del conjunto de los números reales



EJEMPLO

1. Comprobemos que se cumple que: $-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{Aplicando la propiedad conmutativa}$$

$$-\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = -\frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} \quad \text{Resolviendo el producto}$$

$$-0,1333.. = -0,1333... \quad \text{Efectuando el cociente}$$



EJEMPLO

2. $-(-5)(-3)$

$$-(-5)(-3) = (-1) \cdot (-5)(-3) \quad \text{Reescribiendo el opuesto como un producto}$$

$$= (-1) \cdot ((-5)(-3)) \quad \text{Aplicando la propiedad asociativa}$$

$$= (-1) \cdot (15) \quad \text{Efectuando el producto}$$

$$= -15 \quad \text{Respuesta}$$



EJEMPLO

3. $-\left(\frac{1}{2} - 3\right) \cdot 4$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} - 3\right) = \left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) - (4 \cdot 3) \quad \text{Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción}$$

$$= \frac{4}{2} - 12 \quad \text{Efectuando el cociente}$$

$$= 2 - 12 \quad \text{Realizando la sustracción}$$

$$= -10 \quad \text{Respuesta}$$



EJEMPLO

$$4. \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + 3$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} + 3 = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right) + 3$$

Aplicando la propiedad asociativa

$$= \frac{3-1}{5} + 3$$

Resolviendo la adición

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{1}$$

Resolviendo la adición de racionales

$$= \frac{2+15}{5}$$

Efectuando la adición del numerador

$$= \frac{17}{5}$$

Respuesta



EJEMPLO

5. Expresemos como una suma la siguiente expresión: $3 \left(\frac{2}{3} + 1 \right)$ y resolvamos:

$$3 \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 1$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

$$= \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{3} + 3$$

Efectuando la multiplicación

$$= \frac{6}{3} + 3$$

Usando la ley de cancelación

$$= 2+3$$

Respuesta

$$= 5$$

2.6 Propiedades de las potencias con respecto a la multiplicación

1. Multiplicación de potencias de igual base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto significa que el producto de potencias de igual base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.



EJEMPLO

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^3 (\sqrt{2})^5 &= (\sqrt{2})^{3+5} \\ &= (\sqrt{2})^8 \\ &= (1,4142)^8 \\ &= 16 \end{aligned}$$



EJEMPLO

$$\begin{aligned} (-\sqrt{5})^2 (-\sqrt{5})^3 &= (-\sqrt{5})^{2+3} \\ &= (-\sqrt{5})^5 \\ &= (-2,24)^5 \\ &= -56,40 \end{aligned}$$

2. Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \text{ o } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Esto significa que el producto de potencias de distinta base e igual exponente es igual al producto de las bases elevadas al exponente n.



EJEMPLO

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^3 (\sqrt{3})^3 &= (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^3 \\ &= (\sqrt{6})^3 \\ &= (2,4494)^3 \\ &= 14,6953 \end{aligned}$$

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned} (-\sqrt{5})^2 (\sqrt{7})^2 &= (-\sqrt{5} \cdot \sqrt{7})^2 \\ &= (-\sqrt{35})^2 \\ &= (-5,9161)^2 \\ &= 35,002 \end{aligned}$$

2.7 Propiedades de las potencias con respecto a la división

1. División de una potencia de exponente igual

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esto significa que el cociente de potencias de igual base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes.

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned} (\sqrt{7})^3 \div (\sqrt{7})^2 &= \frac{(\sqrt{7})^3}{(\sqrt{7})^2} \\ &= (\sqrt{7})^{3-2} \\ &= (\sqrt{7})^1 \\ &= \sqrt{7} \\ &= 2,64575131 \end{aligned}$$

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned} (\sqrt{3})^5 \div (\sqrt{3})^3 &= \frac{(\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3})^3} \\ &= (\sqrt{3})^{5-3} \\ &= (\sqrt{3})^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. División de potencias de distinta base e igual exponente.

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Esto significa que la división de una potencia de igual exponente es igual a la potencia del cociente de las bases.



EJEMPLO

$$\begin{aligned}(3)^7 \div (5)^7 &= (3 \div 5)^7 \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^7 \\ &= (0,6)^7 \\ &= 0,028\end{aligned}$$



EJEMPLO

$$\begin{aligned}(-1)^5 \div (2)^5 &= (-1 \div 2)^5 \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{(-1)^5}{2^5} \\ &= -0,3125\end{aligned}$$

3. Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Esto significa que la potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.



EJEMPLO

$$\begin{aligned}(5^3)^2 &= 5^{3 \cdot 2} \\ &= 5^6 \\ &= 15625\end{aligned}$$

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned}
 [(\sqrt{13})^3] &= (\sqrt{13})^{2 \cdot 3} \\
 &= (\sqrt{13})^6 \\
 &= (3,6055)^6 \\
 &= 2\,196,8125
 \end{aligned}$$

4. Potencia de exponente cero

$$a^0 = 1$$

Esto significa que la potencia con exponente cero es igual a la unidad (uno).

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned}
 \text{a. } (\sqrt{13})^0 &= 1 \\
 \text{b. } (-\sqrt{117})^0 &= 1
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned}
 \text{a. } 10^0 &= 1 \\
 \text{b. } 556^0 &= 1 \\
 \text{c. } 1\,000\,000^0 &= 1 \\
 \text{d. } \left(\frac{1}{5}\right)^0 &= 1
 \end{aligned}$$

5. Potencia de base 1

$$1^n = 1$$

Esto significa que cualquier potencia con base uno es igual a la unidad (uno).

**EJEMPLO**

$$\begin{aligned}
 \text{a. } 1^{50} &= 1 \\
 \text{b. } 1^{320} &= 1
 \end{aligned}$$

6. Potencia de exponente negativo

6.1 Base entera

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$



EJEMPLO

$$\begin{aligned} 3^{-2} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1^2}{3^2} \\ &= \frac{1}{3^2} \\ &= \frac{1}{9} \\ &= 0,11111\dots \end{aligned}$$

6.2 Base racional

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$



EJEMPLO

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} &= \left(\frac{3}{2}\right)^5 \\ &= \frac{3^5}{2^5} \\ &= \frac{243}{32} \\ &= 7,59375 \end{aligned}$$

Ejercicios aplicando las propiedades de potencias

$$1. 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^6 = 3^{2+3+6}$$

$$= 3^{11}$$

$$2. 10^{12} \div 10^{-14} = 10^{12 - (-14)}$$

$$= 10^{12+14}$$

$$= 10^{26}$$

$$3. x^6 \div x^2 = x^{6-2}$$

$$= x^4$$

$$4. \left(\frac{2}{4}\right)^4 \div \left(\frac{4}{9}\right)^4 = \frac{16}{81} \div \frac{256}{6561}$$

$$= \frac{16}{81} \cdot \frac{6561}{256}$$

$$= \frac{16}{1} \cdot \frac{81}{256}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{81}{16}$$

$$= \frac{81}{16}$$

$$= 0,0625$$

$$5. \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \frac{4}{16}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$= 0,25$$

$$6. 16^6 \div 8^6 = (16 \div 8)^6$$

$$= 2^6$$

$$= 64$$

$$7. (2^2)^2 \div (2^{-2})^3 = 2^4 \div 2^{-6}$$

$$= 2^{4-(-6)}$$

$$= 2^{4+6}$$

$$= 2^{10}$$

$$= 1024$$

$$8. 3^{-2} + 5^{-2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$$

$$= \frac{9+25}{225}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad (2^2)^{-2} &= 2^{-4} \\
 &= \frac{1}{2^4} \\
 &= \frac{1}{16} \\
 &= 0,0625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad (-3)^{-2} + (-5)^{-2} &= \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-5)^2} \\
 &= \frac{1}{9} + \frac{1}{25} \\
 &= \frac{25 + 9}{225} \\
 &= \frac{34}{225}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} &= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\frac{4}{9}} + \frac{1}{\frac{9}{4}} \\
 &= \frac{9}{4} + \frac{4}{9} \\
 &= \frac{81 - 16}{36} \\
 &= \frac{97}{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad (2 - 0,75^{-1})^{-2} &= \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{0,75}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{(2 - 1,33)^2} \\
 &= \frac{1}{(0,67)^2} \\
 &= \frac{1}{0,4489} \\
 &= 2,227667631...
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad \frac{5^{-2} + 5^{-1}}{5^{-3}} &= \frac{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^1}}{\frac{1}{5^3}} \\
 &= \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{125}} \\
 &= \frac{\frac{1 + 5}{25}}{\frac{1}{125}} \\
 &= \frac{\frac{6}{25}}{\frac{1}{125}} \\
 &= \frac{6 \cdot 125}{25 \cdot 1} \\
 &= 6 \cdot 5 \\
 &= 30
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad \frac{2^{-2} + 2^{-1}}{2^{-1} - 2^{-2}} &= \frac{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1}}{\frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{\frac{1+2}{4}}{\frac{2-1}{4}} \\
 &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad 3^0 + 2^0 - 5^0 &= 1 + 1 - 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad (a-b)^0 - a^0 + b^0 &= 1 - 1 + 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad 5x^0 - 7y^0 &= 5(1) - 7(1) \\
 &= 5 - 7 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} &= \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^1} + \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^1} \\
 &= \frac{1}{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{-\frac{2}{3}} \\
 &= \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \\
 &= -\frac{6}{2} \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \quad \frac{3^0 - 3^{-1}}{3 - 3^{-2}} &= \frac{1 - \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3^2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{1} - \frac{1}{9}} \\
 &= \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{27-3}{9}} \\
 &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{24}{9}} \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{24}
 \end{aligned}$$

Problemas de aplicación del entorno



EJEMPLO

1. Una cooperativa agrícola pretende aumentar su producción de frijoles en los próximos cuatro años, duplicando la producción con respecto al año anterior. ¿Cuál será su producción anual dentro de 4 años, si la actual es de 500 quintales por año?

Solución

Observemos que después de un año la producción:

$$2 \cdot 500 = 1\,000$$



A los dos años se tendrá el doble del primer año:

$$\begin{aligned} 2(2 \cdot 500) &= 2^2 \cdot 500 \\ &= 4 \cdot 500 \\ &= 2\,000 \end{aligned}$$

A los tres años se tendrá el doble del segundo año:

$$\begin{aligned} 2(2^2 \cdot 500) &= 2^3 \cdot 500 \\ &= 8 \cdot 500 \\ &= 4\,000 \end{aligned}$$

A los cuatro años se tendrá el doble del tercer año:

$$\begin{aligned} 2(2^3 \cdot 2\,500) &= 2^4 \cdot 500 \\ &= 16 \cdot 500 \\ &= 8\,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la producción anual en cuatro años será de 40 000 quintales de frijoles.

**EJEMPLO**

2. Un productor de sorgo pretende aumentar su producción en los próximos cinco años, triplicando la producción con respecto al año anterior. ¿Cuál será su producción anual dentro de 5 años, si la actual es de 30 quintales por año?

Solución

Observemos que después de un año la producción:

$$3 \cdot 30 = 90$$

A los dos años se tendrá el triple del primer año:

$$\begin{aligned} 3(3 \cdot 30) &= 3^2 \cdot 30 \\ &= 9 \cdot 30 \\ &= 270 \end{aligned}$$

A los tres años se tendrá el triple del segundo año:

$$\begin{aligned} 3(3^2 \cdot 30) &= 3^3 \cdot 30 \\ &= 27 \cdot 30 \\ &= 810 \end{aligned}$$

A los cuatro años se tendrá el triple del tercer año:

$$\begin{aligned} 3(3^3 \cdot 300) &= 3^4 \cdot 30 \\ &= 81 \cdot 30 \\ &= 2430 \end{aligned}$$



A los cinco años se tendrá el triple del cuarto año:

$$\begin{aligned} 3(3^4 \cdot 3\,000) &= 3^5 \cdot 30 \\ &= 243 \cdot 30 \\ &= 7\,290 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la producción anual en cinco años será de 7 290 quintales de sorgo.

Copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios:

I. Apliquemos correctamente las propiedades de la potenciación en la resolución de cada uno de los ejercicios:

1. $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^5 =$

11. $(-5)^{-2} + (-7)^{-2} =$



ACTIVIDADES

3. $5^{11} \div 5^{-24} =$

13. $(1 - 0,65^{-1})^{-3} =$

4. $x^{10} \div x^4 =$

14. $\frac{4^5 + 4^{-1}}{4^{-3}} =$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

15. $\frac{2^{-3} + 2^{-1}}{2^{-1} \cdot 2^{-3}} =$

6. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2}{4}\right)^3 =$

16. $5^0 + 3^0 - 8^0 =$

7. $12^5 \div 6^5 =$

17. $(10 - 3)^0 - 10^0 - 3^0 =$

8. $(3^2)^2 \div (3^{-2})^3 =$

18. $[8(3)^0 - 6(4)^0]^0$

9. $3^{-3} + 5^{-3} =$

19. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} =$

10. $(2^3)^{-4} =$

20. $\frac{5^0 - 5^{-1}}{5 - 5^{-3}} =$

II. Resolvamos correctamente los problemas del entorno aplicando las propiedades de potenciación.

1. Un joven estudiante pretende aumentar sus ahorros en los últimos cuatro años, triplicando sus ahorros con respecto al año anterior. Si el ahorro anual es de C\$ 200. ¿Cuál será su ahorro anual dentro de cuatro años?

2. Una maestra ha decidido promover el ahorro en sus estudiantes para hacer una fiesta de celebración de fin de año. Ella aspira aumentar el ahorro en los últimos cinco meses de clase, duplicando el ahorro con respecto al primer mes. ¿Cuál será el ahorro dentro de cinco meses, si han ahorrado mensual C\$ 200?

3. Una productora de queso pretende aumentar su producción en los próximos cinco años, duplicando la producción con respecto al año anterior. ¿Cuál será su producción anual dentro de 5 años, si la actual es de 20 libras al año?

AUTOEVALUACIÓN

Leamos, analicemos y resolvamos correctamente en una hoja aparte. Luego encerremos el inciso que corresponde a la respuesta correcta de cada uno de los ejercicios.

1. Al comparar los números reales $\sqrt{5}$ y 2,23 podemos afirmar que:

- a. $\sqrt{5} = 2,23$
- b. $\sqrt{5} > 2,23$
- c. $\sqrt{5} < 2,23$
- d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

2. Si comparamos los números reales $\frac{\pi}{3}$ y 1,04 podemos afirmar que:

- a. $\frac{\pi}{3} > 1,04$
- b. $\frac{\pi}{3} < 1,04$
- c. $\frac{\pi}{3} = 1,04$
- d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

3. Para forrar un biodigestor cilíndrico con plástico que tiene 12 metros de longitud y 2,15 metros de radio se necesitan:

- a. 174,26 metros
- b. 174 metros
- c. 175 metros
- d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

4. El opuesto del número real $e = 2,718$ es:

- a. $-e$
- b. e
- c. $\frac{1}{e}$
- d. Las respuestas a y b son correctas

5. Si dividimos en diez partes el segmento de recta que va del 2 al 3, podemos afirmar que el valor 2,646 está ubicado entre los números:

- a. 2,6 y 2,7.
- b. 2,64 y 2,65.
- c. 2,640 y 2,650.
- d. Las respuestas a y c son correctas

AUTOEVALUACIÓN

Leamos, analicemos y resolvamos correctamente en una hoja aparte. Luego encerremos el inciso que corresponde a la respuesta correcta de cada uno de los ejercicios.

1. Todos números reales son irracionales.

- a. Verdadero
- b. Falso
- c. No es verdadero ni falso
- d. Los inciso a y b son respuestas correctas

2. Al representar gráficamente en la recta numérica el número $\sqrt{13}$, observamos que se encuentra entre los números:
- a. 0 y 1
 - b. 0 y 1
 - c. 2 y 3
 - d. 3 y 4
 - e. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
3. El número 7,280109889 ...
- a. Pertenece al conjunto de los números \mathbb{Q}'
 - b. Pertenece al conjunto de los números \mathbb{Q}
 - c. Pertenece al conjunto de los números \mathbb{R}
 - d. Los inciso a y b son respuestas correctas
4. Al establecer comparaciones entre los números $\sqrt{17}$ y 3π , observamos que:
- a. $\sqrt{17} < 3\pi$
 - b. $\sqrt{17} > 3\pi$
 - c. $\sqrt{17} = 3\pi$
 - d. Las respuestas a y b son correctas
5. El resultado de resolver la diferencia entre los números $0,257 - 2,237$ es:
- a. 1,98
 - b. -1,98
 - c. -1,9
 - d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

6. El resultado de resolver la adición entre los números $-3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ es:
- a. $\sqrt{5}$
 - b. $2\sqrt{5}$
 - c. $-\sqrt{5}$
 - d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
7. El resultado de resolver el producto entre los números $-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ es:
- a. $\frac{10}{21}$
 - b. $-\frac{10}{21}$
 - c. -0,48
 - d. Las respuestas a y b son correctas
8. El resultado de resolver el cociente entre los números $\frac{5}{8} \div -\frac{3}{7}$ es:
- a. $-\frac{15}{56}$
 - b. $\frac{15}{56}$
 - c. 0,58
 - d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
9. Un productor ha sembrado $\frac{1}{7}$ partes de un terreno de remolacha y $\frac{4}{7}$ de zanahoria. Si el terreno tiene 4 900 m², ¿qué área sembró de cada hortaliza y qué área quedó sin sembrar?
- a. 1 400 m² de remolacha y 2 800 m² de zanahoria. Quedó sin sembrar 700 m²
 - b. 1 400 m² de remolacha y 2 800 m² de zanahoria. Quedó sin sembrar 1 400 m²
 - c. 700 m² de remolacha y 2 800 m² de zanahoria. Quedó sin sembrar 700 m²
 - d. Ninguna de las respuestas es correcta.

10. El 60% de los ingresos de un familia se emplean en alimentación, el 15% se emplea en gastos básicos, el 20% en el pago de un préstamo ¿Qué cantidad de los ingresos se emplea en ahorro?

- a. 0,25
- b. 0.05
- c. 5%
- d. Solamente el inciso a es incorrecta.

11. Un depósito de granos contiene 80 libras y ésta equivale a dos séptimas partes de su capacidad total. ¿Qué capacidad tiene el depósito?

- a. 240 libras
- b. 260 libras
- c. 280 libras
- d. Ninguna de las respuestas es correcta.

12. Quiero leer 5 libros de la biblia. Cada libro tiene 35 páginas. Si leo cada día 10 páginas, ¿cuántos días necesito para leer los libros?

- a. 17 días
- b. 17 días y medio
- c. 17,5 días
- d. Ninguna de las respuestas es correcta

13. El resultado al aplicar el Multiplicación de potencias de igual base a la expresión $m^5 \cdot m^4 \cdot m^{(-2)}$ es:

- a. $m^{(-7)}$
- b. m^7
- c. $m^{(-9)}$
- d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

14. El resultado al aplicar las propiedades de potencias a la expresión $3^{-2} (3^3 + 3^6)$ es:
- a. 0,0013736...
 - b. 27
 - c. 0,00000188...
 - d. 84
15. El resultado al aplicar la división de potencias de igual base a la expresión $5^{11} \div 5^{-24}$ es:
- a. 5^{-13}
 - b. 5^{-35}
 - c. 5^{35}
 - d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
16. El resultado al aplicar la división de potencias de diferente base a la expresión $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{3}{4}\right)^3$ es:
- a. 1,266
 - b. 1,2
 - c. 1,3
 - d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta
17. El resultado al aplicar la adición de potencias de diferente base a la expresión $3^{-3} + 5^{-3}$ es:
- a. 0,045037
 - b. 0,0065789...
 - c. 0,0066
 - d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

18. El resultado al aplicar la potencias de potencias a la expresión $(2^3)^{-3}$ es:
- a. 2^{-9}
 - b. $\frac{1}{2^9}$
 - c. 0,002
 - d. Los incisos a y b son correctos
19. El resultado al aplicar la potencia de una diferencia a la expresión $(1 - 0,35^{-1})^{-3}$ es:
- a. 1,55
 - b. -1,55
 - c. -1,5
 - d. Los incisos a y b son correctos
20. El resultado al aplicar la adición y cociente de potencias de igual base a la expresión $\frac{2^{-2} + 2^{-1}}{2^{-3}} =$
- a. 6
 - b. -6
 - c. $\frac{1}{6}$
 - d. Ninguna de las respuestas es correcta
21. Una joven estudiante aspira aumentar sus ahorros en los tres años, triplicando sus ahorros con respecto al año anterior. Si el ahorro anual es de C\$ 800. ¿Cuál será su ahorro anual dentro de tres años?
- a. C\$ 2 400
 - b. C\$ 7 200
 - c. C\$ 21 600
 - d. Ninguna de las respuestas es correcta

22. Una maestra ha decidido promover el ahorro en sus estudiantes para hacer una fiesta de celebración de fin de año. Ella aspira aumentar el ahorro en los últimos cinco meses de clase, duplicado el ahorro con respecto al primer mes. ¿Cuál será el ahorro dentro de cinco meses, si han ahorrado mensual C\$ 500?

- a. C\$ 4 000
- b. C\$ 16 000
- c. C\$ 16 600
- d. Ninguna de las respuestas es correcta

23. Una productora de queso pretende aumentar su producción en los próximos tres años, triplicando la producción con respecto al año anterior. ¿Cuál será su producción anual dentro de 3 años, si la actual es de 400 libras al año?

- a. C\$ 3 600
- b. C\$ 1 200
- c. C\$ 10 800
- d. Ninguna de las respuestas es correcta

II UNIDAD

EL ÁLGEBRA EN LA VIDA COTIDIANA

Desempeños de Aprendizaje

Interpreta y utiliza el lenguaje algebraico y realiza operaciones con polinomios aplicados en situaciones de la vida cotidiana.

Ejes Transversales

Practica y promueve acciones de sensibilización para la protección, conservación y preservación del medio ambiente y los recursos naturales, en el hogar, escuela y comunidad, a fin de alcanzar un comportamiento amigable con el medio ambiente.



1 Introducción al álgebra

Indicador de logro:

Traduce del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico situaciones de su vida cotidiana.

1.1 Necesidad del surgimiento del Álgebra

¿Qué conocemos del origen de la palabra algebra? ¿Cómo surge el álgebra?

Desde los comienzos del desarrollo de la humanidad surgió la necesidad de medir y calcular. Con el aumento de la producción de alimentos apareció, primero el trueque, y posteriormente el comercio; ésto condujo paulatinamente al desarrollo de la **aritmética**. Cuando el hombre tuvo que resolver problemas de repartición de tierras, medición de terrenos, cálculo de áreas, cálculo de volúmenes, entre otros, surgió la **geometría**. En algún momento de las necesidades del hombre, fue necesario plantearse y resolver ecuaciones: así nació el **álgebra**.

$$\sqrt{x} \quad (a + b) \\ \div \quad = \quad \cdot \quad +$$

Así como la aritmética surgió de la necesidad que tenían los pueblos primitivos de medir el tiempo y de contar sus posesiones, el origen del álgebra es muy posterior puesto que debieron de transcurrir muchos siglos para que el hombre llegara al concepto abstracto de número que es el fundamento del álgebra. El gran desarrollo experimentado por el álgebra se debió sobre todo a los matemáticos árabes y muy en particular, a Al-Juarismi, que sentó las bases del álgebra tal como la conocemos hoy en día.

El algebra tuvo sus primeros avances en las civilizaciones de Babilonia y Egipto, entre el cuarto y tercer milenio antes de Cristo. Estas civilizaciones usaban primordialmente el álgebra para resolver ecuaciones de primer y segundo grado.

El álgebra continuó su constante progreso en la antigua Grecia. Los griegos usaban el álgebra para expresar ecuaciones y teoremas, un ejemplo es el teorema de Pitágoras. Los matemáticos más destacados en este tiempo fueron Arquímedes, Herón y Diofante. Arquímedes se basó en la matemática en sus tratados de física y geometría del espacio. Herón fue otro que se basó en ellas para hacer algunos de sus inventos, como la primera máquina de vapor.

¿Qué es el álgebra?

Algebra es el nombre que identifica a una rama de la Matemática que emplea números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas.

A diferencia de la aritmética, en donde sólo se usan los números y sus operaciones aritméticas (como $+$, $-$, \cdot , \div), en álgebra los números son representados por símbolos (usualmente a , b , c , x , y , z). Esto es útil porque:

Permite la formulación general de leyes de aritmética (como $a + b = b + a$), y esto es el primer paso para una exploración sistemática de las propiedades de los números reales.

- Permite referirse a números “desconocidos”, formular ecuaciones, estudiar cómo resolverlas y realizar el análisis correspondiente a su resolución.
- Permite la formulación de relaciones funcionales.

Veamos algunos conceptos básicos del álgebra

1.2 Variable numérica y constante numérica

Es nuestro primer día en la clase de álgebra y podemos asegurar que el álgebra es divertida. ¡Podemos resolver acertijos!

Un Acertijo

¿Cuál es el número que falta?

$$\square - 2 = 4$$

Bien, la respuesta es 6, ¿por qué?

Porque $6 - 2 = 4$

En álgebra no usamos espacios vacíos o cuadros sino que usamos una letra (normalmente una x o una y , pero podemos utilizar cualquier otra letra). Entonces escribiríamos:

$$x - 2 = 4$$

Es así de sencillo. La letra (en este caso una x) sólo quiere decir “**aún no lo sabemos**” y se la llama frecuentemente **incógnita o variable**.

Y una vez que hemos resuelto, escribimos:

$$x = 6$$

Una variable es un símbolo para un número que todavía no conocemos. Comúnmente es una letra minúscula como x , y , z , a , b , c , m , n , entre otras.

También podemos definir una variable como:

Variable: Es una cantidad a la que se le puede asignar un número ilimitado de valores, durante el análisis de un problema. Para representarlas se utilizan las últimas letras del abecedario.

¿Cuál es la diferencia entre x y 2 del acertijo anterior?

Hemos señalado que x es una cantidad a la que se le puede asignar cualquier valor, mientras que el número 2 es un valor fijo, mantiene su valor. A este valor fijo se le denomina constante numérica.

Constante numérica o absoluta: Es aquella que tienen el mismo valor para todos los problemas.

¡Importante!

Todos los números reales son ejemplo de constantes numéricas.

Algunas constantes especiales:

$$\pi = 3,14159265\dots$$

$$e = 2,71828\dots$$

Comprobemos lo aprendido

Resuelve este acertijo:

$$x + 5 = 12$$

1. ¿Cuál es el valor de x ?
2. ¿Cómo llamamos al número 5 ?

1.3 Traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico

La matemática es un lenguaje y como todo lenguaje, tiene sus reglas. Si conocemos sus reglas, podremos entender todas las matemáticas.

Veamos qué fácil es traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Construyamos patrones con triángulos de colores:

En su cuaderno dibuje los triángulos como los mostrados y pinte los triángulos siguiendo la siguiente instrucción:

2 amarillos – 2 rojos – 2 amarillos – 2 rojos



Si representamos el color amarillo por la letra a y el color rojo por la letra r , la instrucción para pintar los triángulos, ¿cuál sería?

Evidentemente, sería $2a + 2r$



EJEMPLO

En su cuaderno dibuje 14 cuadrados como los mostrados y pinte los cuadrados siguiendo la instrucción:

4 rojos – 3 azules – 4 rojos – 3 azules



La instrucción para pintar los cuadrados sería: $4r + 3a$, donde r representa el color rojo y a el color azul.



EJEMPLO

Una gallina tiene dos patas. En dos gallinas hay cuatro patas. Completemos la siguiente tabla



| N° de gallinas | N° de patas |
|----------------|-------------|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| x | $2x$ |

¿Qué observamos?

Podemos ver que el número de patas siempre es dos veces el número de gallinas, es decir, es el doble.

Como el número de gallinas está variando, lo representamos por x , entonces el número de patas será $2x$.



EJEMPLO

De manera similar analicemos el número de patas de los conejos.

Un conejo tiene cuatro patas. En dos conejos hay ocho patas. Completando la tabla obtenemos.

| No. de conejos | No. de patas |
|----------------|--------------|
| 1 | 4 |
| 2 | 8 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| y | $4y$ |



Podemos ver que el número de patas siempre es cuatro veces el número de conejos.

Como el número de conejos está variando, lo representamos por y , entonces el número de patas será $4y$.

Para poder traducir al lenguaje matemático, recordemos el significado de algunas palabras:

| Palabra | Significa |
|-------------------|---|
| Suma | resultado de una suma de dos o más números. |
| Diferencia | resultado de una resta de dos o más números. |
| Producto | resultado de una multiplicación de dos o más números. |
| Cociente | resultado de una división de dos o más números. |
| Doble, triple,... | multiplicar por 2, 3, etc. |
| Mitad, tercio,... | dividir entre 2, 3, etc. |
| Cuadrado | resultado de elevar un número al cuadrado. |
| Cubo | resultado de elevar un número al cubo. |
| Cuarta potencia | elevar a la potencia 4. |
| Raíz cuadrada | calcular raíz cuadrada. |
| Raíz cúbica | calcular raíz cúbica. |

En diferentes ocasiones fácilmente entendemos algunas frases.

Por ejemplo, cuando una persona nos dice: “sume 3 al número 2”, rápidamente entendemos y escribimos: $2 + 3$.

Sin embargo, algunas palabras prácticamente nunca las utilizamos, a pesar de que ya sabemos realizar la operación.



EJEMPLO

Traduce a lenguaje matemático, es decir, a una expresión algebraica, el siguiente enunciado: El doble de un número menos el cuadrado de otro.

Solución:

Vamos a trabajar con dos cantidades desconocidas, la primera la llamaremos x y a la segunda y .

- Como ya sabemos, la palabra “**doble**” nos indica que multipliquemos por dos: $2x$ indica el doble del primer número.
- “El cuadrado del otro” quiere decir: “multipliquemos el número por sí mismo dos veces”, es decir, “elevemos al cuadrado”. Entonces, la expresión algebraica que expresa matemáticamente esa frase es: y^2 .
- Finalmente, la frase “**El doble de un número menos el cuadrado de otro**”, matemáticamente se escribe: $2x - y^2$.

Cualquier expresión matemática, por más compleja que parezca, siempre puede expresarse en palabras a través del lenguaje algebraico.

Otras palabras que se usan frecuentemente en el lenguaje algebraico son las siguientes:

| Palabra | Significa |
|--------------|--------------------|
| Aumentado | más o sumado a |
| Disminuido | menos o restado de |
| Razón | cociente |
| Proporción | cociente |
| Incrementado | sumado |
| Semi | mitad de... |



EJEMPLO

Traduce a una expresión matemática la siguiente frase:

El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de uno de sus lados.

Solución:

- Primero debemos notar que se está hablando de una fórmula de geometría.
- Necesitamos una literal para denotar el área del cuadrado. Por similitud, utilizaremos A .
- Y para denotar la longitud del lado del cuadrado usaremos l .
- Entonces, el área (A) la encontramos elevando al cuadrado la longitud del lado (l):
 $A = l^2$

Esta es la fórmula que nos expresa matemáticamente la frase que nos pidieron traducir al lenguaje algebraico.



EJEMPLO

Traduce a una expresión matemática la siguiente información:

Carlos tiene 6 naranjas más que Benjamín. Entre los dos tienen en total 78 naranjas.

Solución:

- Vamos a utilizar la letra C para denotar la cantidad de naranjas que tiene Carlos.
- Denotaremos la cantidad de naranjas que tiene Benjamín con la letra B .
- Sabemos que Carlos tiene 6 naranjas más que Benjamín, así que si sumamos 6 al número B obtenemos lo que tiene Carlos:

$$C = B + 6$$

- Si sumamos las dos cantidades, obtenemos lo que tienen los dos juntos, en este caso, 78 naranjas:

$$B + C = 78$$

- Pero ya habíamos encontrado que $C = B + 6$, por lo que podemos escribir también:

$$B + (B + 6) = 78, \text{ es decir } 2B + 6 = 78$$

Cualquiera de las dos ecuaciones sirve como solución al texto dado en el encabezado del ejemplo.

Más adelante estudiaremos cómo resolver estas ecuaciones.

Expresiones algebraicas comunes:

- El doble o duplo de un número: $2x$
- El triple de un número: $3x$
- El cuádruplo de un número: $4x$
- La mitad de un número: $\frac{x}{2}$
- Un tercio de un número: $\frac{x}{3}$
- Un cuarto de un número: $\frac{x}{4}$
- Un número al cuadrado: x^2
- Un número al cubo: x^3

Ahora, ¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Escribamos en lenguaje matemático las siguientes expresiones:

1. Un número aumentado en 3. _____
2. Un número disminuido en 2. _____
3. El producto de p y q . _____
4. Uno restado a un número. _____
5. La diferencia de dos números, elevada al cuadrado. _____
6. La diferencia del cuadrado de dos números. _____
7. 3 veces la diferencia de dos números. _____
8. 10 más que 3 veces un número: _____
9. La diferencia de dos números. _____
10. El doble de un número. _____
11. Un número disminuido en 7. _____
12. El triple de un número más el cuadrado de otro. _____
13. Se tiene monedas de C\$5 y billetes de C\$10. En total tenemos C\$250. ¿De qué forma representamos esa cantidad de dinero, para encontrar cuántas monedas y cuántos billetes tenemos? _____
14. Un rectángulo tiene un área de 84 metros cuadrados. Sabemos que su base mide 5 metros más que su altura. La expresión que nos indica el área es _____
15. El promedio de dos números es igual a su semisuma. _____

2 Expresiones algebraicas

Indicador de logro:

Clasifica las expresiones algebraicas en monomio, binomio, trinomio y polinomio.

2.1 Término y sus elementos

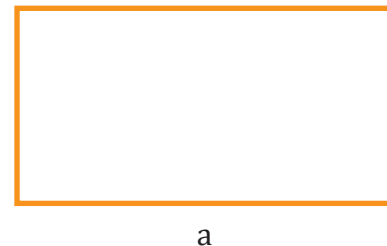
¿Qué son las expresiones algebraicas?

¿Cómo las obtenemos?

Para iniciar con este tema construyamos un rectángulo y un cuadrado. Calculemos cuánto valen el perímetro y la superficie de las figuras construidas.

Comparemos los resultados obtenidos por los demás compañeros y compañeras. ¿Todos obtuvimos el mismo resultado numérico?

Ahora utilicemos letras a y b para nombrar los lados del rectángulo y la letra l para los lados del cuadrado. Expresemos la superficie y el perímetro de cada figura usando las letras anteriores.



Comparemos los resultados con el de los demás compañeros/as. ¿Todos llegamos a la misma expresión?

Las expresiones obtenidas en el ejercicio anterior se denominan expresiones algebraicas. En estas expresiones intervienen números, letras y signos de operaciones, que se utilizan para generalizar diferentes propiedades y regularidades geométricas o numéricas.



Al conjunto de números y letras que representan operaciones entre cantidades se llama **expresión algebraica**.

Son ejemplo de expresiones algebraicas las siguientes:

1. $a + b$
2. $m^2 - n^3$
3. $3x^2 - 4xy + 5y$
4. $3 + ab - m$
5. $\frac{3}{4}a + a^2b - \frac{1}{3}m$

¿Qué características observamos en estos ejemplos?

Podemos ver que cada grupo de letras y números está separado por el signo + o el signo -. Decimos que una expresión algebraica se puede separar en **términos**.

Los términos se distinguen uno de otro porque están separados por un signo de más (+) o un signo de menos (-), esto significa que entre letras y números sólo puede haber multiplicaciones y divisiones para agruparlos.

Expresión

$$4x + 5$$

Términos

Un **término** es un número o una variable o bien, números y variables multiplicados juntos.

En todo **término algebraico** pueden distinguirse cuatro elementos: el signo, el coeficiente, la parte literal (variable) y el grado.

Signo.

Los términos que van precedidos del signo + se llaman términos positivos, en tanto los términos que van precedidos del signo - se llaman términos negativos.

Coeficiente.

Se llama coeficiente al número real que se le coloca delante de una cantidad para multiplicarla. El coeficiente indica el número de veces que dicha cantidad debe tomarse como sumando.

Parte literal (variable).

La parte literal está formada por las letras que haya en el término.

Grado.

El grado es una característica de las expresiones algebraicas, que indica el número de valores que debe tener la variable o letra.

El **grado de un término con respecto a una letra** es el exponente de dicha letra. Así, por ejemplo el término x^3y^2z , es de tercer grado con respecto a x , de segundo grado con respecto a y y de primer grado con respecto a z .

Llamaremos **grado del término** a la suma de los exponentes de su parte literal. El término x^3y^2z es de grado 6 ya que $3 + 2 + 1 = 6$

Términos semejantes. Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal y el mismo exponente.

Son ejemplos de términos semejantes: $2a^3b^2c^5$ y $-4a^3b^2c^5$

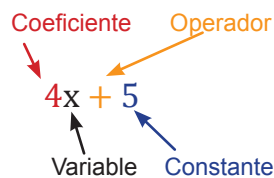
Como vemos, los signos y los coeficientes o partes numéricas pueden ser diferentes.

¿Y cuándo la variable no existe?

¿Cuál es el coeficiente de un término al cual no le aparece escrito?



Cuando un coeficiente no aparece escrito se sobreentiende que es 1 y cuando no se escribe el exponente a una variable también se sobreentiende que es 1



Antes de clasificar las expresiones algebraicas, analicemos las siguientes situaciones:

a) Cuando un docente pasa asistencia, llama a "x" estudiantes varones y "z" estudiantes mujeres, entonces llama a $x + z$ estudiantes, independientemente del sexo que tiene cada uno. La expresión algebraica utilizada es:

$$x + z$$

b) Tu mamá te compra 2 pantalones y 3 camisas y tu no sabes el precio. Si llamamos "m" al precio del pantalón y "n" al precio de la camisa, entonces compró: $2m + 3n$, por lo tanto la expresión algebraica utilizada es:

$$2m + 3n$$

Una expresión como ésta se denomina **polinomio de la variable** x y se representa por $p(x)$ (se lee "p de x"). También en un polinomio puede existir más de una variable.



EJEMPLO

Las expresiones:

1. $\frac{2}{3}x^3 - x + 3$
2. $5x^2 - 2x + 3$
3. $x^2 - y^2$
4. $x^3 - y^3$
5. $x^2 - 2x + 1$

son polinomios en una sola variable: x.

Las expresiones:

1. $2x^2 - xy + y^2$
 2. $x^2y - xy + y^3$
- son polinomios en dos variables.

A continuación definiremos este concepto.

Expresiones Algebraicas

Monomio: Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural. $3x, -2ab, \frac{m^2n^3}{3}$

Binomio: Un binomio es una expresión algebraica formada por dos monomios. $3x + y^2, -2ab + 7, \frac{2a^3}{3} - 5a, a^2 - b^2, \frac{x^2}{4} - 16$

Trinomio: Un trinomio es una expresión algebraica formada por tres monomios $3x + y + z, a^2 - 2ab + b^2, m - 2n + 7$

Polinomio: Un polinomio es una expresión algebraica formada por dos o más términos. $4a^5b - 7a^4b^3 - 8ab^4$

Ahora, ¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Completemos la siguiente tabla

| Término | Signo | Coeficiente | Parte literal | Grado |
|------------------|-------|-------------|---------------|-------|
| $-5x^9$ | | | | |
| $3z^{12}$ | | | | |
| $-4x^2y^3$ | | | | |
| a^3b^4 | | | | |
| $-\frac{x^2}{3}$ | | | | |

Clasifiquemos las siguientes expresiones algebraicas.

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1. $4y + 5x^3$ | 4. $4x^2 - 8xy + y^2$ |
| 2. $4mn$ | 5. $m^2 - 4n^2$ |
| 3. $5x^3 - 3xy + 4y^2$ | 6. $3a - 2b + 4ac - 5b^3$ |

Escribe 3 términos semejantes a cada uno de los presentados:

- | | |
|--------------------------|------------|
| 1. $-8x^2y^3z$ | 3. $2m^2n$ |
| 2. $-\frac{2}{3}ab^3c^2$ | 4. $5abc$ |

2.2 Polinomio

En el tema anterior vimos que según el número de términos que tiene una expresión algebraica se puede clasificar en: monomios y polinomios

Polinomios: Son aquellos que constan de dos términos, es decir, es la suma algebraica de dos o más monomios.

En general, los polinomios son expresiones algebraicas de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Son ejemplos de polinomio en una variable:

$$2x^3 - \frac{7}{3}x^2 - 3x + 8, 3m + 5, a^2 + 3a - 2$$

Son ejemplos de polinomio en dos y tres variables:

$$2a + b, 3x^2 - 5y + z$$

Importante

Las expresiones algebraicas que representan cocientes o que contengan exponentes negativos no son polinomios.

Las siguientes son expresiones algebraicas que no son polinomios:

$$\frac{4x^2 + 5y^2}{3xy}$$

$$\frac{2xy}{x^2 + y}$$

$$8x^3 + 2x - \frac{1}{x}$$

¿Por qué no son polinomios?

Analicemos la primera expresión:

$$\frac{4x^2 + 5y^2}{3xy}$$

En este caso tenemos un cociente por lo tanto **no es polinomio**, además podemos reexpresarla de la siguiente manera $\frac{1}{3} (4x^2 + 5y^2)(x^{-1}y^{-1})$ y claramente observamos que existen **exponentes negativos**.

La segunda expresión: $\frac{2xy}{x^2 + y}$ se analiza de manera similar a la anterior, por lo consiguiente **no es un polinomio**.

Y, la última expresión: $8x^3 + 2x - \frac{1}{x}$, la podemos reexpresar de la siguiente forma:

$8x^3 + 2x - x^{-1}$, donde aparece un **exponente negativo**, por ello **no es polinomio**.

Grado de un polinomio. El exponente de mayor orden de la variable se conoce como grado del polinomio.

Para encontrar el grado de un polinomio, basta examinar cada término y hallar el exponente de mayor orden de la variable.



EJEMPLO

El grado de $3x^2 + 5x^4 - 2$ se halla examinando el exponente de la variable en cada término.

- El exponente en $3x^2$ es 2
- El exponente en $5x^4$ es 4
- El exponente en -2 es 0, porque $-2 = -2x^0$

Entonces el grado de $3x^2 + 5x^4 - 2$ es 4, el exponente de mayor orden de la variable en el polinomio.

De manera semejante, el grado de $4y^3 - 3y^5 + 9y^2$ es 5, puesto que 5 es el exponente de mayor orden de una variable presente en el polinomio.

Por convención, el grado de un término constante (número) como -4 o 7 es cero, excepto cuando el término constante es 0. (El polinomio 0 no tiene grado).

El **término principal** de un polinomio es el término de mayor grado. Su coeficiente se llama **coeficiente principal**.

Resumamos lo anterior, identifiquemos los términos, grados de cada término, grado del polinomio, término principal y coeficiente principal de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2x^3 + 8x^2 - 3x - 7$

| | | | | |
|------------------------------|--------|--------|-------|------|
| Término | $2x^3$ | $8x^2$ | $-3x$ | -7 |
| Grado | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Grado del polinomio | 3 | | | |
| Término principal | $2x^3$ | | | |
| Coeficiente principal | 2 | | | |

b) $6x^2 + 8x^2y^3 - 17xy - 24x^2z + 2y + 3$

| | | | | | | |
|------------------------------|-----------|-----------|---------|-----------|------|-----|
| Término | $6x^2$ | $8x^2y^3$ | $-17xy$ | $-24x^2z$ | $2y$ | 3 |
| Grado | 2 | 5 | 2 | 4 | 1 | 0 |
| Grado del polinomio | 5 | | | | | |
| Término principal | $8x^2y^3$ | | | | | |
| Coeficiente principal | 8 | | | | | |

Grado absoluto: Es la mayor suma de los exponentes.

Grado de un polinomio

Grado relativo a una literal: Es el mayor exponente que tiene la literal que se considere del polinomio.

$$2x^3 + 8x^2 - 3x - 7$$

El grado absoluto es 3

$$6x^2 + 8x^2y^3 - 17xy - 24xy^2z + 3$$

El grado absoluto es 5

El grado con relación a x es 2

El grado con relación a y es 3

El grado con relación a z es 1

Normalmente los polinomios en una variable se organizan de tal manera que los exponentes decrecen de izquierda a derecha, es decir, en **orden descendente**.

Algunas se escriben de tal manera que los exponentes crecen de izquierda a derecha. Se dice que el polinomio está ordenado en **orden ascendente**.

Esto simplifica muchas veces las operaciones con polinomios.

Polinomio ordenado: Se dice que un polinomio está ordenado con respecto a una letra cuando los exponentes de una letra determinada van aumentando o disminuyendo desde el primero hasta el último con respecto a la letra considerada, que recibe el nombre de letra ordenatriz.

Así, por ejemplo, el polinomio $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3$ está ordenado en orden ascendente con respecto a la letra ordenatriz y y está ordenado en orden descendente con respecto a la letra ordenatriz x.

Otro ejemplo de polinomio ordenado es: $2x^3 - \frac{1}{5}x - 3$

Polinomio completo respecto a una letra: Llamamos polinomio completo cuando contiene todos los exponentes de un modo consecutivo.



EJEMPLO

Polinomio completo y ordenado respecto a la letra 'a':

$$3a^4b - 8a^3b^3 + 9a^2 + ab^5 + 4$$

Cuando encontramos un término sin letra o letras se le llama **término independiente**.

Un término independiente lo podemos considerar como si estuviera acompañado de una letra con exponente cero. Recordemos que un número o letra si lo elevamos a cero su resultado es igual a 1.

$$\text{a) } 4^0 = 1 \qquad \text{b) } a^0 = 1 \qquad \text{c) } \left(\frac{-3}{2}\right)^0 = 1 \qquad \text{d) } x^0 = 1$$

El ejemplo anterior lo podemos escribir:

$$3a^4b - 8a^3b^3 + 9a^2 + a^1b^5 + 4a^0$$

A un polinomio que le falte un término basta que le pongamos un cero como coeficiente:



EJEMPLO

$$3a^4b + 9a^2 + a^1b^5 + 4a^0$$

A este polinomio ordenado según la letra 'a' le falta el término cuyo exponente de 'a' es 3:

$$3a^4b + 0a^3 + 9a^2 + a^1b^5 + 4a^0$$

Como cero por cualquier valor equivale a cero, las dos últimas expresiones son iguales.



EJEMPLO

a. Ordenemos y completemos:

$$x^2 + 7x^5 - 12x^6 + 9x^3 + 2x$$

Solución:

$$-12x^6 + 7x^5 + 0x^4 + 9x^3 + x^2 + 2x = -12x^6 + 7x^5 + 9x^3 + x^2 + 2x$$

b. Ordenemos y completemos con relación a 'x':

$$12x^8yz^4 + \frac{7}{3}x^2y^3z^2 + \frac{9}{2}x^4y^4z^4 - 9x^5y + \frac{3}{2}x^3z^5 + 2x^6y^2z - 9xy$$

Solución:

$$12x^8yz^4 + 2x^6y^2z - 9x^5y + \frac{9}{2}x^4y^4z^4 + \frac{3}{2}x^3z^5 + \frac{7}{3}x^2y^3z^2 - 9xy$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

I. Dadas las siguientes expresiones. Digamos si son polinomios. En caso afirmativo, indiquemos cuál es su grado. Justifiquemos las respuestas.

a. $\frac{3}{4}x^2y + 2xy$

b. $\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

c. $\frac{3}{x} + 3x^2$

d. $\frac{x}{3} + 3x^2$

II. Ordenemos los siguientes polinomios:

a. en orden ascendente

b. en orden descendente

1. $12 + 3x^2 - 7x$

2. $x^4 + 2 - 5x^2 + 3x^3y - 7xy^2$ (organiza las potencias de x)

III. Ordenemos y completemos con relación a 'x':

$$-2x^7yz^3 + \frac{1}{3}x^3y^3z^2 + \frac{1}{2}x^6y^3z^4 + 5x^4z^2 + \frac{3}{2}x^2z^5 + 2x^9y^2z - 9x^5y$$

IV. Dados los siguientes polinomios, indiquemos su grado absoluto y su grado relativo con respecto a cada una de sus variables

a. $\frac{3}{4}x^6 - 2x^3 + x - 8$

b. $\frac{x^5}{2} + \frac{3}{4}x^7y^5 - \frac{5}{9}x^6y^4$

c. $4a^5b - 7a^4b^3 - 8ab^4$

d. $\frac{x}{3} + 3x^2$

V. Escribamos un ejemplo de:

a. Polinomio cuyo grado absoluto sea 10

b. Binomio de primer grado absoluto

c. Trinomio de cuarto grado absoluto y de tercer grado respecto a x

3 Valor numérico de una expresión algebraica

Indicador de logro:

Plantea y resuelve problemas de su vida cotidiana aplicando y valor numérico.

3.1 Problemas de aplicación a su entorno

Valor numérico de una expresión algebraica: es el número que se obtiene al sustituir las letras de una expresión algebraica por números determinados y hacer las operaciones indicadas en la expresión.



EJEMPLO

Calculemos el valor numérico de $2x + x^2 + 3$ para $x = 4$

Solución:

Sustituimos en la expresión algebraica el valor de $x = 4$, es decir, donde aparezca la letra x escribiremos el valor de 4 y luego resolvemos

$$\begin{aligned} 2x + x^2 + 3 &= 2(4) + (4)^2 + 3 \\ &= 8 + 16 + 3 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Como podemos observar, dependiendo del valor numérico de la incógnita el resultado de una misma expresión puede cambiar.

Veamos otro ejemplo



EJEMPLO

Calculemos el valor numérico de $5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$ para $x = 2$, $y = -1$

Solución:

Sustituimos en la expresión algebraica el valor de $x = 2$ y $y = -1$, luego resolvemos

$$\begin{aligned} 5x^2y - 8xy^2 - 9y^3 &= 5(2)^2(-1) - 8(2)(-1)^2 - 9(-1)^3 \\ &= 5(4)(-1) - 8(2)(1) - 9(-1) \\ &= -20 - 16 + 9 \\ &= -27 \end{aligned}$$

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

- Se efectúa toda operación que se encuentre entre paréntesis o arriba o debajo de una raya de fracción.
- Se efectúan todas las operaciones de multiplicación o división en el orden que se presenten de izquierda a derecha.
- Se efectúan las sumas y las restas en el orden de izquierda a derecha.



EJEMPLO

Completemos la siguiente tabla, calculando el valor numérico de $3x + 5$ para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

| x | Sustitución | Valor numérico |
|---|-------------|----------------|
| 1 | $3(1) + 5$ | 8 |
| 2 | $3(2) + 5$ | 11 |
| 3 | $3(3) + 5$ | 14 |
| 4 | $3(4) + 5$ | 17 |
| 5 | $3(5) + 5$ | 20 |



EJEMPLO

Completemos la siguiente tabla, calculando el valor numérico de $3x^2 + 5x - 2$ para $x = -2, -1, 0, 1$ y 2 .

| x | Sustitución | Valor numérico |
|----|-----------------------|----------------|
| -2 | $3(-2)^2 + 5(-2) - 2$ | 0 |
| -1 | $3(-1)^2 + 5(-1) - 2$ | -4 |
| 0 | $3(0)^2 + 5(0) - 2$ | -2 |
| 1 | $3(1)^2 + 5(1) - 2$ | 6 |
| 2 | $3(2)^2 + 5(2) - 2$ | 20 |

A continuación resolveremos algunos problemas aplicados a situaciones reales

a. En el mercado el precio de la libra de arroz es 13 córdobas y la de frijoles 15 córdobas. Si compro 2 libras de arroz y 3 de frijoles, esta situación se puede expresar como: $2a + 3f$ ¿Cuánto pagaría en total?



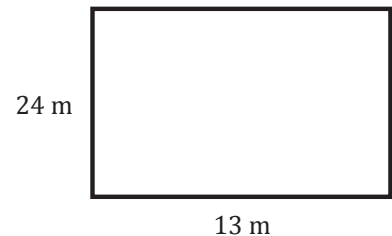
Solución:

Sustituyendo en la expresión

$$\begin{aligned} 2a + 3f &= 2(13) + 3(15) \\ &= 26 + 45 \\ &= 71 \end{aligned}$$

Conclusión: Por la compra de 2 libras de arroz y 3 libras de frijoles debo pagar 71 córdobas.

b. Un terreno rectangular tiene x metros de ancho, además y metros de largo. Hallar el valor del área de un terreno rectangular que tiene 13 metros de ancho y 24 metros de largo.



Solución:

Debemos recordar que el área de un rectángulo es igual

$$\text{Área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

Si representamos el largo por la letra y , y el ancho por la letra x , tenemos

$$\text{Área} = y \cdot x$$

Sustituyendo los valores del problema, tenemos

$$\text{Área} = 13\text{m} \cdot 24\text{m} = 312\text{m}^2$$

Conclusión: El área del terreno es de 312 m^2 .

c. ¿Cuánto ahorró Francisco en tres meses, si el primer mes ahorró C\$120, el segundo mes ahorró el doble que el primero y el tercer mes el triple que el primero?

Solución:

Representemos por x la cantidad ahorrada el primer mes, $x = 120$

El segundo mes ahorra $2x$ (el doble), es decir:

$$2x = 2 \cdot 120 = 240$$

El tercer mes ahora $3x$ (triple).

$$3x = 3 \cdot 120 = 360$$

Entonces en los tres meses ahorra:

$$x + 2x + 3x = 120 + 240 + 360 = 720$$

Conclusión: En los tres meses Francisco ahorra C\$720.

d. Calculemos cuántos metros cúbicos caben dentro de un barril para guardar agua potable. El barril tiene forma cilíndrica de 2 metros de altura y radio de la base 0,5 metros. El volumen del barril se expresa mediante la expresión $V = \pi r^2 h$

Solución:

Sustituimos los valores dados, en la expresión $V = \pi r^2 h$

$$V = 3,1416 \cdot (0,5)^2 \cdot (2)$$

$$V = 3,1416 \cdot 0,25 \cdot 2 = 0,7854 \text{ m}^3$$

e. Juan está en el patio de su casa y ve como un mango cae desde la parte alta del árbol. Si el mango tarda 0,75 segundo en llegar al piso ¿cuál es la altura del árbol, sabiendo que ésta se determina mediante la expresión $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Calculemos la distancia recorrida por el mango cada 0,25 segundos desde que comienza a caer.

Solución:

Sustituimos los valores dados, en la expresión $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$$h = \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (0,75\text{s})^2$$

$$h = 4,9(0,5625\text{m})$$

$$h = 2,76 \text{ m}$$

Para calcular la distancia recorrida cada cierto tiempo construyamos la siguiente tabla

| Tiempo (s) | Sustitución | Valor numérico (m) |
|------------|--|--------------------|
| 0,25 | $h = \frac{1}{2} (9,8) \cdot (0,25)^2$ | 0,31 |
| 0,5 | $h = \frac{1}{2} (9,8) \cdot (0,5)^2$ | 1,23 |
| 0,75 | $h = \frac{1}{2} (9,8) \cdot (0,75)^2$ | 2,76 |

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

I. Calculemos el valor numérico de las siguientes expresiones:

- $2 + 3x^3y - 5x$, para $x = -1$; $y = 5$
- $\frac{2ab - 5c}{a}$, para $a = 1$; $b = 3$; $c = -2$
- $\frac{10x^2}{3} + 2xy - 4x^2y - \frac{5}{3}x$; para $x = 2$; $y = 3$
- $\frac{5x^2y}{3} - xy + 2x^3y^2 - x$; para $x = 5$; $y = -2$
- $5\sqrt{x^3 + 2xy}$; para $x = 1$; $y = 2$

II. Complete la siguiente tabla, calculando el valor numérico de $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ para $x = -2, -1, 0, 1$ y 2

| x | Sustitución | Valor numérico |
|-----|-------------|----------------|
| | | |
| | | |
| | | |

III. Expresemos en lenguaje matemático y resolvamos:

- La distancia recorrida por un vehículo que se mueve con una velocidad constante de veinte metros por segundo (20 m/s), está dada por la expresión $d = 20t$, donde d es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Determina la distancia recorrida luego de:
 - 20 s
 - 40 s
 - 1 minuto
 - 1 hora
- Andrés tiene C\$ 300 en su billetera. Paga a 3 personas igual cantidad de dinero y realiza una compra de C\$ 50. Si le quedan C\$100, ¿cuánto dinero pagó a cada una de las personas?

4 Operaciones con polinomios

Indicador de logro:

Realiza adición, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de polinomios aplicando el algoritmo correspondiente y la reducción de términos semejantes, ley de los signos y las propiedades de la potenciación.

4.1 Reducción de términos semejantes

No olvidemos

En una expresión algebraica se llaman **términos semejantes** a todos aquellos términos que tienen **igual factor literal**, es decir, a aquellos términos que tienen **iguales letras** (símbolos literales) e **iguales exponentes**.



EJEMPLO

$6a^2b^3$

es término semejante con

$-2a^2b^3$

porque ambos tienen el mismo factor literal (a^2b^3)

$3a^2c$

es término semejante con

$4ca^2$

porque ambos tienen el mismo factor literal (a^2c)

$5a^3b^2$

No es término semejante con

$2a^2b^3$

Porque los exponentes no son iguales

Reducir términos semejantes significa **sumar o restar los coeficientes numéricos** en una expresión algebraica, que tengan el mismo factor literal.

Para desarrollar un ejercicio de este tipo, se suman o restan los coeficientes numéricos y se **conserva el factor literal**.

Recordemos cómo se suman los números enteros:

Las reglas de suma se aplican únicamente a dos casos: **números de igual signo y números con signo distinto.**

Las reglas a memorizar son las siguientes:

Números de igual signo: Cuando dos números tienen igual signo se debe sumar y conservar el signo.

**EJEMPLO**

$$(-3) + (-8) = -11 \text{ (sumamos y conservamos el signo)}$$

$$12 + 25 = 37 \text{ (sumamos y conservamos el signo)}$$

Números con distinto signo: Cuando dos números tienen distinto signo se debe restar y conservar el signo del número que tiene mayor valor absoluto

**EJEMPLO**

$$\text{a) } (-7) + 12 = 5 \text{ (los números son de distinto signo y se deben restar: } 12 - 7 = 5\text{)}$$

$$\text{b) } 5 + (-51) = -46 \text{ (es negativo porque el 51 tiene mayor valor absoluto)}$$

$$\text{c) } -14 + 34 = 20$$

**EJEMPLO**

Reduzcamos los términos semejantes:

$$xy^3 - 3x^2y + 5xy^3 - 12x^2y + 6$$

Solución:

Podemos ver que hay dos tipos de factores literales: xy^3 y x^2y , hay también una constante numérica: 6

Para resolver este ejercicio se suman los coeficientes numéricos de xy^3 con $5xy^3$.

Debemos tener presente que cuando una expresión no tiene coeficiente, es decir, un número significa que es 1 ($x^3y = 1xy^3$), luego obtenemos:

$$1 + 5 = 6, \text{ es decir } xy^3 + 5xy^3 = 6xy^3$$

De manera similar sumamos $-3x^2y$ con $-12x^2y$,

$$-3 - 12 = -15$$

De aquí que $-3x^2y$ con $-12x^2y = -15x^2y$

Por lo tanto, $xy^3 - 3x^2y + xy^3 - 12x^2y + 6 = 6xy^3 + -15x^2y + 6$



EJEMPLO

$$3ab - 5abc + 8ab + 6abc - 10 + 14ab - 20 = 25ab + 1abc - 30$$

Operaciones:

$$3ab + 8ab + 14ab = 25ab$$

$$- 5abc + 6abc = + 1abc$$

$$- 10 - 20 = - 30$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Reduzcamos los términos semejantes:

1) $y + 3x + 4y + x + 3y + 2x$

2) $-2a^2b - 3a + 2 + 5ab - 8a + 15 + 18ba^2 - 14a$

3) $3xy - yz + 5xy + 10zx + 3zy - 12yx + 13xz + yz$

4) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x$

5) $5ab - \frac{1}{4}a^2b^2 + 2ac - 3ab - \frac{1}{3}a^2b^2 + 8$

6) $3m + \frac{1}{2}n + 4mn + m - 2mn - 2n$

4.2 Supresión de signos de agrupación en expresiones algebraicas

Paréntesis

- $(9 + 3) = 12$

Corchetes

- $[3 + (7 - 2)]$
 $= [3 + (5)]$
 $= 8$

Llaves

- $\{5 + 3 - [4 + (2 - 5)]\}$
 $= \{5 + 3 - [4 + (-3)]\}$
 $= \{5 + 3 - [1]\}$
 $= 7$

El proceso de eliminación de los signos de agrupación es igual al visto para polinomios aritméticos. Se recomienda partir por los signos más internos hasta los más externos. Recordando utilizar la ley de signos pero haciendo un especial énfasis en que podemos ahorrar tiempo usando la siguiente regla:

- ✓ Si el signo "+" precede al signo de agrupación, se eliminan escribiendo los términos de su interior con su mismo signo.
- ✓ Si el signo "-" precede al signo de agrupación, se eliminan escribiendo a los términos de su interior con signo contrario.
- ✓ Cada vez que se suprime un signo de agrupación, se procede a reducir los términos semejantes.
- ✓ En el caso que a un paréntesis no le preceda ningún signo, entonces se entiende que el paréntesis tiene un signo positivo.

Observemos la siguiente expresión algebraica:

$$2x - \{5 + 3x - [4x + (2x - 5) - x]\}$$

Es una expresión algebraica que contiene signos de agrupación. Las llaves, los corchetes, los paréntesis se llaman signos de agrupación.

Vamos a simplificar la expresión algebraica

- Eliminando los paréntesis, que es el signo de agrupación más interno y como le antecede un signo (+) escribimos los términos con el mismo signo, así tenemos:

$$2x - \{5 + 3x - [4x + 2x - 5 - x]\}$$

- Reduciendo los términos semejantes dentro de los corchetes, obtenemos:

$$2x - \{5 + 3x - [5x - 5]\}$$

- Eliminando los corchetes y cambiando de signo los términos internos ya que le antecede el signo (-) tenemos:

$$2x - \{5 + 3x - 5x + 5\}$$

- Reduciendo los términos semejantes dentro de las llaves, obtenemos:

$$2x - \{10 - 2x\}$$

- Eliminando las llaves, tenemos:

$$2x - 10 + 2x$$

- Finalmente, reduciendo los términos semejantes, obtenemos:

$$4x - 10$$



EJEMPLO

Simplifiquemos la siguiente expresión algebraica

$$(x + y + z) - (y - x + z) - \{m - [n + (3m - 5n) - (n - 3m)]\} + 4m$$

- Eliminando los paréntesis, que son los signos de agrupación más internos y como le antecede al primero un signo (+) escribimos los términos con el mismo signo, y al signo que le antecede (-) cambiamos los signos de los términos, así tenemos:

$$(x + y + z - y + x - z) - \{m - [n + (3m - 5n - n + 3m)]\} + 4$$

- Reduciendo términos semejantes dentro de los paréntesis tenemos:

$$(2x) - \{m - [n + (6m - 6n)]\} + 4$$

- Eliminando el paréntesis tenemos:

$$(2x) - \{m - [n + 6m - 6n]\} + 4$$

- Reduciendo términos semejantes dentro del paréntesis tenemos:

$$(2x) - \{m - [6m - 5n]\} + 4$$

- Eliminando el corchete tenemos:

$$(2x) - \{m - 6m + 5n\} + 4m$$

- Reduciendo términos semejantes dentro de las llaves tenemos:

$$2x - \{-5m + 5n\} + 4$$

- Eliminando las llaves tenemos:

$$2x + 5m + 5n + 4$$

- Reduciendo términos semejantes:

$$6x + 5m - 5n$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Apliquemos la supresión de signos de agrupación:

1. $(4x + 3y - 2) - (x + y - 5)$
2. $-[(4a + 3bc - 2b) - (a + 3b - 5bc)]$
3. $5p - (2p - 3) - (-p - 2) - (10p + 1)$
4. $(\frac{1}{4}p + 3q - 2) - (-2p - 4q - 5) + 8$
5. $-(4m + 3n + 12) - (m + 2n - 3)$
6. $3x - (5y - 2x) - [6x - (3x - 5y) - x]$
7. $\{-3x - [-2x + 4x - x + (-4x + 3)]\}$
8. $\{-2m + [3x - 5x - (-2x + 4) + (5 - 4x) - 3] + 3x - 2\}$
9. $[2n - (-4n + 3m - n)]$
10. $3x - [5y + [(y - 6 + x) - 2x]] - (y - x)$

4.3 Operaciones con polinomios

Adición y sustracción de polinomios

La reducción de términos semejantes es el principio para sumar o restar polinomios.

Recordemos cómo se reducen términos semejantes:

1) $6m + 4m = 10m$ o lo que es igual

$$6m + 4m = (6 + 4)m = 10m$$

2) $5xy + (-3xy)$

$$= 5xy - 3xy$$

$$= 2xy$$

$$5xy + (-3xy) = 5xy - 3xy = (5 - 3)xy = 2xy$$

3) $x^3 + 4x^3 + 2x^3 = 7x^3$

$$x^3 + 4x^3 + 2x^3 = (1 + 4 + 2)x^3 = 7x^3$$



EJEMPLO

Supongamos que se desea sumar $3x^2 + 7x - 3$ y $5x^2 - 2x + 9$; es decir deseamos encontrar:

$$(3x^2 + 7x - 3) + (5x^2 - 2x + 9)$$

- Procedamos siguiendo las reglas para la supresión de signos de agrupación

$$3x^2 + 7x - 3 + 5x^2 - 2x + 9$$

- Reduzcamos términos semejantes

$$= (3 + 5)x^2 + (7 - 2)x + (9 - 3)$$

$$= 8x^2 + 5x + 6$$

Otra forma de realizar la suma de polinomios es en forma vertical:

Se ordena el primer polinomio en orden descendente o ascendente, luego se coloca el siguiente polinomio de manera que los términos semejantes queden uno debajo del otro y luego se procede a realizar la suma o resta.

Resolvamos el ejemplo anterior en forma vertical

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 7x - 3 \\ 5x^2 - 2x + 9 \\ \hline 8x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

Del mismo modo que en aritmética, podemos sumar o restar más de dos polinomios.

Por ejemplo, para sumar los polinomios $-7x + x^2 - 3$, $6x^2 - 8 + 2x$, y $3x - x^2 + 5$

Escribimos cada polinomio en orden descendente con los términos semejantes en la misma columna y sumamos:

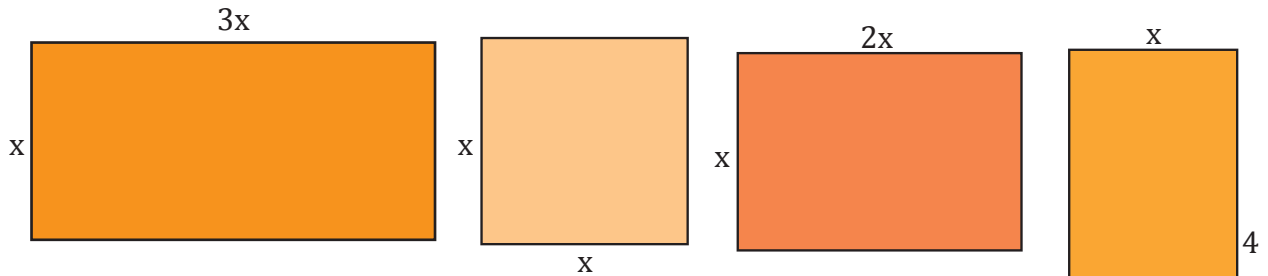
$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad -7x \quad -3 \\
 6x^2 \quad +2x \quad -8 \\
 -x^2 \quad +3x \quad +5 \\
 \hline
 6x^2 \quad -2x \quad -11
 \end{array}$$

La suma es $6x^2 - 2x - 11$



EJEMPLO

Las dimensiones de cuatro terrenos se expresan en términos de x , como lo muestra la figura dada. ¿Cuál es la suma de sus perímetros? ¿Cuál es su valor si $x = 5$?



Solución:

Calculamos el perímetro de cada figura:

$$P_1 = x + x + 3x + 3x = 8x$$

$$P_2 = x + x + x + x = 4x$$

$$P_3 = x + x + 2x + 2x = 6x$$

$$P_4 = x + x + 4 + 4 = 2x + 8$$

La suma de los perímetros es:

$$8x + 4x + 6x + 2x + 8$$

Sumando términos semejantes resulta,

$$(8 + 4 + 6 + 2)x + 8 = 20x + 8$$

¿Cuál es el valor cuando $x = 5$?

$$20x + 8 = 20(5) + 8$$

$$= 100 + 8$$

$$= 108$$

PARA RESTAR POLINOMIOS:

- Se identifican tanto el minuendo como el sustraendo.
- Se escriben el minuendo y el sustraendo entre paréntesis separados por el signo menos (-).
- Se escribe el minuendo con su propio signo y a continuación el sustraendo con signo cambiado y se realizan las operaciones resultantes.



EJEMPLO

Restar $3x + 2y$ de $-4x + 8y$

Solución:

Para identificar cual polinomio escribimos de primero, nos fijamos en la palabra de. La expresión que está después de esa palabra es la que va de primero, entonces nos queda:

$$(-4x + 8y) - (3x + 2y) =$$

Eliminamos el paréntesis y el resultado es:

$$-4x + 8y - 3x - 2y = -7x + 6y$$

De otra manera

$$\begin{array}{r} -4x + 8y \\ -3x - 2y \\ \hline -7x + 6y \end{array}$$



EJEMPLO

De $3y + 5x$ restar $-4y - 5x$

Solución:

Para identificar cual polinomio escribimos de primero, nos fijamos en la palabra de. La expresión que está después de esa palabra es la que va de primero, entonces nos queda:

$$(3y + 5x) - (-4y - 5x)$$

Eliminamos el paréntesis y el resultado es:

$$3y + 5x + 4y + 5x = 10x + 7y$$

$$\begin{array}{r} 3y + 5x \\ 4y + 5x \\ \hline 7y + 10x \end{array}$$

La expresión que va de primero no necesariamente va en paréntesis.

La idea es agilizar el proceso, por lo tanto debemos aprender a indicar la operación teniendo en cuenta que la expresión que va después del signo menos, tiene que cambiar de signos.

Multiplicación

Antes de introducirnos en el estudio de multiplicación o división de polinomios recordemos las principales leyes de los exponentes y las leyes de los signos

| | |
|---|---|
| <p>Multiplicación de potencias de igual base</p> $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ | Para multiplicar potencias de la misma base se pone la base y se suman los exponentes |
| <p>Potencia de una potencia</p> $(a^x)^m = a^{xm}$ | Para elevar una potencia a otra se escribe la base y se multiplican los exponentes |
| <p>Potencia de un producto</p> $(a \cdot b)^m = a^m b^m$ | Una potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores |
| <p>División de potencia de igual base</p> $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ | Para dividir potencias de la misma base se pone la base y se resta el exponente del numerador menos exponente del denominador |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | × | + | = | + |
| + | × | - | = | - |
| - | × | + | = | - |
| - | × | - | = | + |

- Si dos factores tienen el mismo signo positivo, su producto también tendrá signo positivo.

$$(+x) \cdot (+y) = +xy$$

- Si el multiplicador tiene signo positivo y el multiplicando tiene signo negativo, el producto tendrá signo negativo.

$$(-x) \cdot (+y) = -xy$$

- Si el multiplicando tiene signo positivo y el multiplicador tiene signo negativo, el producto tendrá signo negativo.

$$(+x) \cdot (-y) = -xy$$

- Si dos factores tienen ambos signo negativo, su producto tendrá signo positivo.

$$(-x) \cdot (-y) = +xy$$



EJEMPLO

Simplifiquemos las siguientes expresiones, aplicando las leyes de los exponentes y las leyes de los signos

- $3^5 \cdot 3^4 = 3^{5+4} = 3^9$
- $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$
- $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^2} = \frac{3^{5+4}}{3^2} = \frac{3^9}{3^2} = 3^{9-2} = 3^7$
- $[4^2]^{-3} = 4^{(2)(-3)} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6}$
- $[(-2)^5]^4 = (-2)^{20} = 2^{20}$
- $(2x^2)^3 = 2^3 \cdot x^{2 \cdot 3} = 8x^6$
- $\left(\frac{a^5}{b^3}\right)^2 = \frac{a^{5 \cdot 2}}{b^{3 \cdot 2}} = \frac{a^{10}}{b^6}$

Producto de monomios

Para encontrar el producto de dos monomios, se multiplica coeficiente por coeficiente y parte literal por parte literal.



EJEMPLO

Producto de monomio por polinomio

Esta operación se efectúa multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$$(3a^3)(-5a^2) = (3)(-5)(a^3)(a^2) = -15a^{3+2} = -15a^5$$



EJEMPLO

$$\begin{aligned} -2(3a^2 - 5b + ab) &= -2(3a^2) - 2(-5b) - 2(ab) \\ &= -6a^2 + 10b - 2ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3a^2b)(2a^2b - 5ab^2 + 3a) &= (-3a^2b)(2a^2b) + (-3a^2b)(-5ab^2) + (-3a^2b)(3a) \\ &= -6a^4b^2 + 15a^3b^3 - 9a^3b \end{aligned}$$

Producto de polinomios

Para que esta operación resulte más sencilla, se ordenan los polinomios, de manera ascendente o descendente, según el grado de una de las variables y después se multiplica cada término de un polinomio por todos los términos del otro.



EJEMPLO

Multiplicar los polinomios siguientes:

$$(-5x^4y - 3x^2y^3 + 2x^3y^2)(-3x^2y + 2xy^2)$$

- Ordenamos los polinomios en orden descendente según la variable x :

$$(-5x^4y + 2x^3y^2 - 3x^2y^3)(-3x^2y + 2xy^2)$$

- Multiplicamos cada término de primer polinomio por todos los términos de otro

$$(-5x^4y)(-3x^2y + 2xy^2) + (2x^3y^2)(-3x^2y + 2xy^2) + (-3x^2y^3)(-3x^2y + 2xy^2)$$

- Realizamos las operaciones

$$(15x^6y^2 - 10x^5y^3) + (-6x^5y^3 + 4x^4y^4) + (9x^4y^4 - 6x^3y^5)$$

- Reducimos términos semejantes, para ello eliminamos paréntesis

$$15x^6y^2 - 10x^5y^3 - 6x^5y^3 + 4x^4y^4 + 9x^4y^4 - 6x^3y^5$$

$$\text{y entonces resulta } 15x^6y^2 - 16x^5y^3 + 13x^4y^4 - 6x^3y^5$$

En conclusión: $(-5x^4y - 3x^2y^3 + 2x^3y^2)(-3x^2y + 2xy^2) = 15x^6y^2 - 16x^5y^3 + 13x^4y^4 - 6x^3y^5$

En forma vertical sería de la siguiente manera

$$\begin{array}{r}
 -5x^4 y + 2x^3 y^2 - 3x^2 y^3 \\
 \cdot \quad -3x^2 y + 2xy^2 \\
 \hline
 -10x^5 y^3 + 4x^4 y^4 - 6x^3 y^5 \\
 15x^6 y^2 - 6x^5 y^3 + 9x^4 y^4 \\
 \hline
 15x^6 y^2 - 16x^5 y^3 + 13x^4 y^4 - 6x^3 y^5
 \end{array}$$

Multiplicamos por el término $+2xy^2$
 Multiplicamos por el término $-3x^2 y$
 Sumamos términos semejantes



EJEMPLO

División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suma algebraicamente cada uno de estos términos. Es decir, aplicando la propiedad distributiva de la división se tiene:

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{5x^4 - x^3 + 3x}{x} &= \frac{5x^4}{x} - \frac{x^3}{x} + \frac{3x}{x} \\
 &= 5x^3 - x^2 + 3
 \end{aligned}$$

División entre dos polinomios

Antes de iniciar una división de polinomios debemos prestar atención a que el grado del dividendo sea mayor que el grado del divisor, además los polinomios deben ser completos y ordenados en orden descendente, con respecto a la variable ordenatriz. Si falta algún término ya sea en el dividendo o divisor se completa con cero.

Pasos para dividir polinomios

Se completa y se ordena los polinomios dividendo y divisor con respecto a una sola variable (llamada ordenatriz) en forma descendente, en caso de que falten términos, éstos se completan con cero . En caso de que haya dos variables se asume a una de ellas como tal y las demás hacen el papel de números o constantes

Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente; luego este último se multiplica por cada uno de los términos del divisor y el producto así obtenido se resta del dividendo, para lo cual se le cambia de signo colocando cada término con su semejante. En caso de que algún término de ese producto no tenga ningún término semejante en el dividendo, se escribe dicho término en el lugar que corresponde de acuerdo con la ordenación del dividendo y divisor.

Se baja el siguiente término del dividendo y se repite el paso anterior tantas veces hasta que el resto sea a lo más de un grado menos que el grado del divisor (resto de grado máximo), o en todo caso hasta obtener cero como resto(división exacta).



EJEMPLO

Dividir $p(x) = 6x^3 - 2x^2 - 15x + 8$ entre $q(x) = -5 + 2x^2$

Solución:

- Se ordenan y se completan los polinomios de acuerdo a la variable x

$$6x^3 - 2x^2 - 15x + 8 \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 + 0x - 5 \end{array} \right.$$

- Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, (obtenemos $3x$, luego se multiplica este resultado por el divisor $2x^2 + 0x - 5$ y se resta el producto del dividendo.

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 2x^2 - 15x + 8 \\ -6x^3 - 0x^2 + 15x \\ \hline -2x^2 - 0x \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 + 0x - 5 \\ 3x \end{array} \right.$$

- Bajamos el siguiente término del dividendo y repetimos el proceso

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 2x^2 - 15x + 8 \\ -6x^3 - 0x^2 + 15x \\ \hline -2x^2 - 0x + 8 \\ -2x^2 - 0x - 5 \\ \hline 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 + 0x - 5 \\ 3x - 1 \end{array} \right.$$

Luego el cociente es $3x - 1$ y el residuo es 3 .



EJEMPLO

Dividir $p(x) = 3x^{17} - 4x^{12} + 9x^{10} - 4x^7 + 3x^5 - 2$ entre $q(x) = 3x^5 + 2$

$$\begin{array}{r} 3x^{17} - 4x^{12} + 9x^{10} - 4x^7 + 3x^5 - 2 \\ -3x^{17} - 2x^{12} \\ \hline -6x^{12} + 9x^{10} - 4x^7 \\ 6x^{12} \quad +4x^7 \\ \hline \quad +9x^{10} \quad +3x^5 \\ \quad -9x^{10} \quad -6x^5 \\ \hline \quad \quad -3x^5 - 2 \\ \quad \quad +3x^5 + 2 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 3x^5 + 2 \\ x^{12} - 2x^7 + 3x^5 - 1 \end{array} \right.$$

Como podemos ver es una división exacta, donde el cociente es $x^{12} - 2x^7 + 3x^5 - 1$ y el residuo es 0 .

Para operar con polinomios puede resultar cómodo pasar a sus expresiones en coeficientes, operar con éstos y dar el resultado en forma polinómica

Suma

$$p(x) = 8x^4 + x^2 - 5x - 4$$

$$q(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 2$$

Se suman los coeficientes de igual grado

| | | | | | |
|-----------|---|---|---|----|----|
| p(x) | 8 | 0 | 1 | -5 | -4 |
| q(x) | 0 | 3 | 1 | -3 | -2 |
| P(x)+q(x) | 8 | 3 | 2 | -8 | -6 |

$$p(x)+q(x) = 8x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 8x - 6$$

Observemos: El grado del polinomio resultante es **menor o igual** que el mayor de los grados de los polinomios sumados

Resta

$$p(x) = 8x^4 + x^2 - 5x - 4$$

$$q(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 2$$

Se restan los coeficientes de igual grado. Recordemos que el primer polinomio lo escribimos igual, pero al segundo cambiamos los signos de los coeficientes.

| | | | | | |
|------------|---|----|----|----|----|
| p(x) | 8 | 0 | 1 | -5 | -4 |
| q(x) | 0 | -3 | -1 | +3 | +2 |
| p(x)- q(x) | 8 | -3 | 0 | -2 | -2 |

$$p(x) - q(x) = 8x^4 - 3x^3 - 2x - 2$$

Observemos: El grado del polinomio resultante es **menor o igual** que el mayor de los grados de los polinomios restados

Multiplicación

$$p(x) = 3x^3 + 5x - 4$$

$$q(x) = x^2 - x + 2$$

Se multiplica coeficientes a coeficiente

| | | | | | | |
|-------------|---|----|----|----|----|----|
| p(x) | | | 3 | 0 | 5 | -4 |
| q(x) | | | | 1 | -1 | 2 |
| | | | 6 | 0 | 10 | -8 |
| | | -3 | 0 | -5 | 4 | |
| | 3 | 0 | 5 | -4 | | |
| p(x) · q(x) | 3 | -3 | 11 | -9 | 14 | -8 |

$$p(x) \cdot q(x) = 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 9x^2 + 14x - 8$$

Observemos: El grado del polinomio resultante es **igual a la suma** de los grados de los polinomios multiplicados

División

$$p(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$$

$$q(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{r}
 3 \quad -1 \quad 5 \quad -4 \\
 -3 \quad +9 \quad -6 \\
 \hline
 \quad +8 \quad -1 \quad -4 \\
 \quad -8 \quad +24 \quad -16 \\
 \hline
 \quad 23 \quad -20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \underline{1 \quad -3 \quad 2} \\
 3 \quad 8
 \end{array}$$

Cociente: $3x + 8$

Residuo: $23x - 20$

Observemos: El grado del polinomio cociente es **igual a la resta** de los grados de los polinomios divididos.

$$p(x) = 12x^3 + 6x - 5$$

$$q(x) = 4x^2 + 3$$

$$\begin{array}{r}
 12 \quad 0 \quad 6 \quad -5 \\
 -12 \quad 0 \quad -9 \\
 \hline
 \quad 0 \quad -3 \quad -5 \\
 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 \quad -3 \quad -5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \underline{4 \quad 0 \quad 3} \\
 3 \quad 0
 \end{array}$$

Cociente: $3x$

Residuo: $-3x - 5$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Realicemos las operaciones indicadas:

Si $p(x) = 3x^3 - x^2 + 2x$, $q(x) = 3x^3 - x^2 - 3x - 4$ y $r(x) = 2x^2 - 7x + 6$, calculemos:

- $p(x) - q(x)$
- $p(x) - q(x) + r(x)$
- $p(x) - [q(x) + r(x)]$
- $r(x) - [p(x) - q(x)]$
- $r(x)[p(x) + q(x)]$
- $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x)$

Dividamos $p(x)$ entre $q(x)$:

a) $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 3$, $q(x) = 2x^2 + x + 3$

b) $p(x) = 7x^2 - 2x + 5$, $q(x) = 8x + 7$

Resuelva las operaciones dadas:

- $8x^2 - 2x + 1 - (3x^2 + 5x - 8)$
- $xy^2 - 3x^2 - y^2 + x^2y - 5xy^2 + 11x^2y - 6x + 2y - 6x^2$
- $\left(\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x^2 - x + 1\right)$
- $(4x^2 - 2y)(3x^2 - 5y)$
- $(2x - 5)(2x + 5)$
- $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

5 Productos Notables

Indicador de logro:

Identifica y desarrolla productos notables atendiendo a sus características.

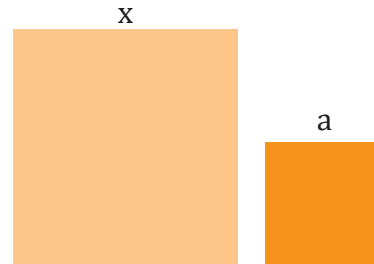
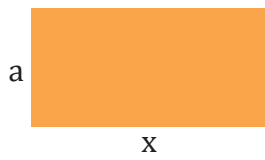
Productos Notables son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin tener que efectuar la multiplicación.

5.1 Cuadrado de la suma y diferencia de dos términos

Construyamos un cuadrado de lado x

Construyamos un cuadrado de lado a

Construyamos dos rectángulos de largo x y alto a



Juntemos las figuras anteriores de manera que formen un cuadrado

x Calculemos el área de este cuadrado aplicando la fórmula que ya conocemos y mediante la suma de las áreas que están en él.

$$A = (x+a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$



Ana, ¿a qué es igual el cuadrado de la suma de un binomio?

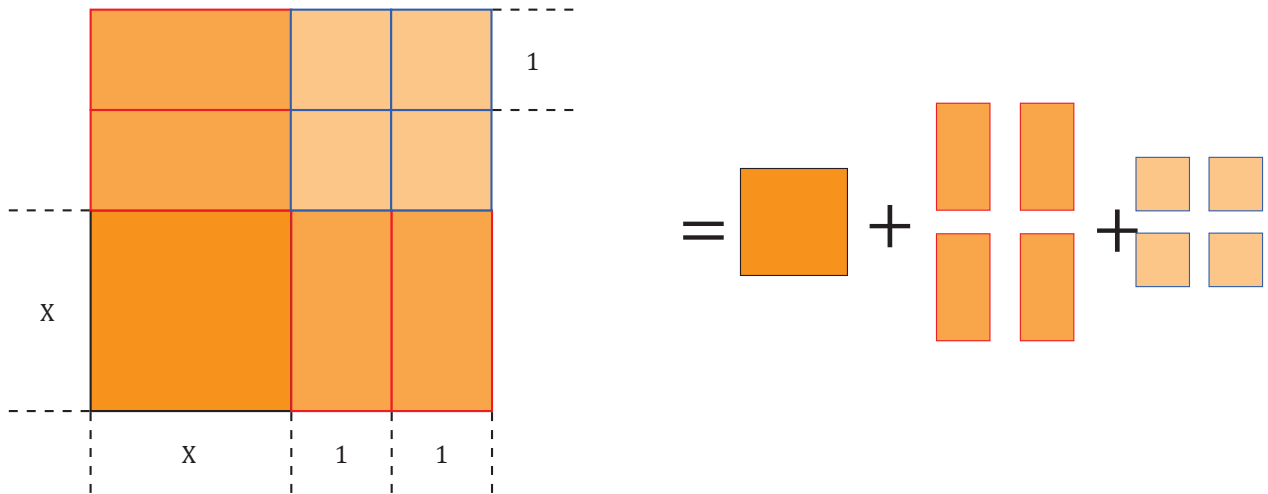
El cuadrado de la suma de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

↓
↓

Primer término
Segundo término

Situación Problemática: Un estudiante del séptimo grado, posee un terreno, lo divide en parcelas como muestra la figura. Su padre desea encontrar su área total. ¿Cómo lo haría?



$$(x + 2)^2 = x^2 + 4(x \cdot 1) + 4(1^2)$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Un agricultor posee un terreno de forma cuadrada, como se muestra en la figura. ¿Cómo encontraría su área, aplicando el cuadrado de un binomio, si $x = 5$?

Solución:

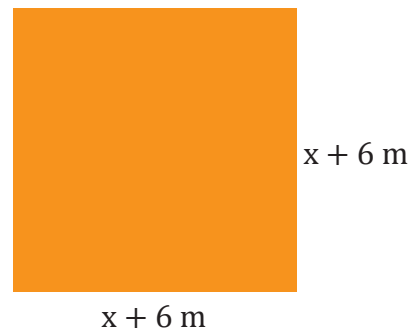
Aplicando el cuadrado de binomio el área del será:

$$(x + 6)^2 = x^2 + 2(6)x + 6^2$$

$$(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$(x + 6)^2 = 5^2 + 12(5) + 36$$

$$(x + 6)^2 = 25 + 60 + 36 = 121 \text{ m}^2$$



¡Comprobemos lo aprendido!



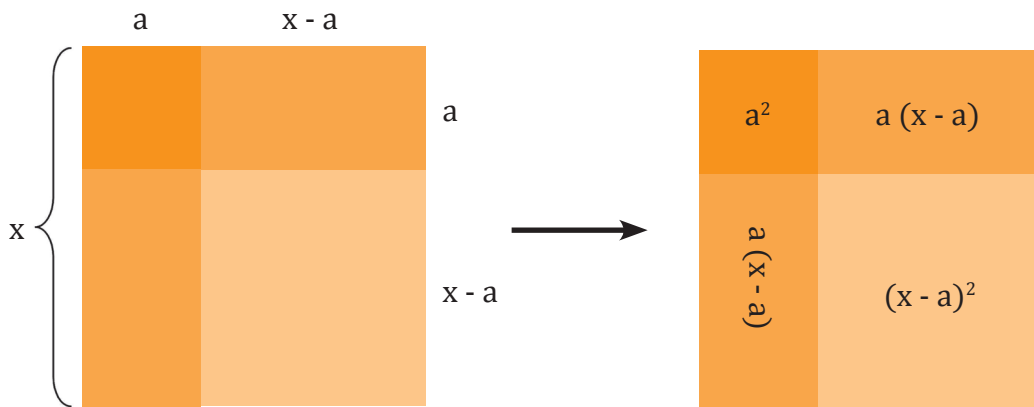
ACTIVIDADES

Efectuemos aplicando productos notables:

- $(x + 4)^2 =$
- $(3a + 5b)^2 =$
- $(p + 4q)^2 =$
- $(x + \sqrt{2})^2 =$
- $(2x^3 + 1)^2 =$

Demostremos ahora el cuadrado de la diferencia de un binomio

Construyamos un cuadrado de lado x y quitemos un cuadrado de lado a .



Comparemos el área de los dos cuadrados.

$$x^2 = (x - a)^2 + 2a(x - a) + a^2$$

$$x^2 = (x - a)^2 + 2ax - 2a^2 + a^2$$

$$x^2 = (x - a)^2 + 2ax - a^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2, \text{ luego: } (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

El cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

**EJEMPLO**

Efectuemos la siguiente operación: $(6x^3 - 2a)^2 =$

Solución:

Apliquemos la fórmula del cuadrado de la diferencia de un binomio

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ Sustituyendo los valores

$$(6x^3 - 2a)^2 = (6x^3)^2 - 2(6x^3)(2a) + (2a)^2$$

$$(6x^3 - 2a)^2 = 36x^6 - 24ax^3 + 4a^2$$

¡Comprobemos lo aprendido!

**ACTIVIDADES**

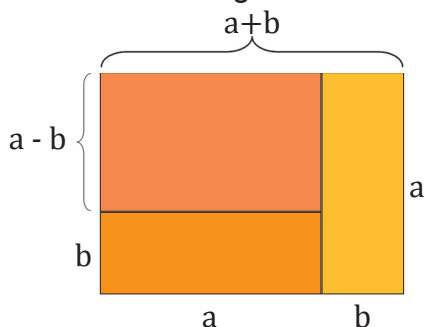
Efectuemos aplicando productos notables:

- $(2x - 4)^2 =$
- $(3a - 5b^2)^2 =$
- $(p - 4q)^2 =$
- $(2x - \sqrt{2})^2 =$
- $(x^3 - 1)^2 =$

Pasemos ahora a estudiar otro producto notable

5.2 Suma por la diferencia de binomios

Analicemos la figura:

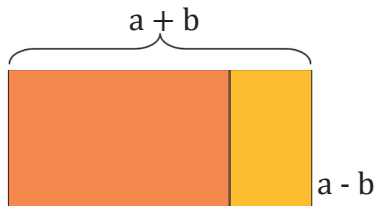


De este rectángulo recortemos un rectángulo de lado a y b (rectángulo gris)

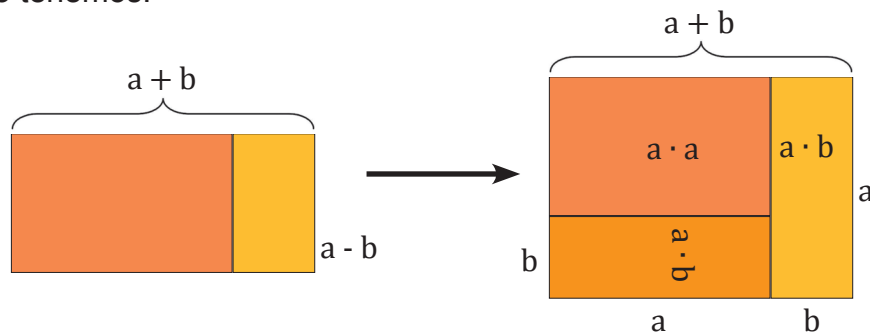


El área que estamos buscando es la del rectángulo con lados $a + b$ y $a - b$, es decir, debemos de restar a la figura anterior el área representada por el cuadrado de lado b

Entonces tenemos una figura como la siguiente:



Comparando tenemos:



$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 + b(a-b) - ab \\ &= a^2 + ab - b^2 - ab\end{aligned}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

El producto de la suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.



EJEMPLO

$$(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$$

$$(a + 6)(a - 6) = a^2 - (6)^2 = a^2 - 36$$

$$(5x^2 + 2y^3)(5x^2 - 2y^3) = (5x)^2 - (2y^3)^2 = 25x^2 - 4y^6$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Efectuemos aplicando productos notables:

- $(2x - 4)(2x + 4) =$
- $(3a + 5b^2)(3a - 5b^2) =$
- $(p + 4q)(p - 4q) =$
- $(2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2}) =$
- $(x^3 + 1)(x^3 - 1) =$

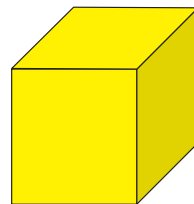
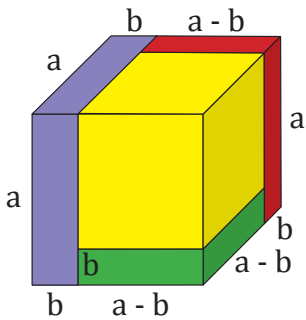
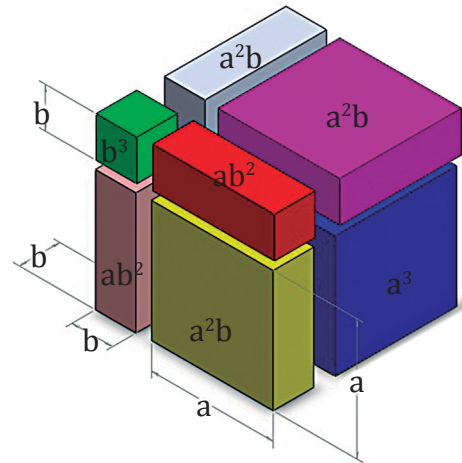
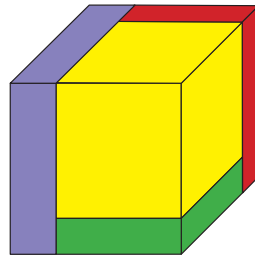
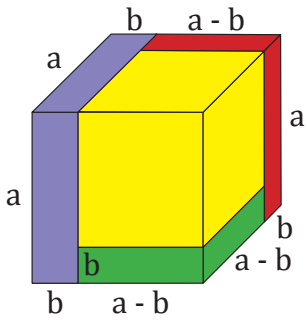
A continuación presentamos otros productos notables con sus respectivas fórmulas

5.3 Cubo de la suma y diferencia de dos términos

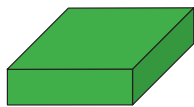
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Cubo del Binomio $(a - b)^3$



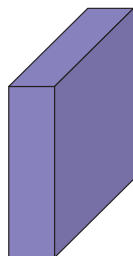
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



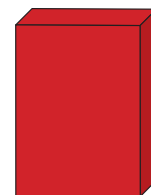
$$b(a - b)^2$$

$$b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$a^2b - 2ab^2 + b^3$$



$$a^2b$$



$$ab(a - b)$$

$$a^2b - ab^2$$



EJEMPLO

Efectuemos el producto notable: $(x^3 + 2a)^3 =$

Solución:

Apliquemos la fórmula del cubo de la suma de un binomio

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; Sustituyendo los valores

$$(x^3 + 2a)^3 = (x^3)^3 + 3(x^3)^2 (2a) + 3(x^3)(2a)^2 + (2a)^3$$

$$(x^3 + 2a)^3 = x^9 + 6ax^6 + 12a^2 x^3 + 8a^3$$



EJEMPLO

Efectuemos el producto notable: $(x^2 - 2a^2)^3 =$

Solución:

Apliquemos la fórmula del cubo de la diferencia de un binomio

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; Sustituyendo los valores

$$(x^2 - 2a^2)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 (2a^2) + 3(x^2) (2a^2)^2 - (2a^2)^3$$

$$(x^2 - 2a^2)^3 = x^6 - 6a^2 x^4 + 12a^4 x^2 - 8a^6$$

¡Comprobemos lo aprendido!

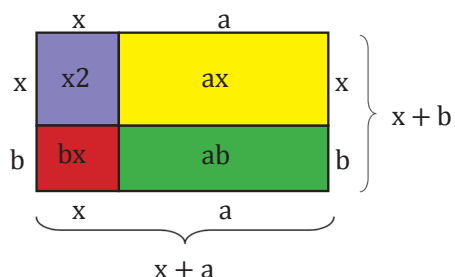


ACTIVIDADES

Efectuemos aplicando productos notables:

- $(2x - 4)^3 =$
- $(3a + 5b^2)^3 =$
- $(p - 4q)^3 =$
- $(2x - \sqrt{2})^3 =$
- $(x^3 + 5)^3 =$
- $(3m + 10n)^3 =$

5.4 Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ y $(ax+b)(cx+d)$



La característica de los binomios de esta forma, es que los términos de un binomio son semejantes a los términos del otro binomio

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más la suma de los no comunes por el término común, más el producto de los no comunes. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + b^2$



EJEMPLOS

Efectuemos las siguientes operaciones:

a. $(x + 7)(x + 3)$

Solución:

Aplicando la fórmula

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$(x + 7)(x + 3) = x^2 + (7 + 3)x + 7 \cdot 3$$

$$(x + 7)(x + 3) = x^2 + 10x + 21$$

b. $(x - 2)(x + 3)$

Solución:

Aplicando la fórmula

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + (-2 + 3)x + (-2) \cdot 3$$

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$$

c. $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$

Solución:

Aplicando la fórmula

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3) = (x^2)^2 + (-2 + (-3))x^2 + (-2) \cdot (-3)$$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^4 - 5x^2 + 6$$

Un caso especial en el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$

a. $(3x + 2)(2x + 3)$

Solución:

Aplicando la fórmula

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$(3x + 2)(2x + 3) = 3 \cdot 2x^2 + (3 \cdot 3 + 2 \cdot 2)x + 2 \cdot 3$$

$$(3x + 2)(2x + 3) = 6x^2 + (9 + 4)x + 6$$

$$(3x + 2)(2x + 3) = 6x^2 + 13x + 6$$

b. $(5x + 2)(x - 3)$

Solución:

Aplicando la fórmula

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$(5x + 2)(x - 3) = 5 \cdot 1x^2 + (5 \cdot (-3) + 2 \cdot 1)x + 2 \cdot (-3)$$

$$(5x + 2)(x - 3) = 5x^2 + (-15 + 2)x - 6$$

$$(5x + 2)(x - 3) = 5x^2 - 13x - 6$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Demos solución aplicando productos notables de acuerdo a las características.

- $(3x - 2)^2 =$
- $(3a + 2b^2)^2 =$
- $(2x + 4y)(2x - 4y) =$
- $(2ax - 4)^3 =$
- $(5x + 10y)^3 =$
- $(2x + 4)(x - 3) =$
- $(x + 10)(x - 12) =$

Ahora pasaremos al estudio de otro tema que es el proceso inverso al que acabamos de estudiar llamado factorización, no está sujeto a reglas, y depende bastante de las habilidades que vayamos adquiriendo.

Vamos iniciemos....

- Pensemos un número mayor que 10. Escribamos este número sobre la raya de la izquierda que está a continuación y completemos la suma indicada
- Ahora el número que pensamos escribámoslo sobre la raya de la izquierda que está a continuación y completemos correctamente operación indicada

$$\underline{\quad} = 7 + \underline{\quad}$$

↑ ↑
A estos números les llamamos sumandos

$$\underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$$

↑ ↑
A estos números les llamamos factores

Cuando un número se expresa de esta manera se dice que está factorizado. De esto nos ocuparemos a continuación, pero con polinomios

6 Factorización

Indicador de logro:

Establecer la relación entre factorización y productos notables aplicando correctamente sus procesos respectivos

Factorizar es transformar un polinomio en una multiplicación de dos o más factores.

6.1 Factor común monomio

En nuestro diario vivir, en la comunidad, en el aula de clase, entre otras muchas situaciones, siempre hay algo que tenemos en común. Por ejemplo en nuestra comunidad el líder comunal es común para todos los habitantes de la comunidad, en nuestra casa, nuestro papá, nuestra mamá es común para todos los hermanos, en el aula de clase todos tenemos un lápiz, un cuaderno, un facilitador/a. esto se vuelve un factor común para todos los estudiantes.

Desde el punto de vista matemático

Un factor común es el monomio que está contenido en todos los términos del polinomio. Este es igual al M.C.D. de los coeficientes y las **variables comunes elevadas a su menor exponente**.

Estos dos resultados los multiplicamos y los colocamos al exterior de un paréntesis, en cuyo interior queda el cociente de dividir cada término por el producto hallado.



EJEMPLO

Factoricemos: $8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2z$

Solución:

- Busquemos el MCD de los coeficientes:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 10 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & \end{array}$$

$$\text{MCD}(8, 6, 10) = 2$$

- Encontremos las variables comunes con su menor exponente:

El menor exponente con que aparecen x e y es 1 y 1 respectivamente. Entonces el factor común es $2xy$.

- Encontramos el cociente de dividir cada término por el factor común hallado

$$8x^2y \div 2xy = 4x$$

$$6x^3yz \div 2xy = 3x^2z$$

$$10xy^2z \div 2xy = 5yz$$

Por lo tanto, la factorización será:

$$8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2z = 2xy(4x + 3x^2z - 5yz)$$



EJEMPLO

Factoricemos: $12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3$

Solución:

- Busquemos el MCD de los coeficientes:

| | | | | |
|----|----|---|---|---|
| 12 | 15 | 6 | 9 | 3 |
| 4 | 5 | 2 | 3 | |

$$\text{MCD}(12, 15, 6, 9) = 3$$

- Encontramos las variables comunes con su menor exponente:

El menor exponente con que aparecen x, y y z es 2, 1 y 3 respectivamente. Entonces el factor común es $3x^2yz^3$

- Encontramos el cociente de dividir cada término por el producto hallado

$$12x^3y^2z^3 \div 3x^2yz^3 = 4xy$$

$$15x^2yz^3 \div 3x^2yz^3 = 5$$

$$6x^2y^3z^4 \div 3x^2yz^3 = 2y^2z$$

$$9x^3y^5z^3 \div 3x^2yz^3 = 3xy^4$$

Por lo tanto, el resultado de la factorización será:

$$12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3 = 3x^2yz^3(4xy - 5 - 2y^2z + 3xy^4)$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Factoricemos:

1. $6x^2y^3 + 24xy^4$

2. $3a^3bc^3 + 2abc - 5a^4b^2c$

3. $12x^2y + 18xy - 24xy^3$

4. $36x^4 - 48x^6 - 72x^3 + 60x^5$

6.2 Factor común polinomio

Consiste en identificar el factor común para luego aplicar la propiedad distributiva como en el caso anterior.



EJEMPLO

Factoricemos: $3a(x - 2y) + 5b^2(x - 2y) = (x - 2y)(3a + 5b^2)$

FACTOR COMÚN

Dividimos

$$3a(x - 2y) \div (x - 2y) = 3a$$

$$5b^2(x - 2y) \div (x - 2y) = 5b^2$$



EJEMPLO

Factoricemos: $3a(2m + 3n) + 2m + 3n = (2m + 3n)(3a + 1)$

FACTOR COMÚN

Dividimos

$$3a(2m + 3n) \div (2m + 3n) = 3a$$

$$(2m + 3n) \div (2m + 3n) = 1$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Factoricemos:

- $4x^2(y - 1) - 9(y - 1)$

- $3x(8m + 3n) + (8m + 3n)$

- $x + 2y - 5z(x + 2y)$

- $xy^2(2 - a) - x^2y(2 - a)$

- $17ax - 17mx + 3ay - 3my + 7az - 7mz$

- $6x^3 - 9x^2 + 4x - 6$

- $x^3 + x^2 + x + 1$

- $3m^2n + 6mn - 18mn^2 + 24m^5n^4 - 12m^3n^4$

6.3 Diferencia de cuadrados

Siempre aparecerán dos términos que tienen raíces cuadradas exactas separados por el signo menos.

La diferencia de cuadrados es igual a la multiplicación de la suma de los términos por la diferencia de los mismos (términos).

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



EJEMPLO

Factoricemos $x^2 - 49$

Solución:

$x^2 - 49$ Reexpresemos el segundo término

$x^2 - 49 = x^2 - 7^2$ Aplicando la fórmula

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$



EJEMPLO

Factoricemos $25x^2 - y^4$

Solución:

Reexpresemos los términos

$25x^2 - y^4 = (5x)^2 - (y^2)^2$ Aplicando la fórmula

$$25x^2 - y^4 = (5x + y^2)(5x - y^2)$$



EJEMPLO

Factoricemos $81x^4 - 36y^6$

$$81x^4 - 36y^6 = (9x^2)^2 - (6y^3)^2$$

$$81x^4 - 36y^6 = (9x^2 + 6y^3)(9x^2 - 6y^3)$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Factoricemos:

- $49x^2 - 9$
- $64 - x^2$
- $a^4 - b^4$
- $16 - 4x^2$
- $36m^8 - 81n^6$
- $36x^2 - a^6b^4$
- $x^4 - 25$
- $x^2 - \frac{100}{49}$
- $a^2 - 121b^2$
- $16m^4 - 49n^4$

6.4 Suma y diferencia de cubos

La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



EJEMPLO

Factoricemos $8x^3 - 27$

Solución:

$8x^3 + 27$; Expresemos los términos extrayendo raíz cúbica

$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3$ Aplicando la fórmula

$8x^3 + 27 = (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + 3^2]$

$8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$



EJEMPLO

Factoricemos $64m^3 - 125n^6$

Solución:

$64m^3 - 125n^6$; Expresemos los términos extrayendo raíz cúbica

$64m^3 - 125n^6 = (4m)^3 - (5n^2)^3$ Aplicando la fórmula

$64m^3 - 125n^6 = (4m - 5n^2)[(4m)^2 + (4m)(5n^2) + (5n^2)^2]$

$64m^3 - 125n^6 = (4m - 5n^2)(16m^2 + 20mn^2 + 25n^4)$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Factoricemos:

- $x^3 - 8$
- $64 + x^9$
- $64a^6 - 27b^3$
- $16 - 125x^3$
- $8m^3 + n^6$
- $27a^3 - 8b^6$
- $64m^3 - 125r^3$
- $8x^3 + 729a^3$
- $x^3y^6 + 64b^3$
- $512x^6 + 1000y^6$

6.5 Trinomio cuadrado perfecto

Una expresión se denomina trinomio cuadrado perfecto cuando consta de tres términos donde el primero y tercer términos son cuadrados perfectos (tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Para factorizar se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado se eleva al cuadrado.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a + b)^2$$



EJEMPLO

Factoricemos $x^2 + 2x + 1$

Solución:

- Comprobemos que es un trinomio cuadrado perfecto, para ello extraemos raíz cuadrada a los términos primero y tercero y comprobamos que estas raíces multiplicadas por dos es igual al segundo término

$$\begin{array}{ccc} x^2 & + & 2x & + & 1 \\ \downarrow \sqrt{x^2} & & \uparrow & & \downarrow \sqrt{1} \\ x & & 2(x)(1) & & 1 \end{array}$$

- Luego $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$



EJEMPLO

Factoricemos $4x^2 - 12x + 9$

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & - & 12x & + & 9 \\ \downarrow \sqrt{4x^2} & & \uparrow & & \downarrow \sqrt{9} \\ 2x & & 2(2x)(3) & & 3 \end{array}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$



EJEMPLO

Factoricemos $9a^2 + 12ab + 4b^2$

$$\begin{array}{ccc} 9a^2 & + & 12ab & + & 4b^2 \\ \downarrow \sqrt{9a^2} & & \uparrow & & \downarrow \sqrt{4b^2} \\ 3a & & 2(3a)(2b) & & 2b \end{array}$$

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)^2$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Factoricemos:

- $x^2 - 4xy + y^2$
- $64 + 16x + x^2$
- $4a^2 - 12ab + 9b^2$
- $16m^2 + 40mn + 25n^2$
- $25m^2 + 130mn + 169n^2$
- $s^2 + 4s + 4$
- $484 - 88w + 4w^2$
- $4a^2 - 12ab + ab^2$

6.6 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ ó $ax^2 + bx + c$

Para factorizar el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ seguiremos los siguientes pasos:

- Se descompone en dos factores haciendo uso de paréntesis, escribiendo en cada uno de ellos la raíz cuadrada del primer término.
- Se escribe el signo en cada paréntesis el cual se hace de la manera siguiente:
 - a. El signo que le corresponde al primer paréntesis es el mismo que tiene el segundo término del trinomio.
 - b. El signo correspondiente al segundo paréntesis es el resultado de la multiplicación de los signos del segundo y el tercer término del trinomio.
 - c. Se escribe el segundo término de los paréntesis, de acuerdo a los dos signos encontrados en el paso anterior, los cuales se hacen con los criterios siguientes:
 - d. Se buscan dos números que multiplicados den el tercer término, el término independiente o "c"; y que sumados den el segundo término.
 - e. Estos dos números encontrados serán los segundos valores de los binomios.

**EJEMPLO**

Factoricemos $x^2 + 2x - 15$

Solución:

- Obtenemos la raíz del término cuadrático y la colocamos en los paréntesis $(x \quad)(x \quad)$
- Colocamos en el primer paréntesis el signo +, que corresponde al signo del segundo término del ejercicio dado y en el segundo paréntesis escribimos el signo menos que es el producto de los signos del segundo y tercer término $(+ \cdot - = -)$

$$(x + \quad)(x - \quad)$$

- Buscamos dos números que multiplicados den -15 y restados den +2; esos números son: 5 y -3.
- Estos números se colocan en el paréntesis correspondiente: $(x+5)(x-3)$

6.7 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este tipo de trinomio el exponente del término cuadrático es diferente de 1 y el exponente del literal del segundo término es 1.

Para factorizar este tipo de trinomios procedemos de la manera siguiente:

- Multiplicamos el tercer término por el coeficiente del primer término.
- Buscamos dos números que multiplicados den el nuevo término y sumados den el coeficiente del segundo término del trinomio original.
- Colocamos en los paréntesis la forma completa de x^2 sin elevarlo al cuadrado y como segundo término de cada factor los números descubiertos en el paso anterior
- Para finalizar dividimos ambos factores por el coeficiente del primer término o " x^2 "



EJEMPLO

Factoricemos: $4x^2 + 8x + 3$

Solución:

- Multiplicamos el tercer término por el coeficiente del primer término. (4)

$$4x^2 + 8x + 3(4)$$

$$4x^2 + 8x + 12$$

- Buscamos dos números que multiplicados den el nuevo término y sumados den el coeficiente del segundo término del trinomio original; es decir, buscamos dos números que multiplicados den 12 y sumados 8:

$$6 \cdot 2 = 12 \quad 6 + 2 = 8$$

Los números buscados son 6 y 2

- Colocamos en los paréntesis la forma completa de x^2 sin elevarlo al cuadrado y como segundo término de cada factor los números descubiertos en el paso anterior

$$(4x + 6)(4x + 2)$$

- Para finalizar dividimos ambos factores por el coeficiente del primer término (4)

$$\frac{(4x + 6)(4x + 2)}{4} = \frac{2(2x + 3)2(2x + 1)}{4} = (2x + 3)(2x + 1)$$

Esta es la factorización del trinomio original.



EJEMPLO

Factoricemos: $3x^2 - 5x - 2$

Solución:

- Multiplicamos el último término por 3.

$$3x^2 - 5x - 6$$

- Utilizamos paréntesis para escribir como primer término $3x$ y en el primer paréntesis escribimos el signo del segundo término y en el segundo el producto de los dos signos ($- \cdot - = +$)

$$(3x - \quad)(3x + \quad)$$

- Buscamos dos números que multiplicados den -6 y restados de -5 . Estos números son -6 y $+1$.

$$(3x - 6)(3x + 1)$$

- Para finalizar dividimos ambos factores por el coeficiente del primer término (3)

$$\frac{(3x - 6)(3x + 1)}{3} = \frac{3(x - 2)(3x + 1)}{3} = (x - 2)(3x + 1)$$

Otra forma de factorizar los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ ó $ax^2 + bx + c$.

Método de Aspa Simple

Resolvamos el ejemplo anterior siguiendo los siguientes pasos:

$$3x^2 - 5x - 2$$

1. Descomponemos en sus factores los números de los extremos del trinomio.

$$\begin{array}{cc} 1x & -2 \\ 3x & +1 \end{array}$$

2. Esos números que pusimos los multiplicamos en forma cruzada y ponemos los resultado al costado y sumamos.

$$\begin{array}{ccc} 1x & -2 & 1x \\ 3x & +1 & -6x \\ \hline & & -5x \end{array}$$

3. Fijémonos que la suma (resta) debe ser igual al segundo término del trinomio (-5x). Si no lo es, entonces debes cambiar los números que hemos puestos, o si no cambiamos sus signos o hacer ambas cosas a la vez.

4. En este caso nos dio el número buscado

5. Agrupamos como factores los números que están en forma horizontal

$$(x - 2)(3x + 1)$$

Entonces,

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Factoricemos:

- $x^2 - 5x - 6$
- $4x^2 - 12x + 5$
- $x^2 + 7x + 12$
- $6x^2 - 7x - 20$
- $12x^2 - 8x - 15$
- $3m^2 + 8m + 5$
- $13y^2 - 7y - 6$
- $21m^2 + 11m - 2$
- $30x^2 + 17pq - 21q^2$
- $z^2 + 8z + 15$
- $x^2 + 10x + 24$
- $a^2 - 2a - 24$
- $x^2 - 21x + 98$
- $a^2 + 7a + 10$
- $y^2 - 3y - 4$
- $m^2 + 19m + 48$
- $x^2 + 5x + 4$
- $h^2 - 27h + 50$
- $5x^2 + 11x + 2$
- $5c^2 + 11cd + 2d^2$
- $6a^2 - 5a - 21$
- $7p^2 + 13p - 2$
- $8x^2 - 14x + 3$
- $3m^2 - 7m - 20$
- $2x^2 - 17x + 15$

7 Operaciones con fracciones algebraicas

Indicador de logro:

Realiza operaciones con fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una expresión fraccionaria en la que numerador y denominador son polinomios.

Son fracciones algebraicas:

$$\frac{2}{x+1}; \frac{x-1}{x^2}; \frac{3x^2-5x+6}{2x^2+7}$$

Las fracciones algebraicas tienen un comportamiento similar a las fracciones numéricas.

El valor de una fracción **no se altera** si se multiplican o dividen el numerador y denominador por una misma cantidad. Esta cantidad debe ser distinta de cero.



EJEMPLO

Si $\frac{x-1}{x^2}$ se multiplica por $x+2$ en su numerador y denominador resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{(x+2)}{(x+2)} &= \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x+2)} \\ &= \frac{x^2+2x-x-2}{x^3+2x^2} \\ &= \frac{x^2-x-2}{x^3+2x^2} \end{aligned}$$

Se recomienda hacer las operaciones con calma y mucha concentración ya que son frecuentes los errores de signos y los errores en el uso incorrecto de paréntesis.

7.1 Simplificación de fracciones algebraicas

La simplificación de fracciones algebraicas es objeto de frecuentes errores, pero se simplifican igual que las fracciones ordinarias: dividiendo el numerador y el denominador por factores comunes. Entonces, la clave está en el factor común.

Para simplificar al máximo habrá que factorizar los polinomios numerador y denominador.

Por ejemplo, simplificar:

$$\frac{4x(x-2)^2}{8x^2(x-2)} = \frac{4 \cdot x \cdot (x-2)(x-2)}{4 \cdot 2 \cdot x \cdot x(x-2)} = \frac{x-2}{2x}$$

Otro ejemplo, simplificar la fracción

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$

Primero, factorizamos los polinomios del numerador y del denominador. En este caso tenemos el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, tanto en el numerador como en el denominador.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \frac{(x-1)}{(x+3)}$$

Como vemos, simplificar (o reducir) una fracción algebraica consiste en transformarla a otra equivalente cuya particularidad es ser irreducible (se puede simplificar sólo hasta un cierto nivel).

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Simplifiquemos las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x}$

9. $\frac{15a^2bn - 45a^2bm}{10a^2b^2n - 30a^2b^2m}$

2. $\frac{x^2 - 3x}{3 - x}$

10. $\frac{x^2 - 4}{5ax - 10a}$

3. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$

11. $\frac{3x^2 + 9x^2}{x^2 + 6x + 9}$

4. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2}$

12. $\frac{9x^2 + 30x + 25}{6x + 10}$

5. $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

13. $\frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$

6. $\frac{x+3}{x^3-27}$

14. $\frac{24x - 18y}{44x - 33y}$

7. $\frac{2x^2 + 4xy}{8xy + 16y^2}$

15. $\frac{m^3 - n^3}{5m^2 + 5mn + 5n^2}$

8. $\frac{(x-y)(x+y)^2}{x^2 - xy}$

16. $\frac{4p + 2q}{8p^2 + 8pq + 2q^2}$

7.2 Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar y restar procederemos de forma similar a como lo hacemos con fracciones de números enteros, reduciendo primero a común denominador.

Igual como ocurre con las fracciones de números enteros, la suma y resta de fracciones algebraicas puede ser con fracciones de igual denominador o de distinto denominador.

Suma y resta de fracciones algebraicas con igual denominador

Veamos el siguiente ejemplo de suma y resta:

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(2x-1)+(x-1)-x}{x+1}$$

Como el denominador es común $(x+1)$, este se ha unificado en una sola fracción, que ahora tiene como numerador a todas las cantidades que eran numeradores en las fracciones que estamos sumando y restando.

Tengamos cuidado de escribir entre paréntesis dichas cantidades cuando no son monomios, para no confundir luego los signos.

Ahora sacamos los paréntesis teniendo cuidado de cambiar el signo interior cuando delante del paréntesis hay un signo menos $(-)$, y nos queda

$$\frac{2x-1+x-1-x}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

Hicimos las operaciones posibles y llegamos al resultado.

Suma y resta de fracciones algebraicas con distinto denominador

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{2}{5ab} - \frac{1}{a^2} - \frac{4}{15b^2}$$

Tal como lo hacíamos al sumar o restar fracciones de números enteros, utilizando el mínimo común múltiplo las fracciones con distintos denominadores se transforman en fracciones equivalentes con denominador común.

Entonces, ¿qué debemos hacer?

Encontramos el MCM de los coeficientes (números), tal como lo hacíamos para número enteros, las variables que se repiten las escribimos una sola vez con el máximo exponente y las que no se repiten las escribimos todas.

En nuestro caso, el **MCM de 5, 1 y 15 es**

| | | | | |
|---|---|----|---|---------------------|
| 5 | 1 | 15 | 3 | $3 \cdot 5 = 15$ |
| 5 | 1 | 5 | 5 | |
| 1 | 1 | 1 | | MCM (5, 1, 15) = 15 |

Las variables con mayores exponentes son: $a^2 b^2$

Entonces el Mínimo Común Múltiplo denominador es $15 a^2 b^2$

A continuación operamos con fracciones con denominador común:

Previamente, dividimos el denominador común $15a^2b^2$ por cada uno de los denominadores individuales, para conocer la cifra o valor que se multiplica por cada uno de los numeradores, y lo hacemos así:

$$\frac{15a^2b^2}{5ab} = 3ab$$

$$\frac{15a^2b^2}{a^2} = 15b^2$$

$$\frac{15a^2b^2}{15b^2} = a^2$$

Y hacemos

$$\frac{2}{5ab} - \frac{1}{a^2} - \frac{4}{15b^2} = \frac{2(3ab) - 1(15b^2) - 4(a^2)}{15a^2b^2} = \frac{6ab - 15b^2 - 4a^2}{15a^2b^2}$$

Esta es la forma tradicional de operar cuando hemos hallado el Mínimo Común Múltiplo Denominador.

Pero también hay otra, como la siguiente:

Encontrado el MCMD $15a^2b^2$ se multiplica cada fracción tanto en el numerador y denominador por un factor que haya cada denominador igual a $15a^2b^2$.

$$\frac{6ab}{5ab(3ab)} - \frac{15b^2}{15a^2b^2} - \frac{4a^2}{15a^2b^2} = \frac{6ab - 15b^2 - 4a^2}{15a^2b^2}$$

Notemos que “los términos que faltan” se obtienen haciendo la misma división del caso anterior.



EJEMPLO

Sumar $\frac{2}{x+3} + \frac{5}{x}$

El MCD de los denominadores, o mínimo común denominador es $x(x+3)$

Hacemos:

$$\frac{x(x+3)}{x+3} = x$$

$$\frac{x(x+3)}{x} = x+3$$

Por lo tanto

$$\frac{2}{x+3} + \frac{5}{x} = \frac{2x + 5(x+3)}{x(x+3)} = \frac{2x + 5x + 15}{x(x+3)} = \frac{7x + 15}{x(x+3)}$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Realicemos las siguientes operaciones algebraicas:

1. $\frac{1}{x+1} + \frac{1x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$

9. $\frac{m-2}{2m} + \frac{3m-1}{5m}$

2. $\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$

10. $\frac{m}{m+4} + \frac{7m}{m^2+m-12}$

3. $\frac{1}{x^2-x} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x-1}{x}$

11. $\frac{2x}{y} - \frac{x^2}{xy-y^2} + \frac{y}{x-y}$

4. $\frac{2x+4}{x+4} - \frac{2x-14}{x-5}$

12. $\frac{y(x+y)}{x^2-y^2} - \frac{x}{x-y}$

5. $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-3}$

6. $\frac{x-2}{x+3} - \frac{1}{x^2-9}$

7. $\frac{1}{x+2} - \frac{x-2}{x^2+4x+4} - \frac{x-1}{x^3+6x^2+12x+8}$

8. $\frac{x^2-x}{x^2-1} + \frac{x-2}{x+1}$

7.3 Producto (multiplicación) de fracciones algebraicas

Para multiplicar fracciones algebraicas procederemos igual como lo hacemos con fracciones aritméticas, multiplicando los numeradores y los denominadores, aunque antes de multiplicar debemos simplificar, si se puede.

Veamos qué significa esto:

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción algebraica cualquiera que está multiplicada por otra $\frac{c}{d}$, entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Veamos ahora ejemplos de multiplicación (producto) de fracciones algebraicas

Multiplicar

$$\frac{2x}{x+3} \cdot \frac{5x+3}{x^2}$$

Anotamos la multiplicación de los numeradores y de los denominadores:

$$\frac{2x(5x+3)}{(x+3)x^2} =$$

Simplificamos antes de efectuar el producto:

$$\frac{2x(5x+3)}{(x+3)x^2} = \frac{2(5x+3)}{(x+3)x}$$

Ahora, podemos multiplicar los factores finales:

$$\frac{10x+6}{x^2+3x}$$

$$\frac{2x}{x+3} \cdot \frac{5x+3}{x^2} = \frac{2(5x+3)}{(x+3)x} = \frac{10x+6}{x^2+3x}$$



EJEMPLO

$$\frac{x+3}{x-2} \cdot \frac{x^2+2x-8}{x^2-9} = \frac{x+3}{x-2} \cdot \frac{(x+4)(x-2)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+4}{x-3}$$

Importante: Como hemos observado es necesario dominar la factorización de productos notables.

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Realicemos las siguientes operaciones algebraicas:

$$1. \frac{3a^2b^3c}{2x^4y^2} \cdot \frac{6x^3yz^4}{9a^2b^3c^4} \cdot \frac{2x^3y^3}{4a^3b^3}$$

$$6. \frac{x-2}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-6} \cdot \frac{3}{5}$$

$$2. \frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

$$7. \frac{x^2-x-6}{x^2-5x-14} \cdot \frac{x^2-3x-28}{x^2-3x+15}$$

$$3. \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$$

$$8. \frac{x^2+5+6}{x-1} \cdot \frac{2x+2}{3x+9}$$

$$4. \frac{x^2-6x+9}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$$

$$9. \frac{x^2-2x-3}{x^2-8x+15} \cdot \frac{x^2+x-30}{x^2+5x-6}$$

$$5. \frac{m^2-5m+6}{m^2-9} \cdot \frac{7m+21}{7m^2-7}$$

$$10. \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{6x+6y}{2x^2+2xy+2y^2}$$

7.4 Cociente o división de fracciones algebraicas

Para dividir fracciones algebraicas procederemos igual como lo hacemos con fracciones, haciendo el producto cruzado de numeradores y denominadores, aunque antes de multiplicar debemos simplificar, si se puede.

Veamos, ahora qué significa esto:

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción algebraica cualquiera que está dividida por otra $\frac{c}{d}$, entonces:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Veamos ahora ejemplos de división (cociente) de fracciones algebraicas

Dividamos $\frac{4m^2}{5} \div \frac{2m}{15}$

$$\frac{4m^2}{5} \div \frac{2m}{15} = \frac{4m^2}{5} \cdot \frac{15}{2m} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot m \cdot m)(3 \cdot 5)}{5 \cdot 2m} = 6m$$

Dividamos $\frac{x^2+2x}{x^2-5x+6} \div \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

$$\frac{x(x+2)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x}{x-3}$$

Dividamos $\frac{2x}{x+1} \div \frac{x^2}{x^2-4}$

$$\frac{2x}{x+1} \div \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x^2} = \frac{2(x-2)}{x(x+1)} = \frac{2x-4}{x^2+x}$$

¡Comprobemos lo aprendido!



ACTIVIDADES

Realicemos las siguientes operaciones algebraicas:

1. $\frac{2}{x+y} \div \frac{4}{x^2-y^2}$

5. $\frac{m^2+8m+16}{m^2+2m-8} \div \frac{m^2-2m-3}{m^2-3m+2}$

2. $\frac{3x^3-3x}{x-y} \div \frac{x+1}{3}$

6. $\frac{x^3-y^3}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

3. $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x} \div \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$

7. $\frac{x^3-x}{x+1} \div \frac{x-1}{x+1}$

4. $\frac{m^2+3m+2}{m^2-4} \div \frac{7m+21}{7m^2-28}$

8. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

AUTOEVALUACIÓN

Lea y analice cada una de las siguientes afirmaciones y encierre el inciso que corresponde a la respuesta correcta

1. Si $4x - y = 10$, entonces cuando $x = -2$, se tiene que $a + b =$ equivale a:

- a) -20 b) -18 c) -16 d) -4 e) 16

2. La expresión algebraica que corresponde al enunciado "El cociente de la suma de dos números entre la diferencia de los mismos" es:

- a) $\frac{(a+b)}{(c-d)}$ b) $\frac{(a-b)}{(c+d)}$ c) $\frac{(a+b)}{(a+b)}$ d) $\frac{(a+b)}{(a-b)}$

3. Al restar la expresión $a - 2$ de a , se obtiene:

- a) 2 b) -2 c) $1 - 2a$ d) $2a - 1$ e) $-2a$

III UNIDAD

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN LA VIDA RURAL

Desempeños de Aprendizaje

Resuelve problemas de su entorno, utilizando las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales de 2 por 2.

Ejes Transversales

Muestra conductas positivas de: liderazgo, comunicación efectiva, manejo de emociones y conflictos, pensamiento crítico y creativo para enfrentar las situaciones de la vida cotidiana.



1

Igualdad

Indicador de Logro:

Resuelve problemas de su comunidad que impliquen el uso de las ecuaciones lineales.

INTRODUCCIÓN:

Sabemos que en nuestro entorno existen personas que por naturaleza son líderes. Un líder es la persona que tiene la capacidad de comunicarse con un grupo, influir en sus emociones para que este equipo trabaje con entusiasmo, en el logro de metas y objetivos.

Por ejemplo, el Presidente de Nicaragua es un líder Nacional, el representante de los estudiantes de Educación Secundaria es un líder estudiantil, entre otros. Algo importante es que un líder puede ser un hombre o una mujer, existe igualdad de oportunidades para desempeñar este papel.



Existen diferentes formas de igualdad, dependiendo de las personas y de la situación social particular. Por ejemplo, la igualdad entre personas de diferente sexo, igualdad entre personas de distintas razas o la igualdad de diferentes razas respecto a derechos de tránsito, de uso de transportes públicos o de acceso a la educación.

Sabemos que en nuestro entorno encontramos personas y objetos que si los comparamos son iguales. Todas las personas somos iguales, lo que nos diferencia son los conocimientos que poseemos.

**EJEMPLO**

Si en un autobús cada persona ocupa un asiento de modo que no queda ningún asiento vacío, ni ninguna persona de pie, ambos conjuntos están ordenados, luego si a es el número que representa el conjunto de personas y b el número que representa el conjunto de asientos, tendremos que los números a y b son iguales (o son el mismo número), lo que se expresa por la notación:

$$a = b \text{ y se lee a igual a b}$$

La expresión $a = b$ es una igualdad en la cual a que está a la izquierda del signo $=$ es el primer miembro y b que está a la derecha del signo $=$ es el segundo miembro

En matemáticas, dos objetos matemáticos son considerados **iguales** si los objetos poseen el mismo valor.

Por ejemplo, la frase "la suma de dos y dos" y la expresión "cuatro" se refieren al mismo objeto matemático, un número natural. La expresión "es igual a" o "es lo mismo que" se suele representar en matemáticas con el signo " $=$ ".

Una igualdad es la expresión donde dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

**EJEMPLO**

$$a = a + b$$

$$3x^2 = 4x + 15$$

1.1 Ecuación

Una ecuación es una proposición matemática de igualdad. Una ecuación debe contener un signo igual y una expresión matemática a cada lado del signo igual.

En otras palabras podemos afirmar que:

Una ecuación es un enunciado de que dos cantidades o expresiones son iguales. Se emplean las ecuaciones siempre que se usan números reales.

Por ejemplo, si utilizamos la ecuación:

$$d = rt, \text{ lo que es igual a: distancia recorrida} = (\text{rapidez})(\text{tiempo})$$

Para resolver problemas en las que un objeto se mueve a rapidez o velocidad constante.



EJEMPLO

Si un tractor se desplaza con una rapidez (velocidad) de 20 km/h (kilómetros por hora), entonces la distancia d , recorrida en kilómetros en el tiempo t (en horas), se expresa por: $d = 20t$

Supongamos que el tractor se desplaza a una velocidad constante de 20 km/h y el tiempo que dedicó para la preparación de la tierra fueron 2 horas. ¿Cuál fue la distancia que recorrió?



La distancia recorrida es $d = 20t$, sustituyendo $t = 2$ h resulta: $d = 20(2) = 40$ Km.

Si deseamos calcular cuánto tiempo necesita el tractor para recorrer 75 km, se establece que $d = 75$ y se resuelve la ecuación: $75 = 20t$ o equivalentemente a:

$20t = 75$ Dividiendo entre 20 ambos lados de la última ecuación

$\frac{20t}{20} = \frac{75}{20}$ Resolviendo el cociente

$t = 3,75$ Convirtiendo a horas y minutos, tendremos:

$t = 3$ horas y 45 minutos

Por lo tanto, si $r = 20$ km/h, entonces el tiempo necesario para recorrer 75 kilómetros es 3,75 horas, o sea, 3 horas y 45 minutos.

Observamos que la ecuación $d = rt$ tiene tres variables: d , r y t . En forma general podemos afirmar que las variables se representan por las últimas letras del alfabeto: x , y , z , u , v , entre otras. Ahora analicemos las tres propiedades de la igualdad.

1.2 Propiedades de la igualdad

Propiedad reflexiva

Propiedad simétrica

Propiedad transitiva

Definición: Para todos los números reales a , b y c :

1 $a = a$; Propiedad Reflexiva

2 Si $a = b$, entonces $b = a$; Propiedad Simétrica

3 Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$; Propiedad Transitiva



EJEMPLO

Propiedad reflexiva

a. $7 = 7$

b. $x + 5 = x + 5$



EJEMPLO

Propiedad simétrica

a. Si $x = 3$, entonces $3 = x$

b. Si $y = x + 9$, entonces $x + 9 = y$



EJEMPLO

Propiedad transitiva

a. Si $x = a$ y $a = 4y$, entonces $x = 4y$

b. Si $a + b = c$ y $c = 4d$, entonces $a + b = 4d$

¿Es lo mismo decir una igualdad es igual a una ecuación?

Un enunciado en el que dos expresiones (iguales o distintas) denotan el mismo objeto se llama una ecuación o una igualdad matemática. Un ejemplo de ecuación sería "dos más dos es lo mismo que cuatro", que se suele escribir así: $2 + 2 = 4$

A continuación se presentan actividades donde aplicaremos los conocimientos adquiridos en este tema que hemos presentado.



ACTIVIDADES

Leamos, analicemos y copiemos en el cuaderno la solución de los ejercicios sobre igualdad y propiedades de las ecuaciones

I. Sabemos que existen diferentes formas de igualdad dependiendo de las que personas y de la situación social particular. Redactemos cuatro ejemplos del entorno:

1. _____ 2. _____

3. _____ 4. _____

II. Hemos definido que una igualdad es la expresión donde dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor. Presente ejemplos de expresiones que cumplan la definición.

1. _____ 2. _____

3. _____ 4. _____

III. Escriba a la par de cada expresión la propiedad que la justifica

1. $x + 0,05 = x + 0,05$ _____

2. Si $z = 5$ entonces $5 = z$ _____

3. Si $a = b + 5$ entonces $b + 5 = a$ _____

4. $100 = 100$ _____

5. Si $x = z$ y $z = 15y$ entonces $x = 15y$ _____
6. Si $2a + b = c$ y $c = d + 5e$ entonces $2a + b = d + 5e$ _____
7. Si $m = \sqrt{m^2}$ entonces $\sqrt{m^2} = m$ _____
8. Si $d = 2r$ entonces $2r = d$ _____
9. $12 m = 12 m$ _____
10. Si $2\pi = 6,28$ entonces $6,28 = 2\pi$ _____

2 Ecuación lineal

Indicador de Logro:

Resuelve problemas de su comunidad que impliquen el uso de las ecuaciones lineales.

2.1 Definición de ecuación lineal

La Industria Avícola de Nicaragua en un estudio de mercado informó que las exportaciones que realiza la avicultura, son de un promedio de US\$0,50 millones por años de aves. ¿Cuántos millones de dólares se obtendrán en un periodo de cinco años?

Como las exportaciones que realiza la avicultura son de un promedio de US\$0,50 millones por años de aves, entonces debemos definir los años con la variable t y las exportaciones con la variable E , esto se escribe $E = 0,50t$, lo que es equivalente a expresar:

Exportaciones = US\$0,50 (tiempo en años)

La ecuación que resulta es $E = 0,50t = 0,50(5) = 2,50$

Por lo tanto, de las exportaciones avícolas se obtendrán US\$2,50 millones de dólares en un periodo de cinco años.



Una ecuación lineal es una ecuación que se puede escribir de la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$.

A continuación se presentan ejemplos de ecuaciones lineales:



EJEMPLO

a. $3x - 2 = 10$

b. $-2x + 3 = 12$

c. $\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$

2.2 Clasificación

Estudiaremos la clasificación de las ecuaciones y describiremos cada una de ellas:

- 1 Por el número de incógnitas
- 2 Por el grado de la incógnita
- 3 Por el número de términos
- 4 De acuerdo al conjunto solución

a. Por el número de incógnitas

Las ecuaciones pueden tener una o más incógnitas. Seguidamente, se presentan algunos ejemplos:

La ecuación $3x + 4 = 10$ sólo tiene una incógnita.

La ecuación $3x - y = 5$ tiene dos incógnitas.

La ecuación $5xy + 3x^2 + z = 8$ tiene tres incógnitas.

b. Por el grado de la incógnita

Las ecuaciones de una incógnita se pueden clasificar por el grado de la incógnita (el grado es el exponente más alto de la incógnita).

Si el exponente más alto es uno entonces la ecuación es de primer grado.

Si el exponente más alto es dos entonces la ecuación es de segundo grado o cuadrática.

Si el exponente más alto es tres entonces la ecuación es de tercer grado o cúbica. Y así sucesivamente.

c. Por el número de términos

Ecuaciones **binómicas**: Son las ecuaciones que tienen dos términos.

Ecuaciones **polinómicas**: Son las ecuaciones que tienen tres términos y aunque podríamos seguir llamándolas en función del número de términos, se suelen llamar polinómicas.

d. De acuerdo a su concepto solución

Ecuación **identidad**: x son aquellas en las que se cumple para cualquier valor de la variable, o sea que es una equivalencia algebraica.

Ecuación **condicionada**: es cuando se le añade a la ecuación una condición adicional.

$5x + 2y = 9$ tal que “ x ” y “ y ” pertenecen a \mathbb{N} ; la pertenencia a los números naturales es la condición.

Ecuaciones **equivalentes**: cuando el conjunto solución de una ecuación es igual al de otra ecuación se dice que estas ecuaciones son equivalentes.

Dos o más ecuaciones con el mismo conjunto solución son ecuaciones equivalentes. Por lo general, las ecuaciones se resuelven comenzando con la ecuación dada y produciendo una serie de ecuaciones equivalentes más simples.

Ejemplo de ecuaciones equivalentes

| Ecuación | Conjunto Solución |
|---------------|-------------------|
| $5x + 2 = 17$ | {3} |
| $5x = 15$ | {3} |
| $x = 3$ | {3} |

Si damos a x un valor distinto de 3, la igualdad **no se verifica** o no es verdadera.

2.3 Conjunto Solución

Con frecuencia, para resolver una ecuación tendremos que aplicar una combinación de propiedades a fin de aislar la variable. Nuestra meta es tener la variable completamente sola en un lado de la ecuación (para aislar la variable). A continuación veremos el procedimiento general para resolver ecuaciones lineales.

1. Elimine las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCM de los denominadores.

2. Simplique cada lado de la ecuación tanto como sea posible. Utilice la propiedad distributiva para eliminar paréntesis y reduzca términos semejantes como sea necesario.

3. Utilice la propiedad de la suma para dejar todos los términos que contienen la variable en un lado de la ecuación y todos los términos constantes al otro lado.

4. Aplique la propiedad de la multiplicación para obtener una ecuación que tenga sola la variable (con un coeficiente de 1) en un lado.

5. Verifique, mediante sustracción, la solución obtenida en el paso 4 en la ecuación original.

Seguidamente, determinaremos el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales aplicando las propiedades de la suma y la multiplicación:



EJEMPLO

1. Resolver la ecuación: $3x - 2 = 10$

$$3x - 2 = 10$$

Ecuación dada

$$3x - 2 + 2 = 10 + 2$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$3x = 12$$

Resolviendo en ambos lados la suma

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$x = 4$$

Resolviendo en ambos lados el cociente

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = 4$.



EJEMPLO

2. Resolver la ecuación: $-2x + 3 = 12$

$$-2x + 3 = 12$$

Ecuación dada

$$-2x + 3 - 3 = 12 - 3$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$-2x = 9$$

Resolviendo en ambos lados la resta

$$-2x \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot \frac{1}{2}$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$x = -\frac{9}{2}$$

Resolviendo el cociente

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = -\frac{9}{2}$



EJEMPLO

3. Resolver la ecuación $3x + 7 = 2x - 2$

$$3x + 7 = 2x - 2$$

Ecuación dada

$$3x + 7 - 7 = 2x - 2 + 7$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$3x = 2x + 5$$

Resolviendo en ambos lados la suma

$$3x - 2x = 2x - 2x + 5$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$x = 5$$

Resolviendo en ambos lados la resta

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = 5$



EJEMPLO

4. Resolver la ecuación: $2,5x - 8 = x + 3$

| | |
|---|---|
| $2,5x - 8 = x + 3$ | Ecuación dada |
| $2,5x - 8 + 8 = x + 3 + 8$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $2,5x = x + 11$ | Resolviendo en ambos lados la suma |
| $2,5x - x = x - x + 11$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $1,5x = 11$ | Resolviendo en ambos lados la resta |
| $1,5x \cdot \frac{1}{1,5} = 11 \cdot \frac{1}{1,5}$ | Aplicando la propiedad de la multiplicación |
| $x = 7,33$ | Resolviendo el ambos lados el producto |

Por lo tanto, el conjunto solución de es 7,33



EJEMPLO

5. Resolver la ecuación: $2(x + 1) = 11$

| | |
|--|---|
| $2(x + 1) = 11$ | Ecuación dada |
| $2x + 2 = 11$ | Aplicando la propiedad distributiva |
| $2x + 2 - 2 = 11 - 2$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $2x = 9$ | Resolviendo en ambos lados la resta |
| $2x \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot \frac{1}{2}$ | Aplicando la propiedad de la multiplicación |
| $x = \frac{9}{2}$ | Resolviendo el cociente |

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = \frac{9}{2}$

**EJEMPLO**

6. Resolver la ecuación: $2(3x - 7) - 4x = -2$

| | |
|---|---|
| $2(3x - 7) - 4x = -2$ | Ecuación dada |
| $6x - 14 - 4x = -2$ | Aplicando la propiedad distributiva |
| $2x - 14 = -2$ | Reduciendo términos semejantes |
| $2x - 14 + 14 = -2 + 14$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $2x = 12$ | Resolviendo en ambos lados la suma |
| $2x \left(\frac{1}{2}\right) = 12 \left(\frac{1}{2}\right)$ | Aplicando la propiedad de la multiplicación |
| $x = 6$ | Resolviendo el producto |

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = 6$

**EJEMPLO**

7. Resolver la ecuación: $6(1 - x) - 2(x - 2) = 10$

| | |
|---|-------------------------------------|
| $6(1 - x) - 2(x - 2) = 10$ | Ecuación dada |
| $6 - 6x - 2x + 4 = 10$ | Aplicando la propiedad distributiva |
| $-8x + 10 = 10$ | Sumando términos semejantes |
| $-8x + 10 - 10 = 10 - 10$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $-8x = 0$ | Efectuando las restas |
| $-8x \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \left(\frac{1}{2}\right)$ | Aplicando la propiedad distributiva |
| $x = 0$ | Efectuando el producto |

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = 0$.



EJEMPLO

8. Resolver la ecuación: $(6 - x)(3 - x) - x(x - 2) = 0$

| | |
|---|--|
| $(6 - x)(3 - x) - x(x - 2) = 0$ | Ecuación dada |
| $(6 - x)(3 - x) - x(x - 2) = 0$ | Resolviendo el producto y |
| $18 - 6x - 3x + x^2 - x^2 + 2x = 0$ | Aplicando la propiedad distributiva |
| $18 - 7x = 0$ | Reduciendo términos semejantes |
| $18 - 7x - 18 = 0 - 18$ | Restando en ambos lados 18 |
| $-7x = -18$ | Efectuando las restas |
| $-7x \left(-\frac{1}{7}\right) = -18 \left(-\frac{1}{7}\right)$ | Multiplicando ambos lados por $-\frac{1}{7}$ |
| $x = \frac{18}{7}$ | Efectuando los productos |

Por lo tanto, el conjunto solución de es $x = \frac{18}{7}$



EJEMPLO

9. Resolver la ecuación: $5(x - 1)^2 - (5x + 4)(x - 3) = -2$

| | |
|--|---|
| $5(x - 1)^2 - (5x + 4)(x - 3) = -2$ | Ecuación dada |
| $5(x^2 - 2x + 1) - (5x^2 - 15 + 4x - 12) = -2$ | Resolviendo el cuadrado |
| $5x^2 - 10x + 5 - 5x^2 + 15 - 4x + 12 = -2$ | Aplicando propiedad distributiva |
| $-14x + 32 = -2$ | Reduciendo términos semejantes |
| $-14x + 32 - 32 = -2 - 32$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $-14x = -34$ | Efectuando las restas |
| $-14x \left(-\frac{1}{14}\right) = -34 \left(-\frac{1}{14}\right)$ | Aplicando la propiedad de la Multiplicación |

$$x = \frac{34}{14} \quad \text{Resolviendo el producto}$$

$$x = \frac{17}{7} \quad \text{Simplificando la fracción}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = \frac{17}{7}$

¡También resolveremos ecuaciones reducibles a la forma lineal!

Seguidamente, aplicaremos las propiedades de suma y multiplicación para resolver ecuaciones lineales que incluyen coeficientes numéricos de forma racional.

2.4 Ecuaciones reducibles a la forma lineal

Una ecuación está expresada de forma racional (fraccionaria) cuando algunos de sus términos o todos tienen denominadores como: $\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$. Para resolver ecuaciones de esta forma, primero tenemos que suprimir los denominadores.

Supresión de denominadores

La supresión de denominadores es una operación importante. Consiste en convertir una ecuación expresada de forma racional en una ecuación equivalente entera, es decir, sin denominadores.

La supresión de denominadores se fundamenta en la propiedad de las igualdades: **una igualdad no varía si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad.**

A continuación presentaremos la siguiente **Regla**:

Para suprimir denominadores en una ecuación se multiplican todos los términos de la ecuación por el MCM (mínimo común múltiplo) de los denominadores.

Seguidamente, se divide el MCM entre cada denominador y cada cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Finalmente, se simplifica y luego se resuelve la ecuación aplicando las propiedades de la adición y la multiplicación. También podemos resolver las ecuaciones transponiendo términos.

A continuación se presentan ejemplos:



EJEMPLO

10. Resolver la ecuación: $\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$

$$\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$$

Ecuación dada

$$\frac{5}{2}x \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 3x \cdot 2 + 7 \cdot 2$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$5x - 10 = 6x + 14$$

Resolviendo en ambos lados el producto

$$5x - 10 + 10 = 6x + 14 + 10$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$5x = 6x + 24$$

Resolviendo en ambos lados la suma

$$5x - 6x = 6x + 24 - 6x$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$-x = 24$$

Resolviendo en ambos lados la suma

$$-x(-1) = 24(-1)$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$x = -24$$

Resolviendo en ambos lados el producto

Por lo tanto, el conjunto solución de $\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$ es $x = -24$



EJEMPLO

11. Resolver la ecuación: $\frac{4}{3}x - 7 = \frac{1}{3}x + 8$

$$\frac{4}{3}x - 7 = \frac{1}{3}x + 8$$

Ecuación dada

$$\frac{4}{3}x \cdot 3 - 7 \cdot 3 = \frac{1}{3}x \cdot 3 + 8 \cdot 3$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$4x - 21 = x + 24$$

Resolviendo en ambos lados el producto

$$4x - 21 + 21 = x + 24 + 21$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$4x = x + 45$$

Resolviendo en ambos lados la suma

$$4x - x = x + 45 - x$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$3x = 45$$

Resolviendo en ambos lados la resta

$$3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$x = 5$$

Resolviendo en ambos lados el producto

Por lo tanto, el conjunto solución de $\frac{4}{3}x - 7 = \frac{1}{3}x + 8$ es $x = 5$



EJEMPLO

12. Resolver la ecuación: $\frac{7}{2}x + 2 + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x - 6$

$$\frac{7}{2}x + 2 - 2 + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x - 6 - 2$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x - 8$$

Resolviendo en ambos lados la resta

$$\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}x = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x - 8$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)x = -8$$

Reduciendo términos semejantes

$$\frac{3}{2}x = -8$$

Resolviendo las operaciones

$$\frac{3}{2}x \left(\frac{2}{3}\right) = -8 \left(\frac{2}{3}\right)$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$x = -\frac{16}{3}$$

Resolviendo el producto

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación: $\frac{7}{2}x + 2 + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x - 6$ es $x = \frac{9}{2}$



EJEMPLO

13. Resolver la ecuación: $\frac{4}{3}(x + 8) = \frac{3}{4}(2x + 12)$

$$\frac{4}{3}(x + 8) = \frac{3}{4}(2x + 12)$$

Ecuación dada

$$\frac{4}{3}(x + 8) = \frac{3}{4}(2x + 12)$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\frac{4}{3}x \cdot 12 + \frac{32}{3} \cdot 12 = \frac{6}{4}x \cdot 12 + \frac{36}{4} \cdot 12$$

Multiplicando por el MCM (4)

$$\frac{48}{3}x + \frac{384}{3} = \frac{72}{4}x + \frac{432}{4}$$

Resolviendo el producto

$$16x + 128 = 18x + 108$$

Resolviendo el cociente

$$16x + 128 - 128 = 18x + 108 - 128$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$16x = 18x - 20$$

Resolviendo las restas

$$16x - 18x = 18x - 18x - 20$$

Aplicando la propiedad de la suma

$$-2x = -20$$

Efectuando las restas

$$2x \left(-\frac{1}{2}\right) = -20 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Aplicando la propiedad Multiplicación

$$x = 10$$

Efectuando el producto

Por lo tanto, el conjunto solución es 10.



EJEMPLO

14. Resolver la ecuación: $\frac{x}{3} - \frac{x}{12} = \frac{x}{4} - \frac{x}{3}$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{12} = \frac{x}{4} - \frac{x}{3}$$

Ecuación dada

$$2 - \frac{x}{12} \cdot 12 = \frac{x}{4} \cdot 12 - \frac{x}{3} \cdot 12$$

Multiplicando por el MCM (12)

| | |
|--|---|
| $4x - x = 3x - 4x$ | Resolviendo los productos |
| $3x = -x$ | Reduciendo términos semejantes |
| $3x + x = -x + x$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $4x = 0$ | Resolviendo las sumas |
| $4x \left(\frac{1}{4}\right) = 0 \left(\frac{1}{4}\right)$ | Aplicando la propiedad de la Multiplicación |
| $x = 0$ | Efectuando los cocientes |

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $x = 0$



EJEMPLO

15. Resolver la ecuación: $\frac{x+4}{4} - \frac{x}{2} = 5$

| | |
|---|---|
| $\frac{x+4}{4} - \frac{x}{2} = 5$ | Ecuación dada |
| $\frac{x+4}{4} \cdot 4 - \frac{x}{2} \cdot 4 = 5 \cdot 4$ | Multiplicando por el MCM (4) |
| $x + 4 - 2x = 20$ | Resolviendo el producto |
| $-x + 4 = 20$ | Reduciendo términos semejantes |
| $-x + 4 - 4 = 20 - 4$ | Aplicando la propiedad de la suma |
| $-x = 16$ | Efectuando las restas |
| $-x (-1) = 16 (-1)$ | Aplicando la propiedad de la multiplicación |
| $x = -16$ | Resolviendo los productos |

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $x = -16$

A continuación se presentan otros ejemplos:



EJEMPLO

1. Resolver la ecuación: $14 - (5x - 1)(2x + 3) = 17 - (10x + 1)(x - 6)$

$$14 - (5x - 1)(2x + 3) = 17 - (10x + 1)(x - 6) \quad \text{Ecuación dada}$$

$$14 - (10x^2 + 15x - 2x - 3) = 17 - (10x^2 - 60x + x - 6) \quad \text{Resolviendo productos}$$

$$14 - 10x^2 - 15x + 2x + 3 = 17 - 10x^2 + 60x - x + 6 \quad \text{Eliminando paréntesis}$$

$$17 - 13x = 23 + 59x \quad \text{Reduciendo términos semejantes}$$

$$-13x - 59x = 23 - 17 \quad \text{Transponiendo términos}$$

$$-72x = 6 \quad \text{Reduciendo términos semejantes}$$

$$x = \frac{6}{-72} \quad \text{Transponiendo términos}$$

$$x = -\frac{1}{12} \quad \text{Simplificando}$$

El conjunto solución de la ecuación es $x = -\frac{1}{3}$



EJEMPLO

2. Resolver la ecuación: $(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x)$

$$(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x) \quad \text{Ecuación dada}$$

$$16x - 20 - 20x^2 + 25x = 70x - 20x^2 - 21 + 6x \quad \text{Resolviendo productos}$$

$$41x - 20 - 20x^2 = 76x - 20x^2 - 21 \quad \text{Reduciendo términos semejantes}$$

$$41x - 20 = 76x - 21 \quad \text{Eliminando en ambos lados } -20x^2$$

$$41x - 76x = -21 + 20 \quad \text{Transponiendo términos}$$

$$-35x = -1 \quad \text{Reduciendo términos semejantes}$$

$$-35x - \frac{1}{35} = -1 - \frac{1}{35} \quad \text{Multiplicando por } -\frac{1}{35}$$

$$x = \frac{1}{35} \quad \text{Efectuando el producto}$$

El conjunto solución de la ecuación es $x = \frac{1}{35}$



EJEMPLO

3. Resolver la ecuación $-3(2x + 7) + (6 - 5x) - 8(1 - 2x) = (x - 3)$

| | |
|---|---------------------------------|
| $-3(2x + 7) + (6 - 5x) - 8(1 - 2x) = (x - 3)$ | Ecuación dada |
| $-6x - 21 + 6 - 5x - 8 + 16x = x - 3$ | Eliminando paréntesis |
| $5x - 23 = x - 3$ | Reduciendo términos semejantes |
| $5x - x = -3 + 23$ | Transponiendo términos |
| $4x = 20$ | Reduciendo términos semejantes |
| $4x \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$ | Multiplicando por $\frac{1}{4}$ |
| $x = 5$ | Efectuando el producto |

El conjunto solución de la ecuación es $x = 5$



EJEMPLO

4. Resolver la ecuación $-3(2x + 7) + (6 - 5x) - 8(1 - 2x) = (x - 3)$

| | |
|--|-----------------------------------|
| $184 - 7(2x + 5) = 301 + 6(x - 1) - 6$ | Ecuación dada |
| $184 - 14x - 35 = 301 + 6x - 6 - 6$ | Eliminando paréntesis |
| $-14x + 149 = 6x - 289$ | Reduciendo términos semejantes |
| $-14x - 6x = -289 - 149$ | Transponiendo términos |
| $-20x = 438$ | Reduciendo términos semejantes |
| $-20x \left(-\frac{1}{20}\right) = 438 \left(-\frac{1}{20}\right)$ | Multiplicando por $-\frac{1}{20}$ |
| $x = \frac{438}{20}$ | Efectuando el producto |
| $x = \frac{219}{10}$ | Simplificando |

El conjunto solución de la ecuación es $x = \frac{219}{10}$



EJEMPLO

5. Resolver la ecuación: $14x - (3x + 2) - 10 = 10x - 1$

| | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| $14x - (3x + 2) - 10 = 10x - 1$ | Ecuación dada |
| $14x - 3x - 2 - 10 = 10x - 1$ | Eliminando paréntesis |
| $11x - 12 = 10x - 1$ | Reduciendo términos semejantes |
| $11x - 10x = -1 + 12$ | Transponiendo términos |
| $x = 11$ | Reduciendo términos semejantes |

El conjunto solución de la ecuación es $x = 11$.



EJEMPLO

6. Resolver la ecuación: $(5 - 3x) - (-4x + 6) = 5x + 17$

| | |
|--|----------------------------------|
| $(5 - 3x) - (-4x + 6) = 5x + 17$ | Ecuación dada |
| $5 - 3x + 4x - 6 = 5x + 17$ | Eliminando paréntesis |
| $x - 1 = 5x + 17$ | Reduciendo términos semejantes |
| $x - 5x = 17 + 1$ | Transponiendo términos |
| $-4x = 18$ | Reduciendo términos semejantes |
| $-4x \left(-\frac{1}{4}\right) = 18 \left(-\frac{1}{4}\right)$ | Multiplicando por $-\frac{1}{4}$ |
| $x = -\frac{9}{2}$ | Simplificando |

El conjunto solución de la ecuación es $x = -\frac{9}{2}$

**EJEMPLO**

7. Resolver la ecuación: $- [x - 1 - (2x + 5)] = x$

| | |
|----------------------------|--------------------------------|
| $- [x - 1 - (2x + 5)] = x$ | Ecuación dada |
| $- (x - 1 - 2x - 5) = x$ | Eliminando corchetes |
| $- x + 1 + 2x + 5 = x$ | Eliminando paréntesis |
| $x + 6 = x$ | Reduciendo términos semejantes |
| $x - x = - 6$ | Transponiendo términos |
| $0 = - 6$ (Contradicción) | Reduciendo términos semejantes |

Por lo tanto, la ecuación $- [x - 1 - (2x + 5)] = x$ no tiene solución.

**EJEMPLO**

8. Resolver la ecuación: $\frac{x+2}{4} = \frac{2-x}{8} + 1$

| | |
|--|---------------------------------|
| $\frac{x+2}{4} = \frac{2-x}{8} + 1$ | Ecuación dada |
| $\frac{x+2}{4} \cdot 8 = \frac{2-x}{8} \cdot 8 + 1 \cdot 8$ | Multiplicando por el MCM (8) |
| $2(x+2) = 2-x+8$ | Simplificando |
| $2x+4 = -x+10$ | Resolviendo el producto |
| $2x+x = 10-4$ | Reduciendo términos semejantes |
| $3x = 6$ | Reduciendo términos semejantes |
| $3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$ | Multiplicando por $\frac{1}{3}$ |
| $x = 2$ | Resolviendo el producto |

Por lo tanto, la solución de la ecuación $\frac{x+2}{4} = \frac{2-x}{8} + 1$ es $x = 2$



EJEMPLO

9. Resolver la ecuación: $5x = \frac{8x - 15}{3}$

$5x = \frac{8x - 15}{3}$ Ecuación dada

$5x \cdot 3 = \frac{8x - 15}{3} \cdot 3$ Multiplicando por el MCMD (3)

$15x = 8x - 15$ Resolviendo el producto y Simplificando

$15x - 8x = -15$ Transponiendo términos

$7x = -15$ Reduciendo términos semejantes

$7x \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = -15 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$ Multiplicando por $\frac{1}{7}$

$x = -\frac{15}{7}$ Resolviendo el producto

Por lo tanto, la solución de la ecuación $5x = \frac{8x - 15}{3}$ es $x = -\frac{15}{7}$



EJEMPLO

10. Resolver la ecuación: $\frac{x + 2}{5} = 2$

$\frac{x + 2}{5} = 2$ Ecuación dada

$x + 2 = 2 \cdot 5$ Multiplicando por el MCMD (5)

$x + 2 = 10$ Simplificando y resolviendo el producto

$x = 10 - 2$ Transponiendo términos

$x = 8$ Resolviendo el producto

Por lo tanto, la solución de la ecuación $\frac{x + 2}{5} = 2$ es $x = 8$

**EJEMPLO**

11. Resolver la ecuación: $\frac{x+5}{8} = \frac{x-9}{5}$

| | |
|---|----------------------------------|
| $\frac{x+5}{8} = \frac{x-9}{5}$ | Ecuación dada |
| $\frac{x+5}{8} \cdot 40 = \frac{x-9}{5} \cdot 40$ | Multiplicando por el MCM (40) |
| $5(x+5) = 8(x-9)$ | Simplificando |
| $5x + 25 = 8x - 72$ | Resolviendo el producto |
| $5x - 8x = -72 - 25$ | Transponiendo términos |
| $-3x = -97$ | Reduciendo términos semejantes |
| $-3x \left(-\frac{1}{3}\right) = -97 \left(-\frac{1}{3}\right)$ | Multiplicando por $-\frac{1}{3}$ |
| $x = \frac{97}{3}$ | Resolviendo el producto |

Por lo tanto, la solución de la ecuación $\frac{x+5}{8} = \frac{x-9}{5}$ es $x = \frac{97}{3}$

**EJEMPLO**

12. Resolver la ecuación: $\frac{(x+5) - (-3x+2x)}{5x} = -5$

| | |
|--|-------------------------------------|
| $\frac{(x+5) - (-3x+2x)}{5x} = -5$ | Ecuación dada |
| $\frac{(x+5) - (-3x+2x)}{5x} \cdot 5x = -5 \cdot 5x$ | Multiplicando en ambos lados por 5x |
| $x + 5 + 3x - 2x = -25x$ | Eliminando paréntesis |
| $x + 3x - 2x + 25x = -5$ | Transponiendo términos |
| $27x = -5$ | Reduciendo términos semejantes |
| $x = -\frac{5}{27}$ | Transponiendo términos |



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y resolvamos correctamente los siguientes ejercicios

I. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales aplicando las propiedades de la suma y la multiplicación.

1. $5x + 5 = 10x + 15$

9. $10(5x - 4) - 8x = -12$

2. $2x + 3 = 6x + 15$

10. $\frac{5}{7}(x + 5) = \frac{3}{8}(2x + 15)$

3. $8x + 10 = 10x + 16$

11. $\frac{x}{3} - \frac{x}{7} = \frac{x}{21} - \frac{x}{14}$

4. $\frac{7}{2}x - 4 = 2x + 9$

12. $9(2 - x) - 2(x - 2) = 20$

5. $15x - 20 = 5x + 10$

13. $(2 - x)(5 - x) - x(x - 2) = 20$

6. $\frac{5}{6}x - 7 = \frac{1}{7}x + 5$

14. $10(x - 2) - (10x + 4)(3x - 3) = -2$

7. $7(x - 4) = 21$

15. $\frac{x+7}{7} - \frac{x}{5} = 25$

8. $\frac{5}{3}x + 5 + \frac{9}{3}x = \frac{11}{3}x - 10$

II. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales transponiendo términos:

1. $24 - (15x - 2)(12x + 3) = 27 - (20x + 5)(5x - 6)$

2. $(8 - 10x)(8x - 10) = (20x - 6)(14 - 4x)$

3. $-6(2x + 9) + (8 - 5x) - 10(1 - 3x) = (3x - 1)$

4. $18 - 7(2x + 1) = 30 + 4(x - 1) - 10$

5. $24x - (6x + 4) - 20 = 20x - 2$

6. $(10 - 3x) - (-8x + 6) = 10x + 17$

7. $-(2x - 5 - (2x - 1)) = 10x$

8. $\frac{x+4}{8} = \frac{12-x}{12} + 5$

$$9. 8x = \frac{8x - 16}{4}$$

$$10. \frac{5x + 5}{10} = 15$$

$$11. \frac{2x + 5}{9} = \frac{3x - 9}{4}$$

$$12. \frac{(10x + 5) - (-15x + 2x)}{15x} = -15$$

APLICACIONES DE ECUACIONES LINEALES EN EL ENTORNO



EJEMPLO

1. Un productor necesita saber cuántas manzanas de tierra tiene sembradas. El solamente tiene conocimiento de que la suma de la tercera y la cuarta parte del terreno de tierra equivale al doble del terreno disminuida en 17.

Sea x : El número de manzanas

$\frac{x}{3}$: La tercera parte de la manzana

$\frac{x}{4}$: La cuarta parte de la manzana

$2x$: El doble de una manzana



Tomando en cuenta las situaciones del problema, definiremos la ecuación:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2x - 17$$

Ahora resolveremos la ecuación:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2x - 17$$

Multiplicando por el MCM (12)

$$4x + 3x = 24x - 204$$

Agrupando términos semejantes

$$4x + 3x - 24x = -204$$

Aplicando la propiedad de la Suma

$$-17x = -204$$

Aplicando la propiedad de la Multiplicación

$$x = \frac{-204}{-17} = 12$$

La respuesta

$$x = 12$$

El productor posee 12 manzanas de tierra sembradas.



EJEMPLO



2. Un jefe de familia desea ampliar su casa agregando un área de forma rectangular de tal forma que la longitud exceda en el ancho en 8 metros. Si cada dimensión se aumenta en 3 metros, el área se aumentaría en 57 m^2 . Hallar las dimensiones de la casa.

x : Ancho de la casa (forma rectangular)

$x + 8$: Longitud de la casa (forma rectangular)

Como el área de la casa de forma rectangular se obtiene multiplicando su longitud por su ancho, obtenemos la ecuación:

$$x(x + 8) = \text{área del rectángulo}$$

Pero, si cada dimensión se aumenta en 3 metros, el ancho será $(x + 3)$ metros y la longitud $(x + 8) + 3$, que equivale a $x + 8 + 3 = (x + 11)$ metros.

Por lo tanto, el área será: $(x + 3)(x + 11) \text{ m}^2$

Según las condiciones del problema, el área tiene 57 m^2 más que el área original, entonces la ecuación será:

$$(x + 3)(x + 11) = x(x + 8) + 57$$

Resolviendo la ecuación:

$$x^2 + 3x + 11x + 33 - 57 = x^2 + 8x$$

Agrupando términos semejantes

$$(x^2 - x^2) + (3x + 11x - 8x) = -33 + 57$$

Sumando términos semejantes

$$6x = 24$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación

$$x = \frac{26}{6}$$

Resolviendo el cociente

$$x = 4$$

La respuesta

Por lo tanto, el ancho de la casa es 4 metros y la longitud 12 metros.

**EJEMPLO**

3. Antonio compra un terreno a razón de 5 000 la hectárea, una vez que ha realizado el negocio se da cuenta que el terreno tiene 8 hectáreas menos, pero ya no existe lugar a reclamo; sin embargo decide vender el terreno a 6 000 la hectárea (contenida exactamente) y gana así el 12 % de su inversión. ¿Cuántas hectáreas medía el terreno? Para conocer cuántas hectáreas medía el terreno, primeramente plantearemos la ecuación:

Sea x el número de hectáreas.

$5\,000x$ es la inversión de la compra.

$(x - 8) 6\,000$ es el precio de la venta total de las hectáreas

$0,12 (5\,000x)$ es la ganancia obtenida, entonces

Venta Total = ganancia + inversión

$$(x - 8) 6\,000 = 0,12 (5\,000x) + 5\,000x$$

$$6\,000x - 48\,000 = 600x + 5\,000x$$

$$6\,000x - 600x - 5\,000x = 48\,000$$

$$400x = 48\,000$$

$$x = \frac{48\,000}{400}$$

$$x = 120$$

Al hacer la compra el terreno medía 120 hectáreas, pero luego se da cuenta que mide $120 - 8 = 112$ hectáreas.

**EJEMPLO**

4. Don Julio es un agricultor tiene 1000 metros de alambre de púas y desea cercar un solar rectangular, en el cual uno de sus largos da a un río que no necesita cerca. El largo es de 100 metros más que el ancho. ¿Cuál es el área de dicho solar?

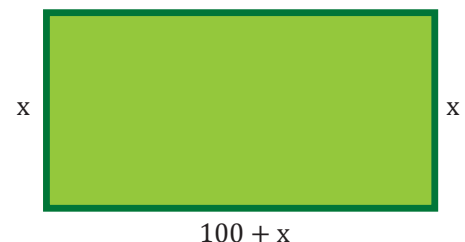
Para conocer el área del terreno, primero utilizaremos la fórmula del perímetro (P) del solar, el que tiene forma de un rectángulo:

$$P = 2x + 100 + x$$

$$1\,000 = 3x + 100$$

$$3x = 1\,000 - 100$$

$$3x = 900$$



$$x = \frac{900}{3}$$

$$x = 300$$

Como el ancho del rectángulo es $x = 100$ y el largo es $100 + x = 300 + 100 = 400$

Entonces, podemos calcular el área del solar:

$$A = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$A = 300 \text{ m} \cdot 400 \text{ m}$$

$$A = 120\,000 \text{ m}^2$$

Por lo tanto, el área del solar es $120\,000 \text{ m}^2$.



EJEMPLO

5. Un vendedor de galletas gasta 24 córdobas en ingredientes y cobra 2 córdobas por galleta vendida. Al final del día su ganancia neta es de 88 córdobas. ¿Cuántas galletas vendió?

Debemos considerar que: ganancia neta = ingreso - costo

Sea x el número de galletas vendidas.

Tenemos como ingreso $2x$ córdobas y como costo 24 córdobas.

También consideremos la ganancia neta igual a 88 córdobas.

Si ganancia neta = ingreso - costo, tenemos que:

$$88 = 2x - 24$$

$$-2x = -88 - 24$$

$$-2x = -112$$

$$x = \frac{-112}{-2}$$

$$x = 56$$

El vendedor vendió un total de 56 galletas.





EJEMPLO

6. La suma de dos números es 75 y el segundo número es tres unidades menos que el primero. ¿Cuáles son los números?

Sea: Primer número: x

Segundo número: $x - 3$

Entonces,

$$x + (x - 3) = 75$$

$$x + x - 3 = 75$$

$$2x = 75 + 3$$

$$x = \frac{78}{2}$$

$$x = 39$$

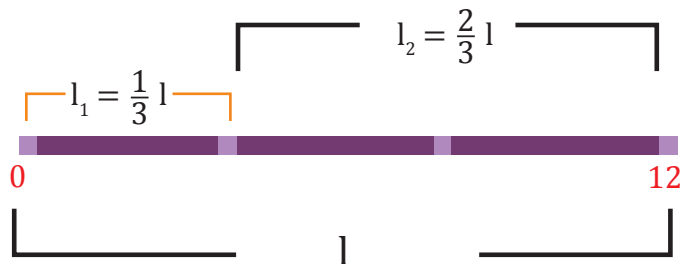
Por tanto, el primer número es 36 y el segundo $39 - 3 = 36$.



EJEMPLO

7. Un trozo de cuerda de 12 metros se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es dos terceras partes del total de la cuerda. Si con el trozo más pequeño se forma un cuadrado, obtener el lado del cuadrado y si con el trozo de mayor longitud se forma una circunferencia, obtener el radio de la circunferencia.

Supongamos que la longitud de la cuerda se muestra:



Como el trozo de cuerda se divide en dos partes, entonces definimos:

$$l_1 = \frac{1}{3} l \text{ (Lado más pequeño)}$$

$$l_2 = \frac{2}{3} l \text{ (Lado más grande)}$$

$$l_1 + l_2 = l \text{ (Longitud de la cuerda)}$$

$$l = 12 \text{ m}$$

Utilizaremos el trozo más pequeño ($l_1 = \frac{2}{3} l$) que forma un cuadrado, para obtener el lado del cuadrado:

$l_1 = \frac{1}{3} l$, sustituyendo la longitud $l = 12$ m, resulta:

$$l_1 = \frac{1}{3} (12\text{m})$$

$$l_1 = 4\text{m}.$$

La fórmula para calcular el perímetro del cuadrado es igual a $P = 4l$

La ecuación lineal es: $P = 4x$, de donde $4x = 4\text{m}$

$$x = \frac{4\text{m}}{4}$$

$$x = 1\text{m}$$

Por lo tanto, El lado del cuadrado es igual a 1.

Ahora utilizaremos el trozo de mayor longitud $l_2 = \frac{2}{3} l$ que forma una circunferencia, para obtener el radio de la circunferencia:

$l_2 = \frac{2}{3} l$, sustituyendo el valor de l

$$l_2 = \frac{2}{3} (12\text{m})$$

$$l_2 = 8\text{m}$$

Entonces podemos afirmar que la ecuación de la longitud de la circunferencia es:

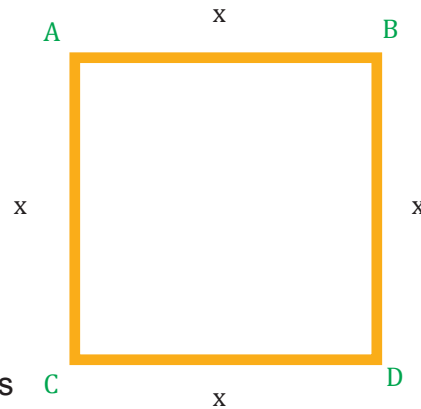
$$l_c = 2\pi r = 8 \text{ de donde:}$$

$$2\pi r = 8$$

$$r = \frac{8}{2\pi}; \pi \approx 3,14$$

$$r = \frac{8}{2(3,14)} = \frac{8}{6,28}$$

Por lo tanto, el radio de la circunferencia es: 1,27 metros.



**EJEMPLO**

8. Una productora de papas ha decidido repartir las ganancias de la cosecha que equivalen a C\$480 000 entre sus dos hijos de modo que el hijo menor reciba $\frac{1}{4}$ de la parte que recibirá el hijo mayor. Encontrar la cantidad de córdobas que recibirá cada uno.



Sea x : Cantidad de córdobas que recibirá el hijo mayor

$\frac{1}{4}x$: Cantidad de córdobas que recibirá el hijo menor

Tomando en cuenta las situaciones del problema, definiremos la ecuación:

$$x + \frac{1}{4}x = 480\,000$$

$$\frac{4x + x}{4} = 480\,000$$

$$5x = 480\,000 \quad (4)$$

$$x = \frac{192\,000}{5}$$

$$x = 384\,000$$

El hermano mayor recibirá 384 000

El hermano menor recibirá:

$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{4} (384\,000)$$

$$\frac{1}{4}x = 96\,000$$

$384\,000 + 96\,000 = 480\,000$, comprobando las respuestas.



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y resolvamos correctamente los siguientes ejercicios

I. Resolvamos correctamente los siguientes problemas de aplicación.

1. Don Manuel compró un terreno a razón de C\$7 000 la hectárea, después de que realizó la compra se dio cuenta que el terreno tiene 10 hectáreas menos, pero después de 24 hora no tiene derecho a reclamar. Sin embargo decide vender el terreno a 10 000 el área (contenida exactamente) y gana así el 15 % de su inversión. ¿Cuántas áreas medía el terreno?

2. Un trozo de cuerda de 20 metros se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es dos terceras partes del total de la cuerda. Si con el trozo más pequeño se forma un cuadrado, obtener el lado del cuadrado y si con el trozo de mayor longitud se forma una circunferencia, obtener el radio de la circunferencia.

3. Don Juan es un agricultor y compró 1 500 metros de alambre de púas para cercar un solar rectangular, uno de sus largos coincide con la quebrada, y por lo tanto no necesita cerca. El largo es de 150 metros más que el ancho. ¿Cuál es el área de dicho solar?

4. Un padre reparte 3 000 córdobas entre sus dos hijos de tal forma que el menor recibe $\frac{2}{3}$ de lo que le corresponde al mayor. ¿Cuánto recibe cada uno?

5. En tres días un hombre ganó C\$ 1250. Si cada día ganó la mitad de los que ganó el día anterior, ¿cuánto ganó cada día?

6. La longitud de un terreno rectangular excede al ancho en 10 metros. Si cada dimensión se aumenta en 5 metros, el área se aumenta en 75 m^2 . Hallar las dimensiones del terreno.

7. Un padre tiene 41 años y su hijo 7. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del hijo sea la tercera parte de la del padre?

3 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Indicador de Logro:

Resuelve problemas de su realidad que impliquen el uso de los sistemas de ecuaciones lineales de orden 2 por 2 y sus métodos de solución.

INTRODUCCIÓN:

Una señora que fue beneficiada por el bono tiene en su finca gallinas y cerdos, hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos tiene la señora en su finca?

Los sistemas de ecuaciones son importantes para resolver situaciones como la planteada anteriormente. Introduciremos el procedimiento para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, describiendo cada paso para dar respuesta a las preguntas anteriores.

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Un sistema de ecuaciones está formado por dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Por ejemplo, en el problema presentado al inicio, donde la señora tiene gallinas y cerdos, entonces tenemos dos incógnitas o variables que investigar:

Sea las incógnitas o las variables:

$x =$ las gallinas

$y =$ los cerdos.



Y de ahí formamos las ecuaciones, como la señora tienen gallinas y cerdos; significa que tienen 20 cabezas, entonces la ecuación es $x + y = 20$. Y el problema plantea que hay 52 patas (las gallinas tienen dos patas y los cerdos cuatro), entonces la otra ecuación es $2x + 4y = 52$. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas estaría formado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 52 \end{cases}$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizaremos los siguientes métodos:

1 Método de Sustitución

2 Método de Igualación

3 Método de reducción

3.1 Método de Sustitución



EJEMPLO

1. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales anterior:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 54 \end{cases}$$

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 2x + 4y = 54 & (2) \end{cases}$$

Luego, despejamos una de las incógnitas, en una de las ecuaciones. Despejaremos x en la ecuación (1).

Transponiendo términos tenemos: $x + y = 20$
 $x = 20 - y$

El valor de x lo sustituiremos en la ecuación (2):

$$2x + 4y = 54$$

$$2(20 - y) + 4y = 52$$

Observamos que ahora tenemos una ecuación con una incógnita, hemos eliminado la x .

Seguidamente, resolveremos la ecuación encontrada:

| | |
|-----------------------|-------------------------------|
| $2(20 - y) + 4y = 52$ | Resolviendo el producto |
| $40 - 2y + 4y = 52$ | Agrupando términos semejantes |
| $2y = 52 - 40$ | Resolviendo la resta |
| $2y = 12$ | Transponiendo términos |
| $y = \frac{12}{2}$ | Resolviendo el cociente |
| $y = 6$ | La respuesta |

Sustituyendo y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) obtenemos:

$$x + y = 20$$

$$x + 6 = 20$$

$$x = 20 - 6$$

$$x = 14$$

La respuesta es $\begin{cases} x = 14 \\ y = 6 \end{cases}$

Por lo tanto, la señora tenía en su finca 14 gallinas y 6 cerdos.

Esta respuesta la podemos verificar sustituyendo los valores de las incógnitas:

$$x + y = 20$$

$$14 + 6 = 20$$

$$20 = 20 \quad (\text{verdadero})$$

$$2x + 4y = 52$$

$$2(14) + 4(6) = 52$$

$$28 + 14 = 52$$

$$52 = 52 \quad (\text{verdadero})$$

3.2 Método de Igualación



EJEMPLO

2. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \text{ (1)} \\ 4x - y = 5 \text{ (2)} \end{cases}$$

Luego, despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

Despejamos x en la ecuación (1).

Transponiendo términos tenemos: $2x + 3y = 13$

$$2x = 13 - 3y$$

$$x = \frac{13 - 3y}{2}$$

Despejamos x en la ecuación (2).

Transponiendo términos tenemos: $4x - y = 5$

$$x = \frac{5 + y}{4}$$

Seguidamente, igualamos los dos valores de x obtenidos:

$$\frac{13 - 3y}{2} = \frac{5 + y}{4}$$

Observemos que ahora tenemos una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado x .

Ahora, resolvamos esta ecuación:

$$\frac{13 - 3y}{2} = \frac{5 + y}{4}$$

$$4(13 - 3y) = 2(5 + y)$$

$$52 - 12y = 10 + 2y$$

$$-12y - 2y = 10 - 52$$

$$-14y = -42$$

$$y = \frac{-42}{-14}$$

$$y = 3$$

Sustituimos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la ecuación (1) :

$$2x + 3y = 13$$

$$2x + 3(3) = 13$$

$$2x + 9 = 13$$

$$2x = 13 - 9$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

La solución es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

3.3 Método de Reducción



EJEMPLO

3. Resolvamos el sistema

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$5x + 6y = 20 \quad (1)$$

$$4x - 3y = -23 \quad (2)$$

En el método de reducción los coeficientes de una de las incógnitas se transforman en coeficientes iguales. En este caso vamos a igualar los coeficientes de y en ambas ecuaciones, porque es lo más sencillo.

El MCM de los coeficientes de y es 6.

Luego multiplicamos la segunda ecuación por 2, porque $2 \cdot 3 = 6$

Obtenemos:

$$5x + 6y = 20$$

$$4x - 3y = -23 \cdot 2 \text{ Multiplicamos por 2}$$

Como los coeficientes de y que igualamos tienen signos distintos, se suman estas ecuaciones porque con ello se elimina la y :

$$5x + 6y = 20 \quad (1)$$

$$8x - 6y = -46 \quad (2)$$

$$13x = -26$$

$$x = \frac{-26}{13}$$

$$x = -2$$

Sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la ecuación (1)

$$5x + 6y = 20$$

$$5(-2) + 6y = 20$$

$$-10 + 6y = 20$$

$$6y = 20 + 10$$

$$6y = 30$$

$$y = \frac{30}{6}$$

$$y = 5$$

La solución es $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

3.4 Método de Sustitución



EJEMPLO

4. Resolvamos el sistema anterior:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{3}x + y = 1 \end{cases}$$

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{5}{8} & (1) \\ \frac{1}{3}x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Luego, despejamos una de las incógnitas, en una de las ecuaciones. Despejaremos y en la ecuación (1). Transponiendo términos tenemos:

$$\frac{2}{3}y = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}x$$

$$y = \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{15}{16} - \frac{3}{4}x$$

El valor de y lo sustituiremos en la ecuación (2):

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{15}{16} - \frac{3}{4}x\right) = 1$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}x = 1 - \frac{15}{16}$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)x = \frac{16 - 15}{16}$$

$$\left(\frac{4 - 9}{12}\right)x = \frac{16 - 15}{16}$$

$$-\frac{5}{12}x = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)$$

$$x = -\frac{12}{80}$$

$$x = -\frac{3}{20}$$

Ahora sustituiremos x en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) obtenemos:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{20}\right) + \frac{2}{3}y = \frac{5}{8}$$

$$-\frac{3}{40} + \frac{2}{3}y = \frac{5}{8}$$

$$\frac{2}{3}y = \frac{5}{8} + \frac{3}{40}$$

$$\frac{2}{3}y = \frac{25 + 3}{40}$$

$$\frac{2}{3}y = \frac{28}{40}$$

$$y = \frac{28}{40} \cdot \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{84}{80}$$

$$y = \frac{21}{20}$$

La solución es $\begin{cases} x = -\frac{3}{20} \\ y = \frac{21}{20} \end{cases}$

3.5 Método de Igualación



EJEMPLO

5. Resolvamos el sistema anterior:
$$\begin{cases} 0,2x - 0,4y = 0,5 \\ 0,02x - 0,02y = 0,05 \end{cases}$$

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0,2x - 0,4y = 0,5 & (1) \\ 0,02x - 0,02y = 0,05 & (2) \end{cases}$$

Luego, despejamos una de las incógnitas, en una de las ecuaciones.

Despejamos x en la ecuación (1).

Transponiendo términos tenemos:

$$0,2x - 0,4y = 0,5$$

$$0,2x = 0,5 + 0,4y$$

$$x = \frac{0,5 + 0,4y}{0,2}$$

Despejamos x en la ecuación (2). Transponiendo términos tenemos:

$$0,02x = 0,05 + 0,02y$$

$$x = \frac{0,05 + 0,02y}{0,02}$$

Seguidamente, igualamos los dos valores de x obtenidos:

$$\frac{0,5 + 0,4y}{0,2} = \frac{0,05 + 0,02y}{0,02}$$

Observemos que ahora tenemos una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado x .

Ahora, resolvamos esta ecuación

$$\frac{0,5 + 0,4y}{0,2} = \frac{0,05 + 0,02y}{0,02}$$

$$0,02(0,5 + 0,4y) = 0,2(0,05 + 0,02y)$$

$$0,010 + 0,008y = 0,01 + 0,004y$$

$$0,008y - 0,004y = 0,01 - 0,010$$

$$0,004y = 0$$

$$y = \frac{0}{0,02}$$

$$y = 0$$

Sustituimos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la ecuación (1)

$$0,2x - 0,4(0) = 0,5$$

$$0,2x - 0 = 0,5$$

$$0,2x = 0,5$$

$$x = \frac{0,5}{0,2}$$

$$x = 2,5$$

La solución es: $\begin{cases} x = 2,5 \\ y = 0 \end{cases}$



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y resolvamos correctamente los siguientes ejercicios

I. Resolvamos correctamente los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando los métodos estudiados.

$$1. \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -8x + 5y = -19 \\ 4x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 7y = 3 \\ 5x + 12y = -8 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - 3x = -14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -3x + 8y = 16 \\ 16x + 5y = 103 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{2}x + y = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 0,1x - 0,2y = 0,7 \\ 0,01x - 0,01y = 0,04 \end{cases}$$

Problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas



EJEMPLO

1. Según la leyenda Euclides fue el autor del siguiente acertijo clásico: “Una mula y un burro llevaban sobre sus lomos unos sacos con mucho peso. Lamentándose el burro del peso de su carga, a lo que la mula le dijo: ¿De qué te quejas? Si yo tomo un saco de los tuyos, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco tu carga se igualará a la mía”. ¿Cuántos sacos llevaba cada quién?



Sea las variables:

x: La carga de la mula

y: La carga del burro

Las ecuaciones son: $x + 1 = 2y$; $y + 1 = x$

El sistema de ecuaciones queda formado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Luego, despejamos una de las incógnitas, en una de las ecuaciones. Despejaremos x en la ecuación (1).

Transponiendo términos tenemos: $x - 2y = -1$

$$x = 2y - 1$$

El valor de x lo sustituiremos en la ecuación (2):

$$(2y - 1) - y = 1$$

$$2y - y = 1 + 1$$

$$y = 2$$

Ahora sustituiremos y en la ecuación (2):

$$x - 2 = 1$$

$$x = 1 + 2$$

$$x = 3$$

La solución es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Por lo tanto, la mula cargaba 2 sacos y el burro cargaba 3 sacos.



EJEMPLO

2. Un huevo y un vaso de leche proporcionan 12,6 gramos de proteína. Si dos vasos de leche y un huevo proporcionan 19,6 gr de proteína, ¿Cuántos gramos de proteína proporciona un vaso de leche y cuántos un huevo?

Sea las variables:

x : gramos de proteína que proporciona un huevo

y : gramos de proteína que proporciona un vaso de leche

Las ecuaciones son: $x + y = 12,6$; $2y + x = 19,6$

El sistema de ecuaciones queda formado de la siguiente manera:

$$x + y = 12,6$$

$$2y + x = 19,6$$

Primeramente, enumeramos cada una de las ecuaciones:

$$x + y = 12,6 \quad (1)$$

$2y + x = 19,6$ (2) Luego, despejamos una de las incógnitas, en cada una de las ecuaciones.

Despejamos y en la ecuación (1).

Transponiendo términos tenemos:

$$x + y = 12,6$$

$$y = 12,6 - x$$

Despejamos x en la ecuación (2).

Transponiendo términos tenemos:

$$2x + y = 19,6$$

$$y = 19,6 - 2x$$

Seguidamente, igualamos los dos valores de x obtenidos:

$$12,6 - x = 19,6 - 2x$$



Observemos que ahora tenemos una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado x .

Resolviendo la ecuación:

$$-x + 2x = 19,6 - 12,6$$

$$x = 19,6 - 12,6$$

$$x = 7$$

Sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la ecuación (1)

$$7 + y = 12,6$$

$$y = 12,6 - 7$$

$$y = 5,6$$

La solución es: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5,6 \end{cases}$

Por lo tanto, un huevo proporciona 7 gramos de proteína y un vaso de leche proporciona 5,6 gramos de proteína.



EJEMPLO

3. Seis libras de café molido y cinco libras de azúcar costaron C\$ 500. Si cinco libras de café y cuatro libras de azúcar cuestan C\$ 415. Calcular el precio de una libra de café y una de azúcar.

Sea las variables:

x : precio de una libra de café

y : precio de una libra de azúcar

Si una libra de café x entonces 6 libras costarán $6x$; Si una libra de azúcar cuesta y entonces 5 libras costarán $5y$; además el costo de esta compra fue de C\$500, tendremos:

$$6x + 5y = 500 \quad (1)$$

Sabemos que 5 libras de café cuestan $5x$ y 4 de azúcar $4y$ y como el costo de esta compra fue C\$415, tendremos:

$$5x + 4y = 415 \quad (2)$$

Reuniendo las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 500 & (1) \\ 5x + 4y = 415 & (2) \end{cases}$$

Para resolver el sistema, utilizaremos el método de reducción: multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la ecuación (2) por - 6. Luego encontramos la diferencia entre las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x + 5y = 500 \\ 5x + 4y = 415 \end{cases} \\ \hline 30x + 25y = 2\,500 \\ -30x - 24y = -2\,490 \\ \hline y = 10 \end{array}$$

Ahora sustituiremos y en cualesquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la (2)

$$5x + 4(10) = 415$$

$$5x + 40 = 415$$

$$5x = 415 - 40$$

$$5x = 375$$

$$x = \frac{375}{5}$$

$$x = 75$$

$$\text{La solución es: } \begin{cases} x = 75 \\ y = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto, el precio de una libra de café molido es C\$75 y el precio de una libra de azúcar es C\$10.



EJEMPLO

4. Una lancha que navega por un río recorre 15 kilómetros en $1\frac{1}{2}$ horas a favor de la corriente y 12 kilómetros en 2 horas en contra de la corriente. Encontrar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas y la velocidad del río.

Definimos las incógnitas:

x: Velocidad de la lancha a favor de la corriente, en km/h

y: Velocidad del río, en Km/h

x + y: Velocidad de la lancha a favor de la corriente

x - y: Velocidad del río en contra de la corriente

Primeramente, encontramos la velocidad de la lancha a favor de la corriente al recorrer 15 kilómetros en 1,5 horas es $\frac{15 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} = 10 \text{ km/h}$ y la velocidad de la lancha en contra de la corriente al recorrer 12 kilómetros en 2 horas es $\frac{12 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 6 \text{ km/h}$.

Seguidamente, definimos las ecuaciones: $x + y = 10$ para describir la lancha a favor de la corriente al recorrer 15 kilómetros en 1,5 horas; y $x - y = 6$ para representar la velocidad de la lancha en contra de la corriente al recorrer 12 kilómetros en 2 horas.

Asignamos a la ecuación $x + y = 10$ (1) y la ecuación $x - y = 6$ (2).

A continuación unimos las dos ecuaciones para formar el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego resolvemos el sistema utilizando el método por reducción:

$$x + y = 10 \quad (1)$$

$$x - y = 6 \quad (2)$$

$$x + y = 10$$

$$x - y = 6$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

Ahora sustituimos x en la ecuación (1):

$$8 + y = 10$$

$$y = 10 - 8$$

$$y = 2$$

La solución es:
$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, la velocidad de la lancha en aguas tranquilas es 8 km/h y la velocidad del río es 2 km/h.



EJEMPLO

5. Encontramos las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro es 400 m.

Sea las variables:

x: ancho de la parcela

y: largo de la parcela

El perímetro de la parcela rectangular es 400 metros, y es 25 metros más larga que ancha equivale a que el largo es veinte y cinco veces el ancho.

Seguidamente, expresamos las dimensiones de la parcela a través de la ecuación:

$2x + 2y = 400$, simplificando podemos escribir la ecuación equivalente y la definimos como la ecuación (1):

$x + y = 200$ (1), de donde:

$y = x + 25$, es lo mismo que escribamos: $-x + y = 25$ y la definimos como la ecuación (2).

A continuación unimos las dos ecuaciones para formar el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego resolvemos el sistema utilizando el método por reducción:

$$x + y = 200 \quad (1)$$

$$-x + y = 25 \quad (2)$$

$$2y = 225$$

$$y = \frac{225}{2}$$

$$y = 112,5$$

El largo de la parcela es 112,5 m.

Calcula el valor del ancho de la parcela y compara los resultados con tres compañeros.



EJEMPLO

6. El perímetro de un cuarto rectangular es 18 metros, y cuatro veces el largo es equivalente a cinco veces el ancho. Encontrar las dimensiones del cuarto.

Definimos las incógnitas:

x : ancho del cuarto

y : largo del cuarto

Seguidamente, expresamos las dimensiones del cuarto a través de la ecuación:

$2x + 2y = 18$, simplificando podemos escribir la ecuación equivalente y la definimos como la ecuación (1):

$$x + y = 9 \quad (1)$$

$4y = 5x$, es lo mismo que escribamos: $4y - 5x = 0$ y la definimos como la ecuación (2)

$$-5x + 4y = 0 \quad (2)$$

A continuación unimos las dos ecuaciones para formar el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego resolvemos el sistema utilizando el método por reducción:

$$x + y = 9 \quad (1)$$

$$-5x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$5x + 5y = 45 \quad (5)$$

$$-5x + 4y = 0$$

$$9y = 45$$

$$y = \frac{45}{9}$$

$$y = 5$$

Ahora sustituimos el valor de y en la ecuación (1).

$$x + 5 = 9$$

$$x = 9 - 5$$

$$x = 4$$



La solución es:
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el ancho del cuarto es 4 metros y el largo es 5 metros.

Comprobando tenemos:

$$2x + 2y = 2(4) + 2(5) = 8 + 10 = 18 \text{ metros.}$$



EJEMPLO

7. Se tienen C\$1 600 en 50 billetes de C\$20 y de a C\$50. ¿Cuántos billetes son de C\$20 y cuántos de C\$50?

Sean las incógnitas:

x: el número de billetes de C\$20

y: el número de billetes de C\$50

Como son 50 billetes en total, entonces obtenemos la ecuación (1):

$$x + y = 50 \quad (1)$$

Seguidamente, expresamos x billetes de C\$20 y se escriben 20x. Igualmente y billetes de C\$50 se escriben 50x. Además la cantidad total de billetes es C\$1 600, tendremos:

$$20x + 50y = 1\,600$$

Dividiendo por 10 la ecuación, resulta y la definimos como ecuación (2):

$$2x + 5y = 160 \quad (2)$$

A continuación unimos las dos ecuaciones para formar el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego resolvemos el sistema utilizando el método por reducción:

$$\begin{array}{r} (1) \quad x + y = 50 \quad \cdot (-5) \\ (2) \quad 2x + 5y = 160 \quad \cdot (1) \\ \hline -5x - 5y = -250 \\ 2x + 5y = 160 \\ \hline -3x = -90 \end{array}$$



$$-3x = -90 \cdot (-1)$$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

$$x = 30$$

Ahora sustituimos el valor de x en la ecuación (1).

$$30 + y = 50$$

$$y = 50 - 30$$

$$y = 20$$

La solución es: $\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$

Por lo tanto, en los 50 billetes hay 30 billetes de C\$20 y 20 billetes de C\$50.

Comprobando $30(20) + 20(50) = 600 + 1\,000 = 1\,600$.



ACTIVIDADES

Copiemos en el cuaderno y resolvamos correctamente los siguientes ejercicios

I. Leamos, analicemos y apliquemos los sistemas de ecuaciones para resolver correctamente los siguientes problemas de aplicación al entorno.

1. Encontramos las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro es 400 m.

2. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

3. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

4. Un personal del ejército avanza 28 kilómetros en $1\frac{3}{4}$ horas río abajo y 24 kilómetros en 3 horas río arriba. Hallar la velocidad en aguas tranquilas y la velocidad del río.
5. Alberto tiene triple de edad que Lucía. Si Alberto tuviese 30 años menos y Lucía 8 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?
6. Se tienen \$120 en 33 billetes de \$5 y de a \$2. ¿Cuántos billetes son de 5 y cuántos de \$2?

AUTOEVALUACIÓN

Leamos, copiemos en el cuaderno y desarrollemos los siguientes ejercicios. Luego encerremos en un círculo el inciso que corresponde a la respuesta correcta.

1. La solución de la ecuación $5x = 8x - 15$ es:
- a. $x = 3$
 - b. $x = -3$
 - c. $x = 5$
 - d. Ninguna de las anteriores es correcta.
2. La solución de la ecuación $y - 5 = 3y - 5$ es:
- a. $y = 0$
 - b. $y = -1$
 - c. $y = 1$
 - d. Ninguna de las anteriores es correcta.
3. La solución de la ecuación $21 - 6x = 27 - 8x$ es:
- a. $x = 3$
 - b. $x = -3$
 - c. $x = 0$
 - d. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. La solución de la ecuación $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$ es:

a. $x = \frac{22}{12}$

b. $x = -\frac{21}{12}$

c. $x = \frac{21}{12}$

d. Ninguna de las anteriores es correcta.

5. La propiedad que justifica la ecuación: $x + 1,05 = x + 1,05$ es:

a. Propiedad reflexiva

b. Propiedad simétrica

c. Propiedad transitiva

d. Ninguna de las anteriores es correcta

6. La propiedad que justifica la expresión “Si $x = z$ y $z = 10y$ entonces $x = 12y$ ”

a. Propiedad reflexiva

b. Propiedad simétrica

c. Propiedad transitiva

d. Ninguna de las anteriores es correcta

7. La solución de la ecuación $\frac{7}{8}x - 5 = 3x + 10$ es:

a. $x = -120$

b. $x = 120$

c. $x = 110$

d. Ninguna de las anteriores es correcta

8. La solución de la ecuación $(2 - x)(1 - x) - x(x - 1) = 12$ es:

- a. $x = -5$
- b. $x = 5$
- c. $x = 10$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

9. La solución de la ecuación $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{5} = 15$ es:

- a. $x = -111$
- b. $x = 111$
- c. $x = 110$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

10. La solución de la ecuación $\frac{x-2}{5} = \frac{2-x}{7} + 3$ es:

- a. $x = \frac{43}{4}$
- b. $x = -\frac{43}{4}$
- c. $x = \frac{128}{12}$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

11. La solución de la ecuación $-[x - 3 - (5x + 1)] = x$ es:

- a. $x = -\frac{4}{3}$
- b. $x = \frac{4}{3}$
- c. $x = -\frac{3}{4}$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

12. La solución de la ecuación $\frac{x+5}{7} = \frac{5-x}{8} + 1$ es:

a. $x = -\frac{52}{15}$

b. $x = \frac{51}{15}$

c. $x = -\frac{51}{15}$

d. Ninguna de las anteriores es correcta

13. En tres días un comerciante ganó C\$1 850. Si cada día ganó $\frac{2}{5}$ de lo que ganó el día anterior, ¿cuánto ganó cada día? La solución es:

a. Primer día C\$190, el segundo C\$474 y el tercero ganó C\$1186

b. Primer día C\$474, el segundo C\$190 y el tercero ganó C\$1186

c. Primer día C\$1186, el segundo C\$474 y el tercero ganó C\$190

d. Ninguna de las anteriores es correcta

14. La suma de la mitad y la tercera parte de un número equivale al triple del número disminuido en 5. Hallar el número. La solución es:

a. El número es 20

b. El número es 10

c. El número es 30

d. Ninguna de las anteriores es correcta

15. Un jefe de familia ha decidido repartir la herencia de C\$600 000 entre dos hijos de modo que el hijo menor reciba menos $\frac{4}{7}$ de la parte que recibirá el hijo mayor. Encontrar la cantidad de córdobas que recibirá cada uno.

a. El hijo mayor recibirá C\$400 000 y el menor C\$200 000

b. El hijo mayor recibirá C\$410 000 y el menor C\$190 000

c. El hijo mayor recibirá C\$420 000 y el menor C\$180 000

d. Ninguna de las anteriores es correcta

16. La solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$ por el método de sustitución es:

- a. $x = -3, y = -2$
- b. $x = 3, y = 2$
- c. $x = 3, y = -2$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

17. La solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + 5y = -24 \\ 8x - 3y = 19 \end{cases}$ por el método de igualación es:

- a. $x = -\frac{1}{2}, y = 5$
- b. $x = \frac{1}{2}, y = -5$
- c. $x = -\frac{1}{2}, y = -5$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

18. La solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 4x - 3y = -23 \end{cases}$ por el método de igualación es:

- a. $x = -2, y = -5$
- b. $x = -2, y = 5$
- c. $x = 2, y = 5$
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

19. Encontramos las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 40 m más larga que el ancho y que el perímetro es 900 m.

- a. El ancho es 205 y el largo es 245.
- b. El ancho es 200 y el largo es 250.
- c. El ancho es 225 y el largo es 225.
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

20. Un personal del ejército avanza 28 kilómetros en $1\frac{3}{4}$ horas río abajo y 24 kilómetros en 3 horas río arriba. Hallar la velocidad en aguas tranquilas y la velocidad del río.

- a. El ancho es 205 y el largo es 245.
- b. El ancho es 200 y el largo es 250.
- c. El ancho es 225 y el largo es 225.
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

21. Una pechuga de pollo asado y una pechuga de pollo frito proporciona 44 gramos de proteínas. Si dos pechugas de pollo asado y una de pollo frito proporcionan 60 gramos de proteínas. ¿Cuántos gramos de proteína proporcionan una pechuga de pollo asado y una pechuga de pollo frito?

- a. Pechuga de pollo asado: 18 gramos y pollo frito: 26 gramos.
- b. Pechuga de pollo asado: 26 gramos y pollo frito: 18 gramos.
- c. Pechuga de pollo asado: 24 gramos y pollo frito: 20 gramos.
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

22. María pagó C\$ 151 por Cinco libras de papas y cuatro libras de cebollas. Si por 8 libras de papas y 7 libras de cebollas (a los mismos precios) pagó C\$253. Calcular el precio de una libra de papas y una de cebollas.

- a. Precio de la libra de papas: C\$14 y de la cebolla: C\$20.
- b. Precio de la libra de papas: C\$16 y de la cebolla: C\$18.
- c. Precio de la libra de papas: C\$15 y de la cebolla: C\$19.
- d. Ninguna de las anteriores es correcta

IV UNIDAD

APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA EN EL CAMPO

Desempeños de Aprendizaje

Resuelve problemas de sus entornos rurales vinculados con área y perímetro de polígonos regulares así como círculo y circunferencia.

Ejes Transversales

Interactúa con su medio natural, social y cultural de manera pacífica, responsable y respetuosa



1 Área y perímetro de polígonos regulares

Indicador de Logro:

Resuelve problemas de la cultura campesina utilizando área y perímetro de polígonos regulares.

1.1 Definición de polígonos

¿Alguna vez hemos visto un panal de cera de abejas?
¿Qué figura geométrica se puede observar?

Y la fruta de melocotón o membrillo, ¿qué figura geométrica forma? ¿Y el caparazón de una tortuga?

¿Qué otras figuras geométricas observas en la naturaleza?



En nuestro alrededor podemos ver muchos objetos con formas geométricas. En la Naturaleza abundan más las líneas curvas, pero en los objetos contruidos por el hombre predominan las rectas. Muchas de las figuras que podemos observar a nuestro alrededor están limitadas por segmentos, por ejemplo, las ventanas, puertas, pizarra, cuadros, entre otros. Estas figuras se llaman **polígonos**.



El ser humano es el transcurso de su desarrollo tuvo la necesidad de delimitar terrenos para el cultivo, ya que era su fuente de trabajo. Para realizar estas divisiones utilizó algunas formas poligonales, como el rectángulo, el cuadrado y también el triángulo.

Antes de adentrarnos en el estudio de los polígonos, recordemos algunos conceptos importantes



Línea poligonal.- Una línea poligonal está formada por varios segmentos consecutivos. Las líneas poligonales pueden ser abiertas o cerradas.

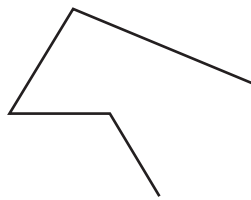
Polígono.- Es la región de plano limitada por una línea poligonal cerrada.



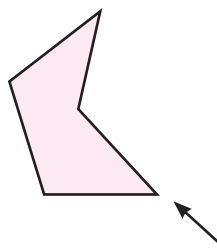
Veamos algunos



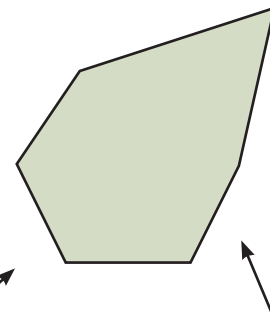
EJEMPLO



Línea poligonal abierta

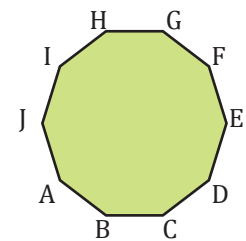
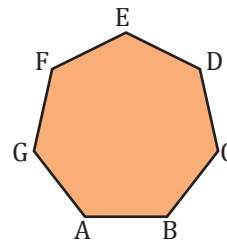
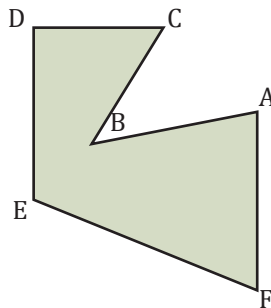
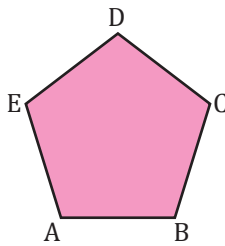
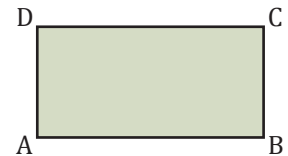
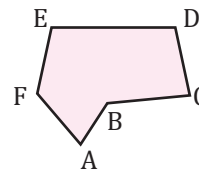
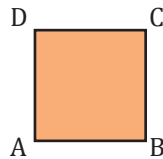
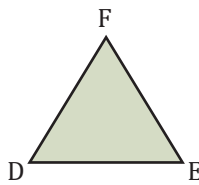


Línea poligonal cerrada



Polígono

Un polígono es una porción del plano cerrada, limitada por un número cualquiera de segmentos.



¿Cómo se llama el polígono más sencillo que podemos formar, de acuerdo al número de lados?

Polígonos

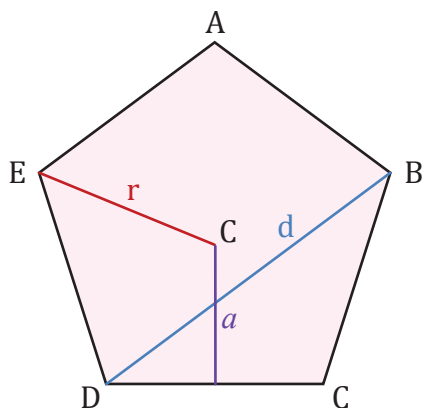
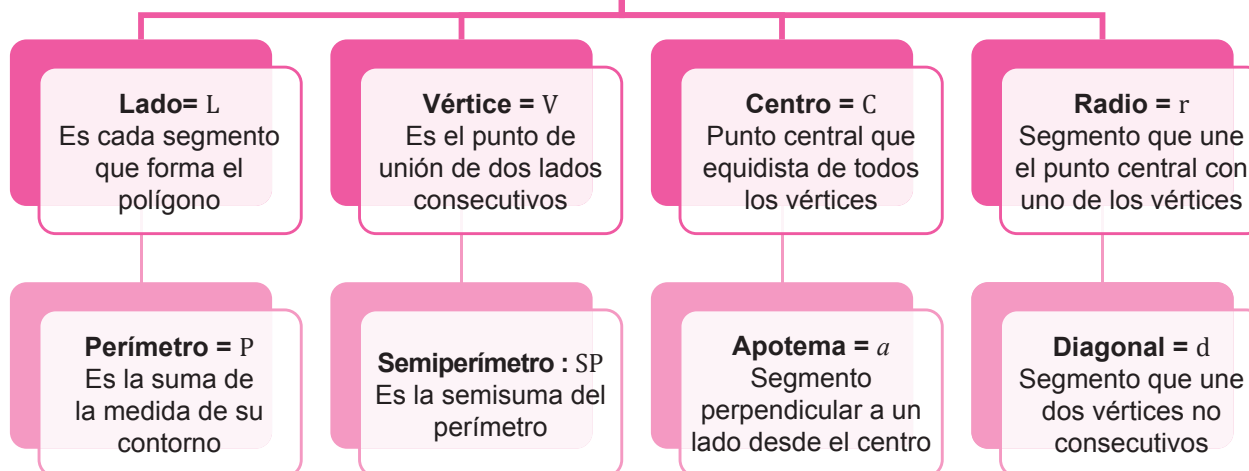
Es una porción del plano cerrada, limitada por un número cualquiera de segmentos.

Cuando todos los lados y ángulos son iguales se llaman polígonos regulares y si son diferentes se llaman polígonos irregulares.

De los polígonos mostrados anteriormente, ¿cuáles son polígonos regulares?

Veamos ahora cuáles son los elementos de un polígono

Elementos de un polígono regular



A, B, C, D, E: Vértices
 AB, BC, CD, DE, EA: Lados
 d: diagonal
 r: Radio
 a: Apotema

¡Comprobemos lo aprendido!

- En nuestro cuaderno dibujemos una línea poligonal abierta de 5 segmentos y otra poligonal cerrada de 4 segmentos. ¿Cómo se llama al trozo de plano encerrado dentro de la línea poligonal cerrada?
- Dibujemos en nuestro cuaderno:
 - Un polígono regular y otro irregular.
 - Un polígono de seis lados iguales, tracemos dos diagonales y coloreemos de verde dos lados consecutivos.
 - Un rectángulo y tracemos dos diagonales. ¿Cuántos triángulos se han formado?
 - Un polígono de cinco lados iguales y tracemos todas las diagonales posibles. ¿Cuántas hemos dibujado?

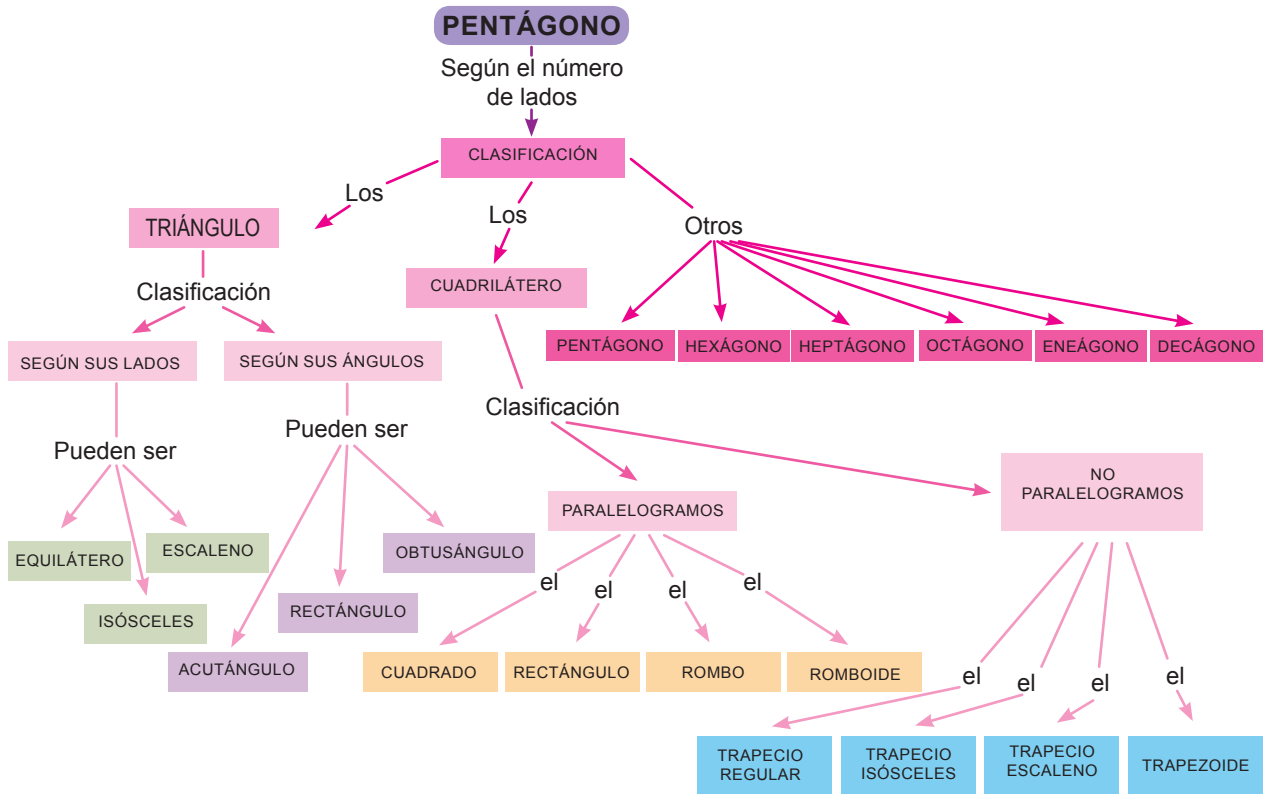
3. Estos son los moldes que usa un pastelero para hacer galletas. Señalemos los que sean polígonos.



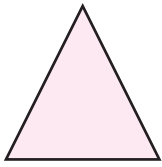
4. Indiquemos las señales de tránsito que tengan forma de polígono regular.



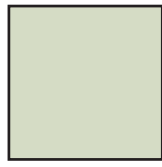
1.2 Clasificación de los polígonos



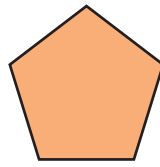
Los polígonos se clasifican por su número de lados en:



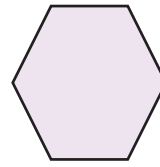
Triángulo:
3 lados



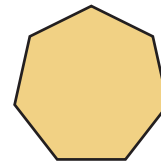
Cuadrilátero:
4 lados



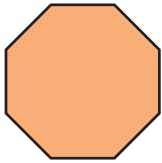
Pentágono:
5 lados



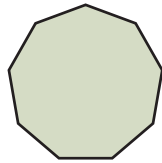
Hexágono:
6 lados



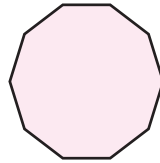
Heptágono:
7 lados



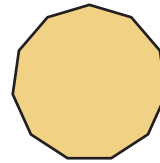
Octágono:
8 lados



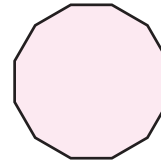
Eneágono:
9 lados



Decágono:
10 lados

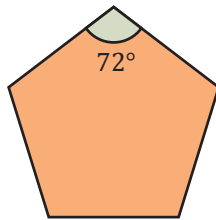


Endecágono:
11 lados

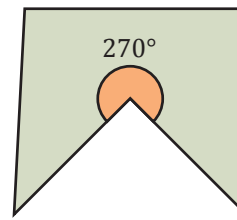


Dodecágono:
12 lados

Los polígonos se clasifican por sus ángulos en:



Polígonos convexos:
Tiene todos sus ángulos menores que 180 grados



Polígonos cóncavos:
Al menos uno de sus ángulo es mayor que 180 grados

A continuación conoceremos el nombre de los polígonos de hasta 15 lados

| Lados | Nombre |
|-------|--------------------|
| 3 | Triángulo |
| 4 | Cuadrilátero |
| 5 | Pentágono |
| 6 | Hexágono |
| 7 | Heptágono |
| 8 | Octágono |
| 9 | Eneágono, nonágono |
| 10 | Decágono |
| 11 | Endecágono |
| 12 | Dodecágono |
| 13 | Tridecágono |
| 14 | Tetradecágono |
| 15 | Pentadecágono |

Tradicionalmente por error se ha utilizado la siguiente simbología para indicar la medida de un ángulo

$$\sphericalangle A = 35^\circ \text{ o } m\angle A = 35^\circ$$

En este texto se trabajará suprimiendo el símbolo grado ($^\circ$) y la medida del ángulo anterior utilizando el lenguaje matemático internacional será representado como:

$$\sphericalangle A = 35$$

$$\text{o}$$

$$m\angle A = 35$$

1.3 Diagonales. Suma de los ángulos internos y externos

En todo polígono: El número de lados es igual al número de vértices y el número de Ángulos internos.

En todo polígono de “n” lados, desde cada vértice se puede trazar (n – 3) diagonales.

El número total de diagonales de un polígono es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

La suma de los ángulos internos de un polígono:

$$\sum_{k=1}^n i = 180(n-2)$$

En los polígonos equiángulos cada ángulo interior mide:

$$i = \frac{180(n-2)}{n}$$

En todo polígono convexo las medidas de los ángulos exteriores, uno por vértice, suman 360.

$$\sum_{k=1}^n e = 360$$

Cada ángulo exterior mide:

$$\angle e = \frac{360}{n}$$

La medida de un ángulo central de un polígono es: $\angle c = \frac{360}{n}$

De acuerdo a lo anterior, analicemos:

1. ¿Cuántas diagonales tiene el pentágono?

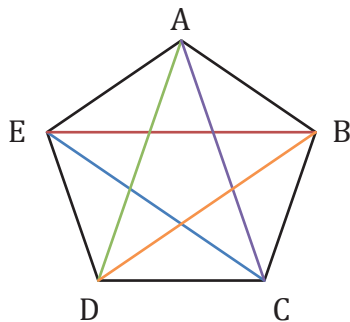
Solución:

El pentágono tiene 5 lados iguales, por lo tanto aplicando la fórmula para calcular el número de diagonales, tenemos $n = 5$:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$D = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 5 \text{ diagonales}$$

Comprobemos el resultado obtenido, trazando las diagonales en un pentágono



2. Calcular la suma de los ángulos internos del nonágono.

Solución:

Considerando que un nonágono tiene 9 lados y de acuerdo a la fórmula

$$\sum_{k=1}^n i = 180 (n - 2)$$

$$\sum_{k=1}^n i = 180 (9 - 2) = 180 \cdot 7 = 1260$$

3. Determine el número de lados de un polígono si se sabe que la suma de las medidas de los ángulos interiores es: 7020

Solución:

De acuerdo a la fórmula

$\sum_{k=1}^n i = 180 (n - 2)$. En este caso conocemos la suma de los ángulos interiores, lo que tenemos que encontrar es el valor de "n".

$$7020 = 180 (n - 2)$$

$$n = \frac{7020}{180} + 2 = 39 + 2 = 41 \text{ lados}$$

4. Determine la medida del ángulo del vértice de un heptágono

Solución:

Un heptágono tiene 7 lados iguales, por lo tanto $n = 7$.

Cada ángulo interior de un polígono regular se calcula utilizando la fórmula:

$$i = \frac{180 (n - 2)}{n} \quad \text{Sustituyendo los valores obtenemos}$$

$$i = \frac{180 (7 - 2)}{7} = \frac{180 \cdot 5}{7} = \frac{900}{7} = 128,57$$

5. La suma de las medidas de siete ángulos de un octágono es 1000 grados ¿Cuál es la medida del octavo ángulo?

Solución:

Considerando que un octágono tiene 8 lados y de acuerdo a la fórmula la suma de sus ángulos interiores es igual a:

$$\sum_{k=1}^n i = 180 (n - 2) \text{ Sustituyendo los valores}$$

$$\sum_{k=1}^n i = 180 (8 - 2) = 180 \cdot 6 = 1080$$

Como siete de sus ángulos miden 1000, la diferencia, que corresponde al octavo ángulo será

$$1080 - 1000 = 80 \text{ grados}$$

6. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo exterior mide 15 grados?

Solución:

Considerando que cada ángulo exterior mide 15 grados y utilizando la fórmula:

$$\angle e = \frac{360}{n} \rightarrow n = \frac{360}{\angle e} = \frac{360}{15} = 24 \text{ lados}$$

¡Comprobemos lo aprendido!

Resolvamos en nuestros cuadernos los siguientes ejercicios:

1. ¿Cuántas diagonales tienen el tetradecágono?
2. ¿Cuántas diagonales tiene el heptágono?
3. Calcular la suma de los ángulos interiores del dodecágono.
4. Calcular la suma de los ángulos internos del decágono.
5. Determine el número de lados de un polígono si se sabe que la suma de las medidas de los ángulos interiores es:
 - a) 1800
 - b) 1980
 - c) 1260
 - d) 6120
 - e) 3420

6. Dado el número de lados de un polígono regular. Determine la medida del ángulo del vértice del polígono.

- a) 9
- b) 12
- c) 15
- d) 20
- e) 100
- f) 10
- g) 8

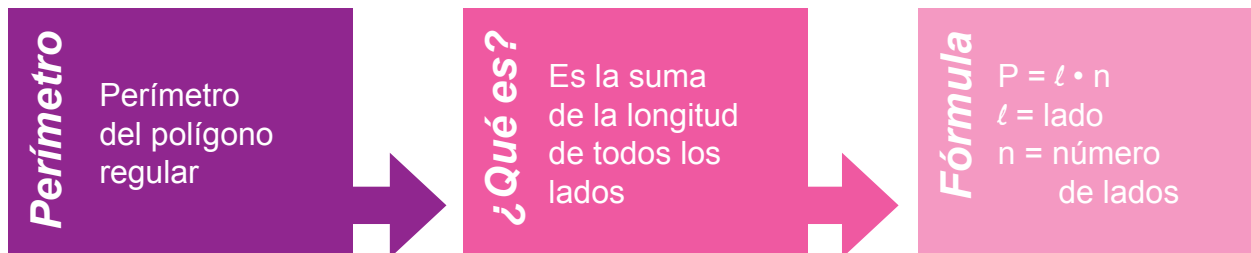
7. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo exterior mide?

- a) 18
- b) 108
- c) 144

Sigamos adelante... Calculemos ahora el perímetro y área de los polígonos.

1.4 Perímetro y área de polígonos

Recordemos que el perímetro de una cualquier figura geométrica es la suma de todos sus lados.



| Áreas de polígonos | | | | |
|---|--|---|---|---|
| Triángulo | Cuadrado | Rombo | Romboide | Trapecio |
| $A = \frac{b \cdot h}{2}$ b = base h = altura | $A = l \cdot l$ $A = l^2$ l = lado | $A = \frac{D \cdot d}{2}$ D = Diagonal mayor d = diagonal menor | $A = b \cdot h$ b = base h = altura | $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ B = Base mayor b = base menor h = altura |

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo siempre se cumple que la longitud del lado mayor elevada al cuadrado es igual a la suma de la longitud de cada uno de los otros lados elevadas al cuadrado.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esta fórmula se conoce como el **Teorema de Pitágoras**.

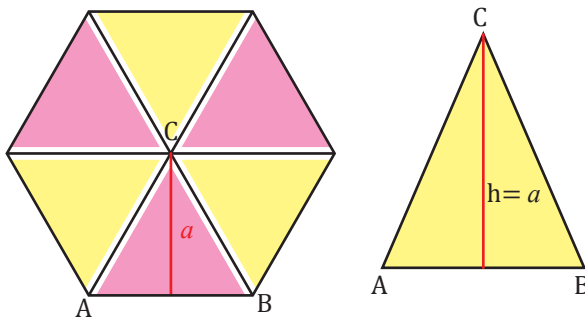
El lado mayor se llama **hipotenusa** y los otros lados **catetos**

Longitud de la circunferencia. Área del círculo

La longitud de una circunferencia es igual a $L_c = 2\pi r$

Podemos pensar en el círculo como un polígono de infinitos lados. Su perímetro sería como la longitud de la circunferencia y su apotema coincidiría con el radio del círculo.

El área de un círculo es $A = \pi r^2$



A partir del cálculo del área del triángulo, puede calcularse en área de cualquier polígono, regular o no, siempre que se cuente con los datos suficientes.

Analicemos el hexágono que aparece a la izquierda. Vemos que los podemos dividir en 6 triángulos. Para calcular su área basta con sumar el área de los 6 triángulos iguales en que se dividió

Si el área de cada triángulo es: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

En este caso la altura de cada triángulo es igual a la apotema del hexágono, y la base del triángulo es igual al lado del polígono, por lo tanto, el área del polígono será:

$$A = (\text{Cantidad de lados}) \left(\frac{\text{Longitud del lado} \cdot \text{apotema}}{2} \right)$$

Lo que equivale a decir,

$$\text{Área del polígono regular} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{pa}{2}$$

Analícemos ahora la solución de algunos ejercicios

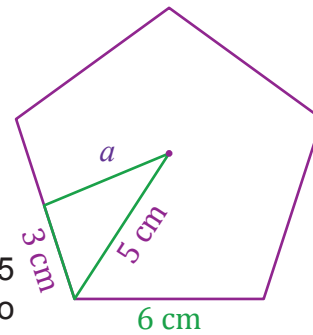


EJEMPLO

Hallar el perímetro y el área del pentágono regular :

Solución:

Como nuestro polígono es un pentágono significa que tiene 5 lados iguales, que miden cada uno 6 cm. Por lo tanto el perímetro será.



$$P = \ell \cdot n = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$$

El área será igual a:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$

En nuestro caso desconocemos la longitud de la apotema, pero conocemos los lados del triángulo rectángulo al que pertenece por lo que aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su valor:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$5^2 = a^2 + 3^2$$

$$25 = a^2 + 9$$

$$25 - 9 = a^2$$

$$16 = a^2 \quad \text{Extrayendo raíz cuadrada}$$

$$a = 4$$

Conocida la apotema y el perímetro sustituimos en la fórmula para calcular el área del polígono.

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{30 \cdot 4}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

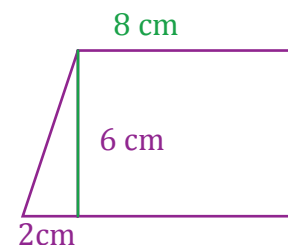


EJEMPLO

Hallar el perímetro y el área del trapezio rectángulo:

Solución:

Nuestro polígono es un trapezio de base mayor 10 cm y base menor 8 cm, su altura es 6 cm, debemos encontrar el otro lado, que es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos miden 2 y 6 cm respectivamente. Para ello aplicamos el teorema de Pitágoras.



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$c^2 = 2^2 + 6^2$$

$$c^2 = 4 + 36$$

$$c^2 = 40 \quad \text{Extrayendo raíz cuadrada}$$

$$c = 6,32 \text{ cm}$$

El perímetro será:

$$P = 8 + 10 + 6 + 6,32 = 30,32 \text{ cm}$$

El área del trapecio es igual a:

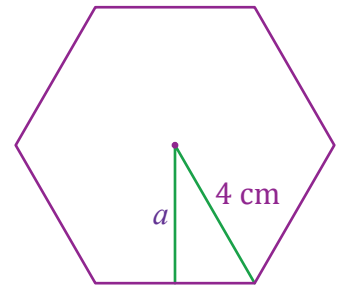
$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right)h \quad \text{Sustituyendo obtenemos}$$

$$A = \frac{(10 + 8)}{2} \cdot 6 = \frac{18}{2} \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54 \text{ cm}^2$$



EJEMPLO

Hallar el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.



Solución:

Nuestro polígono es un hexágono ($n = 6$), de radio $r = 4 \text{ cm}$, lo que indica que cada lado mide 4 cm. Para calcular el área debemos conocer cuánto mide la apotema, por lo tanto debemos calcularla. Conocemos la hipotenusa que es igual al radio, sabemos que la apotema divide al lado en dos partes iguales por lo tanto el cateto mide 2 cm

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \text{ Sustituyendo los valores}$$

$$4^2 = a^2 + 2^2$$

$$16 = a^2 + 4$$

$$16 - 4 = a^2$$

$$12 = a^2 \quad , \text{ Extrayendo raíz cuadrada}$$

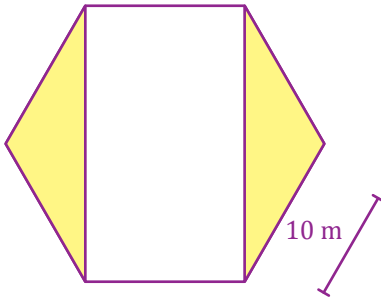
$$a = 3,46 \text{ cm}$$

Ahora podemos calcular el área aplicando la fórmula:

$$A = \frac{n \ell a}{2} = \frac{6(4)(3,46)}{2} = \frac{83,04}{2} = 41,52 \text{ cm}^2$$



EJEMPLO



Hallar el área de la superficie de color amarillo.

Solución:

Para calcular el área que nos piden debemos encontrar el área del hexágono y luego restar el área del rectángulo.

Procedamos a calcular el área del hexágono que tiene 10 m de lado, pero antes hallemos la apotema del hexágono, teniendo en cuenta que ésta es la altura de cada uno de los 6 triángulos equiláteros.

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

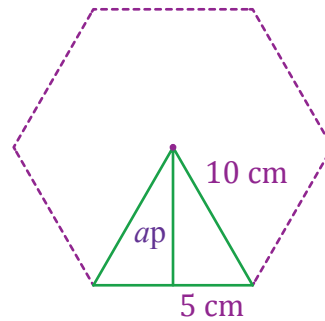
$$10^2 = a^2 + 5^2$$

$$100 = a^2 + 25$$

$$100 - 25 = a^2$$

$$75 = a^2 \quad \text{Extrayendo raíz cuadrada}$$

$$a = 8,66 \text{ m}$$



El área del hexágono es:

$$A = \frac{n \ell a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = \frac{519,6}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$$

Ahora calculamos el área del rectángulo que mide 10 m en la base y tiene una altura igual a dos veces la apotema, es decir

$$h = 2 \cdot 8,66 = 17,32 \text{ m}$$

Entonces,

$$A = b h = 10 \cdot 17,32 = 173,2 \text{ m}^2$$

Así que,

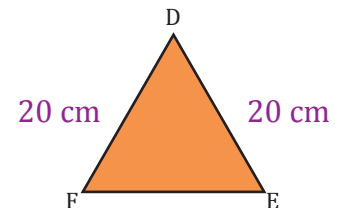
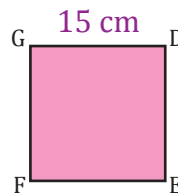
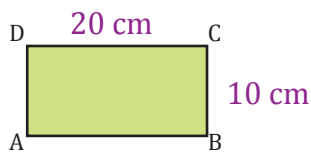
$$A_{\text{amarillo}} = 259,8 - 173,2 = 86,6 \text{ m}^2$$

Resolvamos problemas de aplicación



EJEMPLO

1. Un finquero desea hacer un corral para guardar animales y el terreno del cual dispone se presta para construirlo de distintas formas. El analiza las siguientes posibilidades de medidas que se adjuntan, considerando que cuenta con 60m. de alambre. Se trata de saber en cuál se cubre mayor superficie y, por lo mismo, cuál puede albergar a mayor cantidad de animales, es decir, en cuál se podría aprovechar mejor la superficie de acuerdo a la forma. Todas las formas tienen 60m. de perímetro.



Solución:

Podemos observar que los tres polígonos: rectángulo, triángulo y cuadrado tienen el mismo perímetro: 60 m

Calculemos el área de cada uno de ellos

Área del rectángulo:

$$A = b h = 20(10) = 200 \text{ m}^2$$

Área del triángulo:

Como desconocemos la altura la calculamos aplicando el teorema de Pitágoras

$$c^2 = h^2 + b^2 \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$20^2 = h^2 + 10^2$$

$$400 = h^2 + 100$$

$$400 - 100 = h^2$$

$$300 = h^2 \quad \text{Extrayendo raíz cuadrada}$$

$$h = 17,32 \text{ m}$$

Ahora aplicamos la fórmula para calcular el áreas de un triángulo

$$A = \frac{b h}{2} = \frac{20 \cdot 17,32}{2} = \frac{346,4}{2} = 173,2 \text{ cm}^2$$

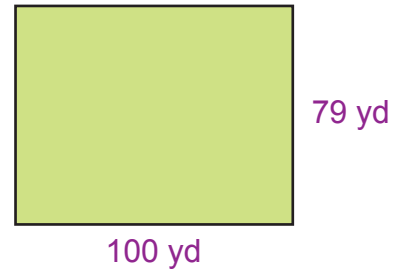
Área del cuadrado:

$$A = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

$$A = (15\text{m})(15\text{m}) = 225\text{m}^2$$

Como podemos ver el área del cuadrado es la mayor, por lo que conviene al finquero construir el corral de forma cuadrada, de 15 m de lado, para albergar mayor cantidad de animales.

2. Pedro recibió un préstamo a través de la Cooperativa para sembrar tomates. Determinemos el área cultivada si el ancho es de 79 yardas y su longitud es de 100 yardas.



Solución:

El terreno tiene forma rectangular, por eso aplicamos la fórmula para calcular el área de un rectángulo

Área del rectángulo:

$$A = b h = (79\text{yd})(100\text{yd}) = 7,900 \text{ yd}^2$$

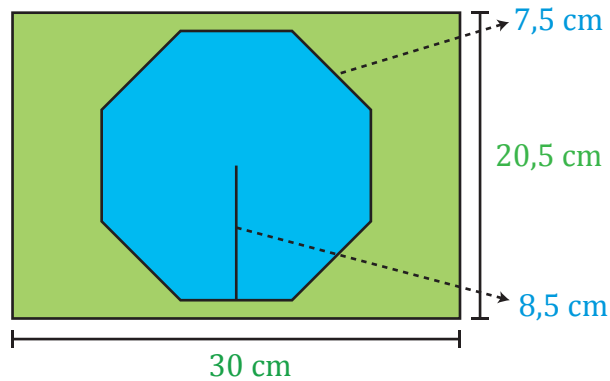
3. Don Juan, con el préstamo que le proporcionó CARUNA, decidió construir una pila, para reproducción de peces, de forma octogonal, rodeada de césped, como se muestra a continuación. Calculemos el área de la pila y también la superficie que ocupa el césped.

Solución: El área del octágono es:

$$A = \frac{n \ell a}{2}$$

$$A = \frac{8 \cdot 7,5 \cdot 8,5}{2}$$

$$A = \frac{510}{2} = 255 \text{ m}^2$$



El área cubierta por el césped será igual a la del rectángulo de 30 m de largo por 20,5 m de ancho menos el área de la pila.

Calculemos el área del rectángulo:

$$A = \frac{b h}{2} = \frac{(30\text{cm})(20,5\text{cm})}{2} = \frac{615}{2} = 307,5 \text{ cm}^2$$

El área cubierta por el césped será:

$$A_{\text{césped}} = 307,5 - 255 = 52,5 \text{ m}^2$$

4. Si un galón de pintura cubre 400 pies cuadrados, ¿Cuántos galones se necesitan para pintar un granero que mide 10 pies de diámetro y 50 pies de altura.(sin contar con el techo)

Solución:

Desenrollemos idealmente el cilindro que forma el granero. Nos queda un rectángulo que tiene un largo igual a la longitud de la circunferencia de radio igual a 5 pies y altura igual a 50 pies.

Calculemos la longitud de la circunferencia:

$$\begin{aligned} L_c &= 2 \pi r \\ L_c &= 2(3,1416)(5\text{pies}) \\ &= 31,42 \text{ pies} \end{aligned}$$

El área del granero será:

$$A = b h = 31,42 \cdot 50 = 1,571 \text{ pies}^2$$

Si por cada 400 pies cuadrados se necesita un galón de pintura, entonces, la cantidad de galones de pintura que se necesitan es:

$$1,571 \div 400 = 3,97 \approx 4 \text{ galones de pintura}$$

5. Una tapa de un pozo de forma circular la están reparando y deben protegerla con malla, si su radio mide $\frac{1}{2}$ m. ¿Cuánta malla se necesita?

Solución:

La tapa del pozo es un ejemplo de circunferencia. Por ello para calcular la cantidad de malla necesitamos determinar la longitud de la circunferencia de radio igual a 0.5 m.

Calculemos la longitud de la circunferencia:

$$\begin{aligned} L_c &= 2 \pi r \\ L_c &= 2 \cdot 3,1416 \cdot 0,5\text{m} \\ L_c &= 3,1416 \text{ m} \end{aligned}$$



6. A un pozo de forma circular se le pondrá 4 corridas de alambre para evitar accidentes. Si el diámetro es de 2 m. ¿Cuánto alambre se necesitará?

Solución:

De manera similar al problema anterior, el pozo es un ejemplo de circunferencia. Como el diámetro es dos veces el radio, entonces $r = 1\text{ m}$

Calculemos la longitud de la circunferencia:

$$L_c = 2 \pi r$$

$$L_c = 2 (3,1416)(1\text{m})$$

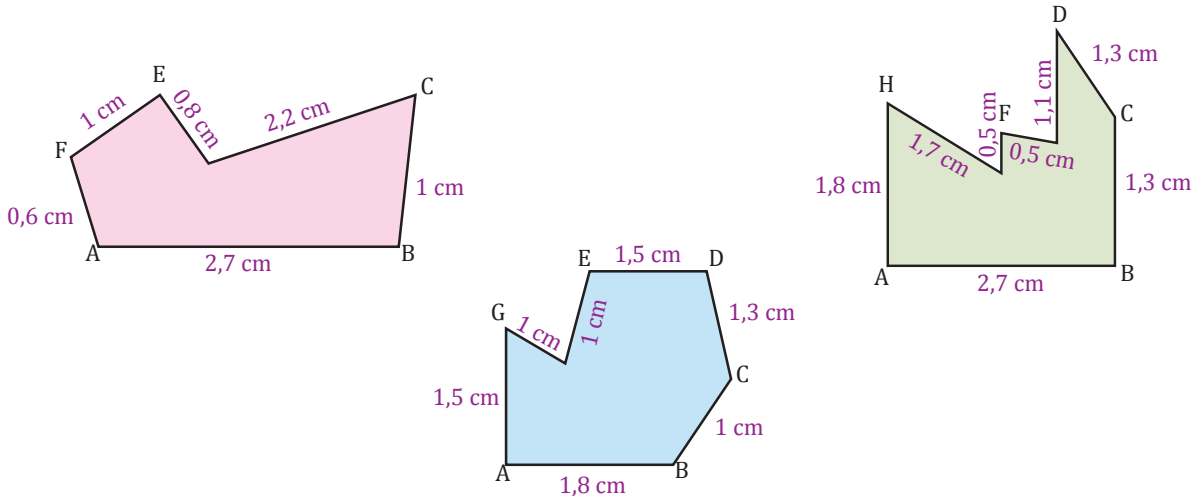
$$L_c = 6,2832 \text{ m}$$

Como se necesitan 4 corridas de alambre de 6,2832 m cada una, en total se necesitan $6,2832 \cdot 4 = 25,1328 \text{ m}$

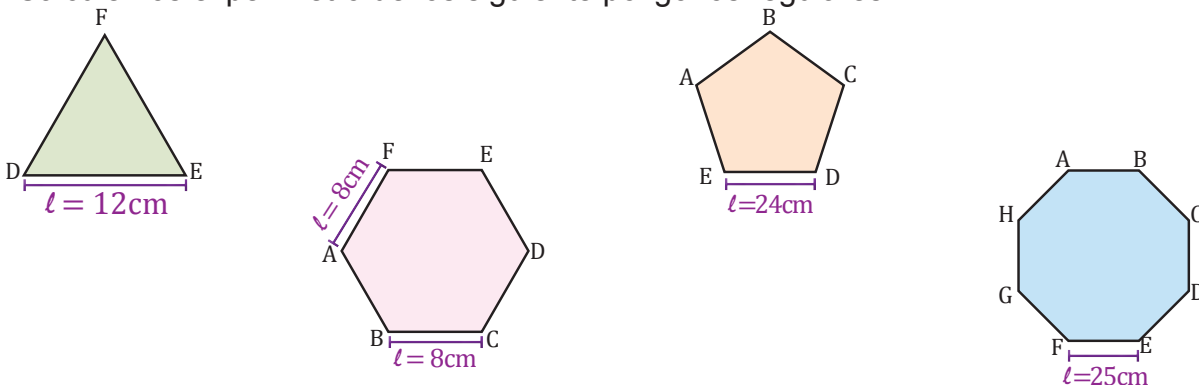
¡Comprobemos lo aprendido!

En nuestros cuadernos resolvamos los siguientes ejercicios

I. Calculemos el perímetro de los siguientes polígonos:



II. Calculemos el perímetro de los siguiente polígonos regulares



III. Resuelve los siguientes problemas:

1. Calculemos el perímetro y el área de un cuadrado de lado 4 m.
2. La base de un rectángulo es 5 m. y la altura la mitad de la base. Calculemos el área y el perímetro.
3. El área de un cuadrado es $5,76 \text{ cm}^2$. Calculemos el perímetro del cuadrado.
4. Calcula el área de un heptágono sabiendo que el lado mide 8 cm. y la apotema 8,30 cm.
5. Una valla publicitaria mide 9 metros de base y su área es de 27 m^2 . ¿Cuál es su altura?
6. Halla la apotema de la tapadera de una bombonera con forma de hexágono regular, cuya área es de $314,86 \text{ cm}^2$ y su lado es de 11 cm
7. Todas las mañanas Pedro da 8 vueltas corriendo al patio del colegio. El patio tiene forma rectangular y mide 60 m de largo y de ancho 15 m menos que de largo. ¿Cuántos metros corre Pedro cada día?
8. Me he comprado una parcela rectangular de 525 m^2 de superficie y 35 m de largo. ¿Cuántos metros mide de ancho?
9. Un depósito para el agua que se utiliza en los plantillo de una finca tiene 48m de diámetro. ¿Cuál es su área?
10. En una ciudad hay un parque cuya forma es la de un pentágono irregular. Los lados miden respectivamente, 45, 39, 29, 17 y 39 metros. ¿Qué longitud tiene la valla que lo rodea?
11. En las fiestas de un pueblo han montado una carpa para las verbenas, cuya forma es la de un polígono regular de 11 lados. La carpa está rodeada por una guirnalda con bombillos que tiene una longitud total de 68 m. ¿Cuánto mide el lado de la carpa?
12. Una empresa fábrica sombrillas para la playa. Para ello usa tela cortada en forma de polígono regular. Calcula la cantidad de tela que necesitará para fabricar 36 sombrillas de 10 lados si sabemos que el lado mide 173 cm y su apotema mide 266,21 cm.
13. ¿Cuál es el perímetro de una circunferencia que tiene 8 m. de diámetro?
14. ¿Cuál es el perímetro de una circunferencia que tiene 10 cm. de radio?
15. El perímetro de una circunferencia es 12,56 km. ¿Cuánto mide su diámetro?
16. El perímetro de una circunferencia es 31,4 m. ¿Cuánto mide su radio?
17. A la pista de un circo que tiene forma circular, hay que ponerle lona alrededor, si su radio mide 5 m. ¿Cuántos metros de lona se necesita?
18. Una bicicleta tiene 30 cm. de radio. Si recorre una distancia de 12.560 m. ¿Cuántas vueltas ha dado cada rueda?

2

Círculo y circunferencia

Indicador de Logro:

Plantea y resuelve problemas del ámbito rural utilizando el marco conceptual de Círculo y circunferencia.

2.1 Círculo y circunferencia

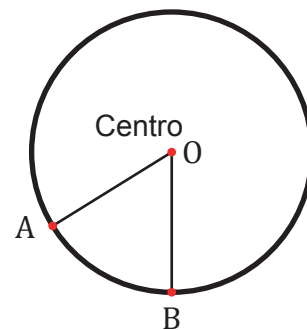
Recordemos ¿A qué llamamos circunferencia?

La **circunferencia** es una línea curva, cerrada y plana, formada por los puntos que están a igual distancia del punto centro.

Es decir, la circunferencia es cerrada porque forma un ciclo, vuelve sobre sí misma, y es plana porque todos sus puntos están en un mismo plano.

Observemos la siguiente figura

Los puntos A y B pertenecen a la circunferencia y se encuentran a la misma distancia del centro O.



¿Y a qué llamamos círculo?

El **círculo** es la superficie del plano limitada por la circunferencia. Es decir, está formado por todos los puntos de la circunferencia y todos los puntos interiores a ella.

Ejemplos prácticos de una circunferencia son: Aro, anillo, hula-hula, borde de vaso, la orilla de un plato, entre otros.

Ejemplos prácticos del círculo: Disco, plato, fondo de vaso, tapa de tarro, CD, entre otros.

Recordemos que el perímetro o longitud de la circunferencia es: $L = 2 \pi r$

Y el área del círculo es $A = \pi r^2$

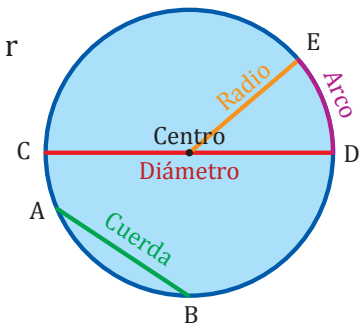
Elementos de la circunferencia

| Radio | Centro | Cuerda | Arco | Diámetro | Semicircunferencia |
|--|---|--|---|--|---|
| Es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto de la misma | Es el punto del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia | Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia | Es la parte de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos. A cada cuerda le corresponde dos arcos, uno de menor longitud que el otro | Es cualquier cuerda que pasa por el centro | El diámetro divide a la circunferencia en dos semicircunferencias iguales |

¿Qué relación encontramos entre el diámetro y el radio de una circunferencia?

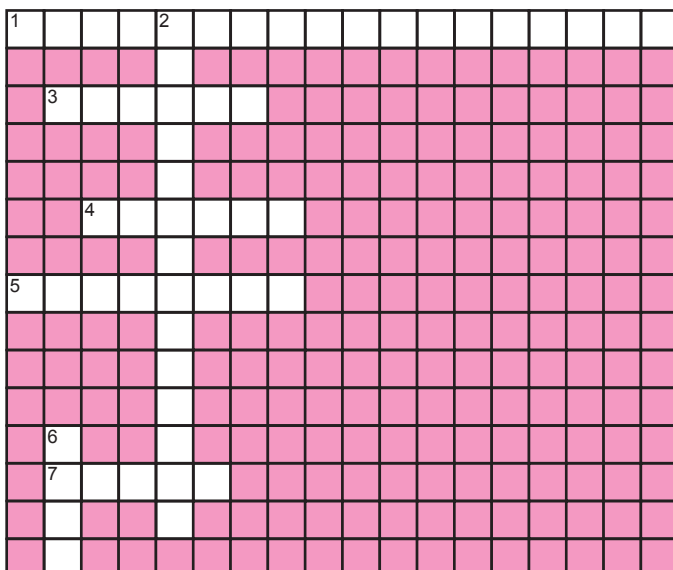
Observamos que el diámetro es igual a dos veces el radio $d = 2r$ o lo que es igual

$$r = \frac{d}{2}$$



¡Comprobemos lo aprendido!

Completemos el siguiente crucigrama



Horizontales:

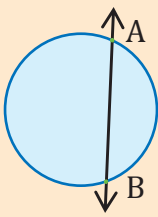
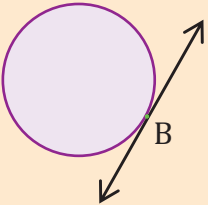
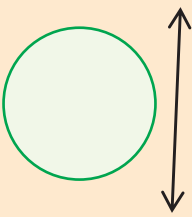
- 1) Cada una de las dos mitades de la circunferencia
- 3) Segmento que une dos puntos de la circunferencia
- 4) Punto del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia
- 5) Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia
- 7) Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto de la misma

Verticales:

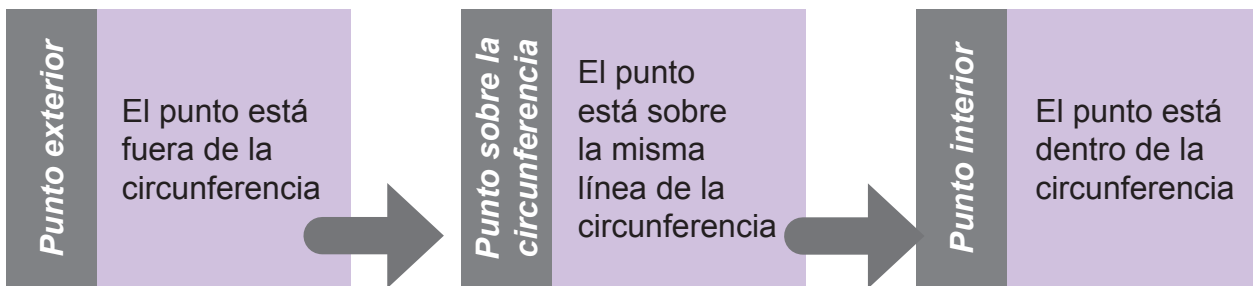
- 2) Línea curva, cerrada y plana, formada por los puntos que están a igual distancia del punto centro
- 6) Parte de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos

2.2 Posiciones relativas de un punto y una recta respecto a una circunferencia

Posiciones relativas una recta respecto a una circunferencia

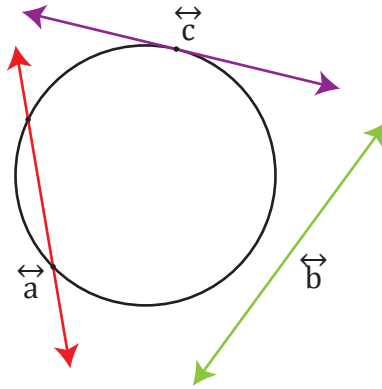
| <i>Recta secante</i> | <i>Recta tangente</i> | <i>Recta exterior</i> |
|---|---|---|
| Es aquella que toca dos puntos de la circunferencia | Es aquella que toca un solo punto de la circunferencia | Es aquella que no toca ningún punto de la circunferencia |
|  |  |  |

Posiciones relativas de un punto respecto a una circunferencia



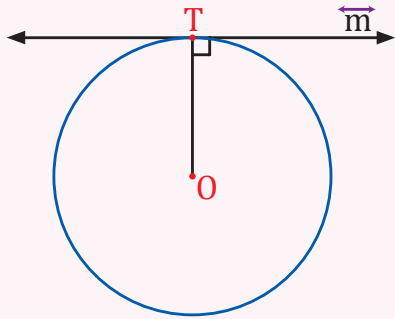
¡Comprobemos lo aprendido!

Indica cómo son las siguientes rectas con respecto a la circunferencia:

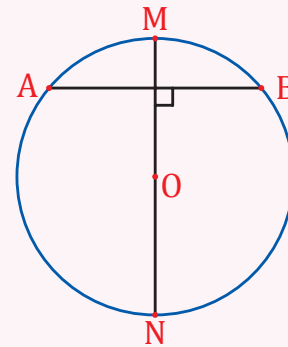


Propiedades importantes

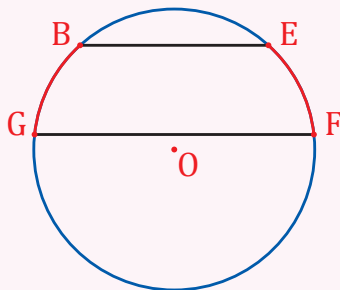
- 1** Toda recta tangente a una circunferencia, es perpendicular al radio en el punto de tangencia. En la figura, m es tangente, luego: $m \perp \overline{OT}$



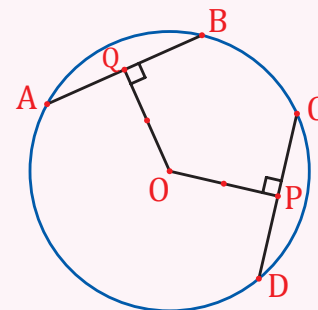
- 2** Un diámetro perpendicular a una cuerda de una circunferencia, biseca a la cuerda y a los arcos que subtiende.



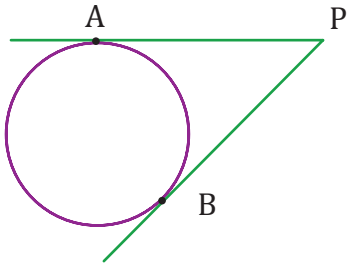
- 3** Si se trazan dos cuerdas paralelas \overline{BE} y \overline{GF} , los arcos \widehat{GB} y \widehat{EF} son congruentes.



- 4** Dos cuerdas de una circunferencia, que equidistan del centro, son congruentes.



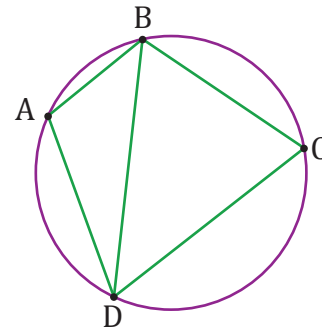
Propiedad de las tangentes



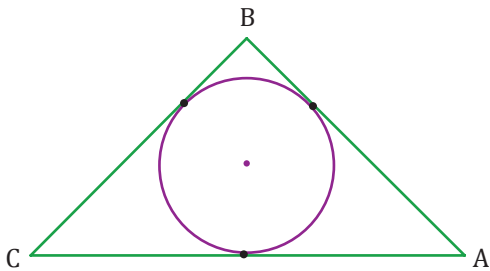
Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes.

Un **polígono inscrito** es un polígono tal que todos sus lados son cuerdas de una circunferencia. Una circunferencia circunscrita es una circunferencia que pasa por todos los vértices de un polígono.

Así, en la figura, los triángulos ABD, BCD y el cuadrilátero ABCD son polígonos inscritos en la circunferencia. La circunferencia es una circunferencia circunscrita sobre el cuadrilátero.



Polígonos inscritos
Circunferencia circunscrita



Polígono circunscrito
Circunferencia inscrita

Un **polígono circunscrito** es un polígono tal que todos sus lados son tangentes a una circunferencia. Una circunferencia inscrita es aquella que es tangente a todos los lados de un polígono.

Así, el triángulo ABC es un polígono circunscrito a la circunferencia. La circunferencia es una circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

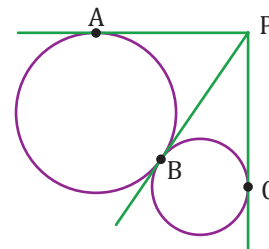
Apliquemos estas propiedades en la solución de los siguientes ejemplos:

 EJEMPLO

Si \overline{PA} , \overline{PB} y \overline{PC} son tangentes, siendo A, B y C los puntos de tangencia, se sabe que $PA = 10 \text{ cm}$. Calcule la medida del segmento \overline{PC}

Solución:

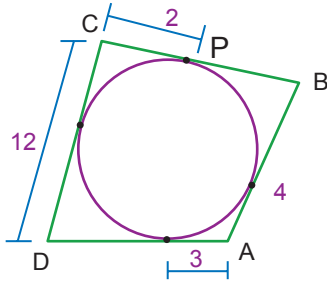
De acuerdo a la propiedad de las tangentes: **Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes**, tenemos que \overline{PA} es congruente a \overline{PB} y como \overline{PB} y \overline{PC} son tangentes al círculo más pequeño y por la misma propiedad de las tangentes, tenemos que \overline{PB} y \overline{PC} son congruentes, por lo tanto \overline{PA} y \overline{PC} son congruentes y miden 10 cm .





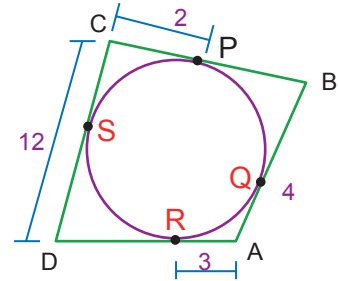
EJEMPLO

En la siguiente figura, P es el punto de tangencia, calcule la longitud del segmento \overline{PB} .



Solución:

Coloquemos en el gráfico los puntos en el círculo por donde pasan las tangentes.



De acuerdo a la propiedad de las tangentes: Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes, tenemos que \overline{PB} es congruente a \overline{QB} y \overline{AR} (que mide 3), es congruente con \overline{AQ} ; por lo tanto $AQ = 3$

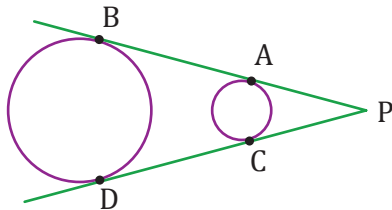
Sabemos que $AB = AQ + BQ = 4$, de donde $BQ = 4 - 3 = 1$. Así que $QB = PB = 1$



EJEMPLO

En la figura mostrada $PA = 15$ y $PD = 15$, calcule la distancia entre los puntos A y B.

Solución:



De acuerdo a la propiedad de las tangentes: Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes, tenemos que \overline{PD} es congruente a \overline{PB} y como $PD = 15$, entonces $PB = 15$. Si conocemos que $PA = 5$, entonces $AB = 15 - 5 = 10$.



EJEMPLO

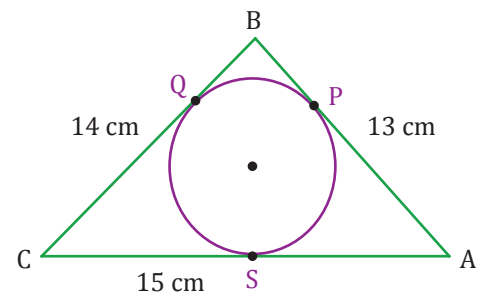
Los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} de un triángulo ABC son tangentes a la circunferencia inscrita en los puntos P, Q y S respectivamente, y miden 13 cm, 14 cm y 15 cm respectivamente. Calcule la longitud del segmento \overline{AP} .

Solución:

Dibujemos primeramente la situación planteada:

Solución:

De acuerdo a la propiedad de las tangentes: Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes,



Así tenemos que:

| | |
|--------------------------------------|---|
| $\overline{QB} \cong \overline{PB}$ | 1 |
| $\overline{PA} \cong \overline{SA}$ | 2 |
| $\overline{QC} \cong \overline{SC}$ | 3 |
| $\overline{QB} + \overline{QC} = 14$ | 4 |
| $\overline{PB} + \overline{PA} = 13$ | 5 |
| $\overline{SA} + \overline{SC} = 15$ | 6 |

Resolvamos este sistema de ecuaciones:

Sumemos 1 y 3

$$\overline{QB} \cong \overline{PB} \quad 1$$

$$\overline{QC} \cong \overline{SC} \quad 3$$

$$\overline{QB} + \overline{QC} = \overline{PB} + \overline{SC} \quad \text{Considerando la } 4$$

$$14 = \overline{PB} + \overline{SC}$$

Sumemos 2 y 3

$$\overline{PA} \cong \overline{SA} \quad 2$$

$$\overline{QC} \cong \overline{SC} \quad 3$$

$$\overline{PA} + \overline{QC} = \overline{SA} + \overline{SC} \quad \text{Considerando la } 6$$

$$\overline{PA} + \overline{QC} = 15$$

Sumemos las dos ecuaciones encontradas

$$\overline{PB} + \overline{SC} = 14$$

$$\overline{PA} + \overline{QC} = 15$$

$$\overline{PB} + \overline{PA} + \overline{SC} + \overline{QC} = 14 + 15 \quad \text{Considerando la ecuación } 5 \text{ y la } 3$$

$$13 + 2\overline{SC} = 29, \text{ de donde}$$

$$2\overline{SC} = 29 - 13$$

$$2\overline{SC} = 16$$

$$\overline{SC} = 8$$

Considerando la ecuación 6 $\overline{SA} + \overline{SC} = 15$, tenemos que

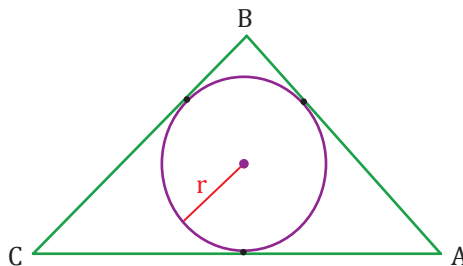
$$\overline{SA} = 15 - \overline{SC}$$

$$\overline{SA} = 15 - 8 = 7$$

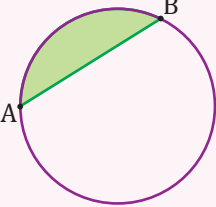
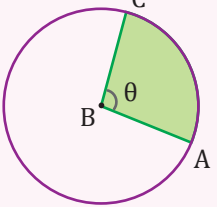
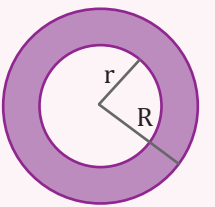
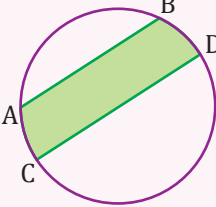
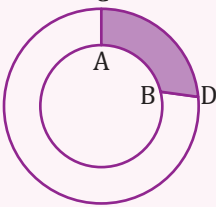
De acuerdo a la ecuación 2 $\overline{PA} = \overline{SA} = 7$, que es lo que buscamos, de donde la longitud de \overline{PA} es 7, es decir, $\overline{PA} = 7$

¡Comprobemos lo aprendido!

1. En un $\triangle ABC$ se inscribe una circunferencia, siendo H el punto de tangencia en el lado \overline{AB} . Calcule la longitud del segmento \overline{BH} sabiendo que el lado $AC = 10\text{cm}$ y el perímetro del triángulo es 42cm .
2. Se tiene un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia. Calcule el perímetro del cuadrilátero si tres de sus lados consecutivos miden 5cm , 6cm y 11cm .
3. En el triángulo rectángulo ABC , recto en B , \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} son tangentes. Si $AB = 6\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$ y $AC = 10\text{ cm}$. Calcule la longitud del radio (r).



Regiones circulares

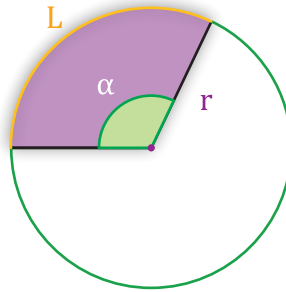
| <i>Segmento circular:</i> | <i>Sector circular:</i> | <i>Corona circular:</i> | <i>Zona circular:</i> | <i>Trapezio circular:</i> |
|--|---|---|--|---|
| <p>Es la porción del círculo limitada por un arco y su cuerda.</p>  | <p>Es la porción del círculo limitada por dos radios.</p>  | <p>Es la porción del círculo limitada por dos círculos concéntricos.</p>  | <p>Porción del círculo limitada por dos cuerdas.</p>  | <p>Es la porción del círculo limitada por dos radios y una corona circular.</p>  |

Veamos ahora cómo calcular el área de los elementos del círculo y algunos ejemplos de aplicación de las mismas.

2.3 Longitud de arco y Área de regiones circulares

Longitud de un arco de circunferencia

$$L = \frac{2 \pi r \alpha}{360}$$



EJEMPLO

Los brazos de un columpio miden 1,8 m de largo y pueden describir como máximo un ángulo de 146°. Calcula el espacio recorrido por el asiento del columpio cuando el ángulo descrito en su balanceo es el máximo.



Solución:

Aplicamos la fórmula para calcular la longitud de un arco de circunferencia

$$L = \frac{2 \pi r \alpha}{360}, \text{ Sustituyendo los valores}$$

$$L = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 1,8 \cdot 146}{360} = \frac{1651,22}{360} = 4,59 \text{ m}$$



EJEMPLO

Un faro barre con su luz un ángulo plano de 130. Si el alcance máximo del faro es de 6 millas, ¿cuál es la longitud máxima en metros del arco correspondiente?

Solución:

Primero calculemos la longitud del arco que barre la luz del faro y luego convertimos las millas a metros, recordando que 1 milla = 1 852 m

$$L = \frac{2 \pi r \alpha}{360}, \text{ Sustituyendo los valores}$$

$$L = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 6 \cdot 130}{360} = \frac{4900,9}{360} = 13,61 \text{ millas}$$

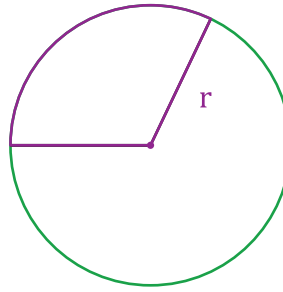
Como una milla equivale a 1 852 m, debemos multiplicar el resultado

$$13,61 \cdot 1\,852 = 25\,205,72 \text{ m}$$



Área del sector circular

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$



EJEMPLO

Hallar el área del sector circular cuya cuerda es el lado del cuadrado inscrito, siendo 4 cm el radio de la circunferencia.

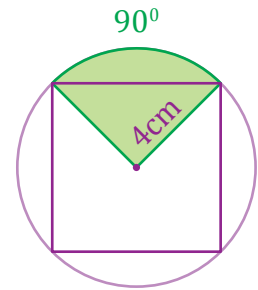
Solución:

El ángulo que forman los dos radios es igual a 90 grados.

Aplicando la fórmula del área del sector circular tenemos:

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{3,1416 (4\text{cm})^2 90}{360} = \frac{4523,9\text{cm}^2}{360} = 12,57 \text{ cm}^2$$



EJEMPLO

El área de un sector circular de 90 grados es $4\pi \text{ cm}^2$. Calcular el radio del círculo al que pertenece y la longitud de la circunferencia.

Solución:

Para calcular el radio del círculo partimos de la fórmula ya conocida del área del sector circular

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$4\pi \text{ cm}^2 = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \quad \text{De donde}$$

$$\frac{4\pi \text{ cm}^2 \cdot 360}{90 \cdot \pi} = r^2$$

$$16\text{cm}^2 = r^2 \quad \text{Extrayendo raíz cuadrada, tomamos la principal:}$$

$$r = 4\text{cm}$$

Ahora calculamos la longitud de la circunferencia

$$L_c = 2\pi r$$

$$L_c = 2(31\,416)(4\text{cm})$$

$$L_c = 25,13 \text{ cm}$$



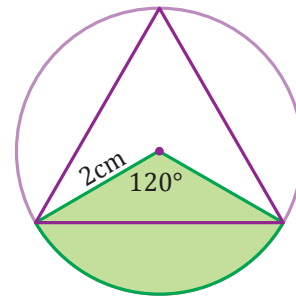
EJEMPLO

Calcular el área de un sector circular cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito, siendo 2 cm el radio de la circunferencia.

Solución:

El ángulo que forman los dos radios es igual a 120 grados.

Aplicando la fórmula del área del sector circular tenemos:



$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{3,1416(2\text{cm})^2 120}{360} = \frac{1507,97\text{cm}^2}{360} = 4,19 \text{ cm}^2$$



EJEMPLO

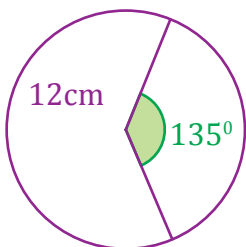
Un molinete de riego tiene un alcance de 12 m y un ángulo de giro de 135°. Calcular el área del sector circular mojado por el molinete.

Solución:

Representemos la situación planteada mediante el siguiente gráfico



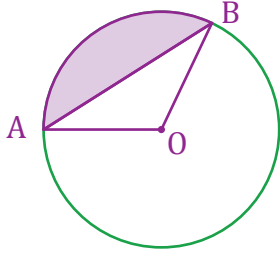
Aplicando la fórmula del área del sector circular tenemos:



$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{3,1416 (12\text{cm})^2 135}{360} = \frac{38\,880 \text{ cm}^2}{360} = 108 \text{ cm}^2$$

Área de un segmento circular



El área del segmento circular es igual al área del sector circular menos el área del triángulo.



EJEMPLO

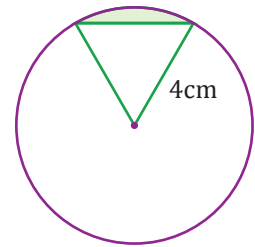
Sobre un círculo de 4 cm de radio se traza un ángulo central de 60 grados. Calcular el área del segmento circular comprendido entre la cuerda que une los extremos de los dos radios y su arco correspondiente.

Solución:

Primero calculemos el área del sector circular

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

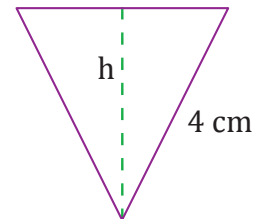
$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{3,1416 (4\text{cm})^2 60}{360} = \frac{3015,94}{360} = 8,38 \text{ cm}^2$$



Ahora calculamos el área del triángulo. Para poder aplicar la fórmula necesitamos calcular la altura aplicando el teorema de Pitágoras. Observamos que el triángulo formado es un triángulo equilátero y cada lado mide 4 cm ($r = 4 \text{ cm}$). Como la altura divide al lado opuesto en la mitad, el otro cateto mide 2 cm. Así que,

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 3,46 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3,46}{2} = \frac{13,84}{2} = 6,92 \text{ cm}^2$$

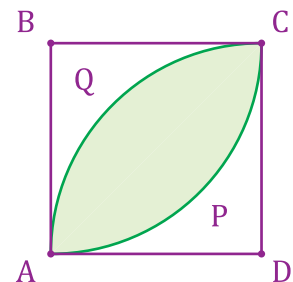


El área del segmento circular será igual a $8,38 - 6,92 = 1,46 \text{ cm}^2$



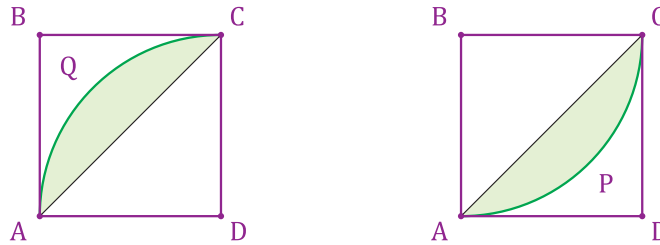
EJEMPLO

Halla el área de la parte sombreada, siendo $AB = 10 \text{ cm}$, ABCD un cuadrado y APC Y AQC arcos de circunferencia de centros B y D.



Solución:

La parte sombreada se compone de dos segmentos circulares, de igual área.



Área del segmento circular = Área del sector circular – Área del triángulo.

Primero calculemos el área del sector circular, considerando que el arco de la circunferencia tiene un ángulo de 90 grados.

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{3,1416 (10\text{cm})^2 90}{360} = \frac{28274,4\text{cm}^2}{360} = 78,5 \text{ cm}^2$$

Ahora calculamos el área del triángulo. Tenemos que los dos catetos miden 10 cm

$$A = \frac{b h}{2} = \frac{10\text{cm} \cdot 10\text{cm}}{2} = \frac{100\text{cm}^2}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

El área del segmento circular será: $78,5 - 50 = 28,5 \text{ cm}^2$

El área buscada será: $28,5 \text{ cm}^2 \cdot 2 = 57 \text{ cm}^2$



EJEMPLO

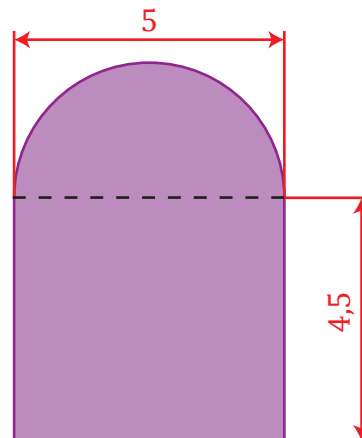
Calculemos el área de la figura en color gris. Las medidas las tenemos acotadas en la misma figura:

Solución:

Tenemos un semicírculo de radio 2,5 cm (mitad del diámetro que es 5) y un rectángulo de 5 cm de largo por 4,5 cm de alto o ancho:

Calculemos el área del semicírculo:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \text{Sustituyendo los valores, tenemos}$$



$$A = \frac{3,1416 \cdot (2,5)^2}{2}$$

$$A = \frac{3,1416 \cdot 6,25}{2} = \frac{19,64}{2} = 9,82 \text{ cm}^2$$

Calculemos ahora el área del rectángulo:

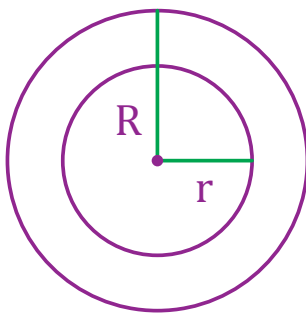
$$A = \text{largo} \cdot \text{ancho} = 5 \cdot 4,5 = 22,5 \text{ cm}^2$$

El área total de la figura será:

$$A_T = 9,82 + 22,5 = 32,32 \text{ cm}^2$$

Área de una corona circular

El área de una corona circular es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.



$$A = \pi (R^2 - r^2)$$



EJEMPLO

En un parque de forma circular de 70 m de radio hay situada en el centro una fuente, también de forma circular, de 5 m de radio. Calcula el área de la zona de paseo.

Solución:

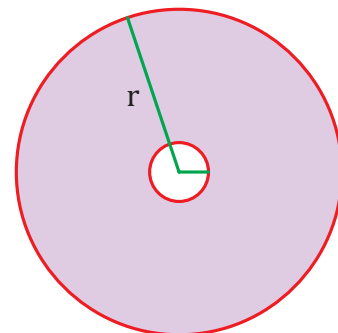
Aplicamos la fórmula

$$A = \pi (R^2 - r^2) \text{ Sustituyendo los valores}$$

$$A = 3,1416 (70^2 - 5^2)$$

$$A = 3,1416 (4\,900 - 25)$$

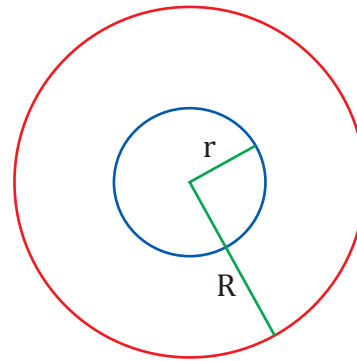
$$A = 3,1416(4\,875) = 153\,15,2 \text{ m}^2$$





EJEMPLO

Un caballo está amarrado a un poste con un cuerda de longitud 10 m, el caballo solo se puede movilizar en el área que la cuerda se lo permita. Si incrementamos 10 metros la longitud de la cuerda, en cuánto se incrementa el área por el cual se moviliza el caballo?



Solución:

Grafiquemos primeramente el área por la cual se moviliza el caballo.

Inicialmente el caballo se moviliza por un área que es igual al área del círculo de 10 m de radio

Aplicando la fórmula tenemos

$$A = \pi r^2 \text{ Sustituyendo los valores tenemos}$$

$$A = \pi r^2 = 3,1416 \cdot 10^2 = 3,1416 \cdot 100 = 314,16 \text{ m}^2$$

Ahora calculemos el incremento del área cuando se aumenta la cuerda 10m más. En este caso tenemos que calcular el área de la corona circular.

Aplicamos la fórmula

$$A = \pi (R^2 - r^2) \text{ Sustituyendo los valores}$$

$$A = 3,1416 (20^2 - 10^2)$$

$$A = 3,1416 (400 - 100)$$

$$A = 3,1416 (300) = 942,48 \text{ m}^2$$

Ahora el caballo se desplaza en un área igual a

$$942,48 \text{ m}^2 + 314,16 \text{ m}^2 = 1256,64$$

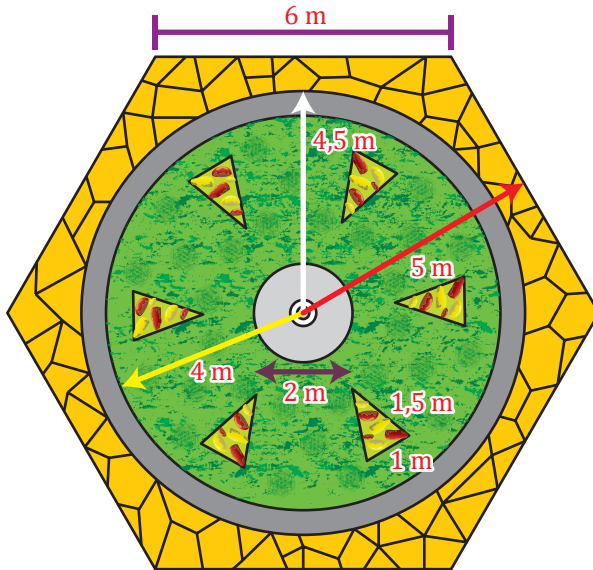
Como lo que nos preguntan es en cuánto se incrementa el área, establecemos la relación $\frac{1256,64}{314,16} = 4$

Concluimos que el área aumenta cuatro veces el área original.



EJEMPLO

En nuestra comunidad para recreación de los niños y niñas, en cumplimiento a la restitución de derechos de la niñez nicaragüense de gozar de una recreación sana, se piensa construir un parque que tenga las siguientes partes y medidas en metros:



1. La parte exterior tiene forma de hexágono rellena de piedras planas.
2. Un paseo circular en color gris
3. Zona de césped de hierba (color verde)
4. 6 pequeñas superficies triangulares con rosas rojas y amarillas en el césped
5. Una fuente central en color gris.

¿Cuál es la superficie de:

- a) Suelo con piedras planas
- b) El paseo circular (color gris)
- c) El césped
- d) Los rosales
- e) La fuente central

Solución:

Para dar respuestas a estas inquietudes, procedamos de la siguiente manera:

» Si todo el jardín fuese un hexágono su área sería:

$$A = \frac{n \ell a}{2} \quad \text{Sustituyendo los valores, tenemos}$$

$$A = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ m}^2$$

Si a esta superficie le quitamos el círculo mayor que marca el paseo obtendríamos el área de la parte empedrada:

Área del círculo mayor del paseo:

$$A_{\text{c}írc \text{ mayor}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{c}írc \text{ mayor}} = 3,1416 \cdot 4,5^2 = 63,62 \text{ m}^2$$

Por lo que el **área del empedrado** será:

$$90 \text{ m}^2 - 63,62 \text{ m}^2 = 26,38 \text{ m}^2$$

Aplicaciones de la Geometría Euclídana en el campo

Para encontrar el área del paseo circular debemos restar el área del círculo menor del círculo mayor.

Hallamos el área del círculo menor del paseo:

$$A_{\text{c\u00edrc menor}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{c\u00edrc menor}} = 3,1416 (4)^2 = 50,26 \text{ m}^2$$

La diferencia de los dos \u00c1rculos que componen el paseo nos dar\u00e1 el \u00e1rea del mismo:

$$63,62 \text{ m}^2 - 50,26 \text{ m}^2 = 13,36 \text{ m}^2$$

Para calcular el \u00e1rea del c\u00e9sped, razonamos de la siguiente manera: Si al \u00e1rea formada por el c\u00edrculo menor del paseo le quitamos el \u00e1rea que ocupa la fuente obtenemos el \u00e1rea del c\u00e9sped incluidos los 6 rosales. Entonces, calculemos esto y luego le restamos el \u00e1rea de los 6 rosales. As\u00ed:

$$A_{\text{fuente}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{fuente}} = (3,1416) 1^2 = 3,1416 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{c\u00edrc menor}} - A_{\text{fuente}} = 50,26 \text{ m}^2 - 3,1416 \text{ m}^2 = 47,12 \text{ m}^2$$

\u00c1rea de los 6 rosales corresponde al \u00e1rea de 6 tri\u00e1ngulos is\u00f3sceles con base 1 m y lado igual a 1,5 m.

Para calcular la altura aplicamos el teorema de Pit\u00e1goras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ sustituyendo}$$

$$1,5^2 = 0,5^2 + h^2$$

$$2,25 - 0,25 = h^2$$

$$2 = h^2$$

$$h = 1,41 \text{ m}^2$$

Ahora calcular el \u00e1rea de un tri\u00e1ngulo

$$A_{\text{tri\u00e1ngulo}} = \frac{b h}{2} = \frac{1 (1,41)}{2} = 0,71 \text{ m}^2$$

El \u00e1rea de los 6 tri\u00e1ngulos (rosales) ser\u00e1:

$$6(0,71 \text{ m}^2) = 4,26 \text{ m}^2$$

El \u00e1rea del c\u00e9sped ser\u00e1:

$$47,12 \text{ m}^2 - 4,26 \text{ m}^2 = 42,86 \text{ m}^2$$

Como una forma de comprobación de nuestros resultados:

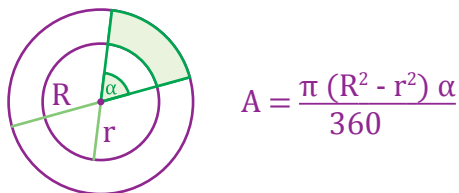
La suma de la parte empedrada más el área del paseo circular más la zona de césped que contiene a los 6 rosales más el área de la fuente debe coincidir con el área considerando que todo el jardín fuese un hexágono.

Veamos si esto es así:

$$26,38 + 13,36 + 47,12 + 3,14 = 90 \text{ m}^2$$

Área de un trapezio circular

El área del **trapezio circular** es igual al **área del sector circular mayor** menos el **área del sector circular menor**.



EJEMPLO

Dadas dos circunferencias concéntricas de radio 8 y 5 cm, respectivamente, se trazan los radios OA y OB, que forman un ángulo de 60. Calcular el área del trapezio circular formado.

Solución:

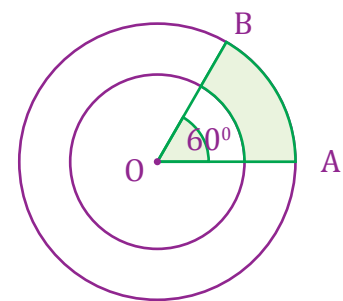
Aplicando la fórmula

$$A = \frac{\pi (R^2 - r^2) \alpha}{360} \quad \text{Sustituyendo los valores}$$

$$A = \frac{3,1416 (8^2 - 5^2) 60}{360}$$

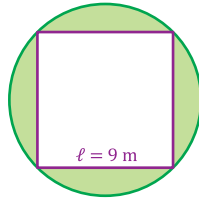
$$A = \frac{3,1416 (64 - 25) 60}{360}$$

$$A = \frac{3,1416 \cdot 39 \cdot 60}{360} = \frac{7351,34}{360} = 20,42 \text{ cm}^2$$

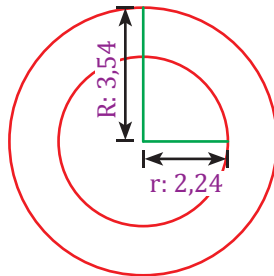


¡Comprobemos lo aprendido!

- Halla la longitud del arco y área de un sector circular de ángulo 30 grados determinados por una circunferencia de 7 cm de radio.
- Calcula el área de la zona sombreada, sabiendo que el lado del cuadrado es de 9 m.



- Calcular el área de un segmento circular de 60 grados de amplitud en un círculo de 12 cm de radio.
- Calcula el área de un segmento circular de 90 grados de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.
- Calcula la superficie del sector circular correspondiente a la figura siguiente.



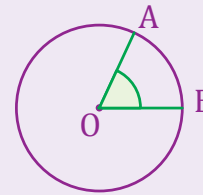
- Calcula el área del trapecio circular cuyas medidas son:
 $R = 3$ cm, $r = 1,5$ cm y el ángulo central 104 grados.

2.4 Ángulos notables en la circunferencia:

Ángulos notables en la circunferencia

Ángulo central

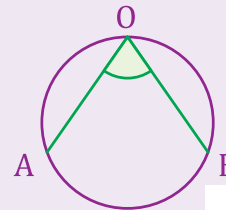
El ángulo central tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.
La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.



$$m \widehat{AOB} = m \widehat{AB}$$

Ángulo inscrito

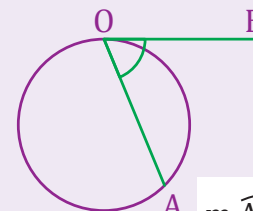
El ángulo inscrito tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
Mide la mitad del arco que abarca.



$$m \widehat{AOB} = \frac{1}{2} (m \widehat{AB})$$

Ángulo semi-inscrito

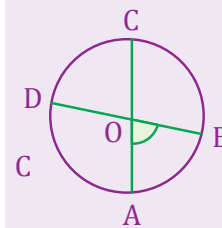
El vértice de ángulo semiinscrito está en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente a ella.
Mide la mitad del arco que abarca.



$$m \widehat{AOB} = \frac{1}{2} m \widehat{AB}$$

Ángulo interior

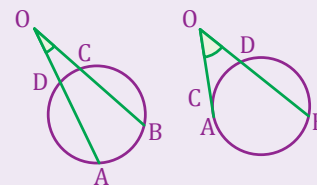
Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.



$$m \widehat{AOB} = \frac{1}{2} m (\widehat{AB} + \widehat{CD})$$

Ángulo exterior

Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella:

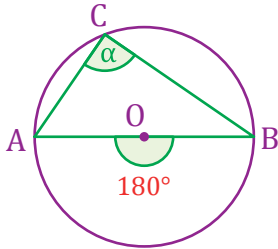


$$m \widehat{AOB} = \frac{1}{2} m (\widehat{AB} + \widehat{CD})$$



EJEMPLO

Dada la circunferencia con centro O y cuerda \overline{AB} , encontremos el ángulo que se pide:



a) Solución:

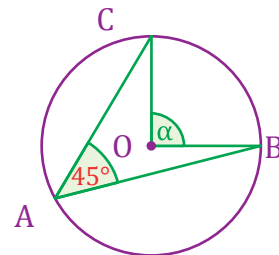
α es un ángulo inscrito y mide la mitad que el arco del centro con el cual subtende el mismo arco \widehat{AB} de la circunferencia. Es decir,

$$\sphericalangle \alpha = \frac{180}{2} = 90$$

b) Solución:

α es un ángulo del centro y por lo tanto mide el doble que el ángulo inscrito que subtende el mismo arco de la circunferencia que él. Es decir,

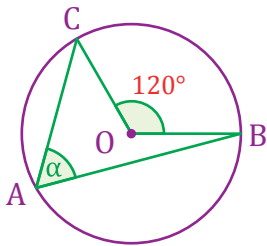
$$\sphericalangle \alpha = 2 \cdot 45 = 90$$



c) Solución:

Los ángulos inscritos y del centro subtenden el mismo arco \widehat{BC} . En tales casos siempre el ángulo inscrito mide la mitad que el ángulo del centro. Es decir,

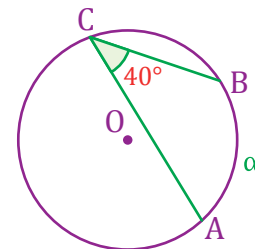
$$\sphericalangle \alpha = \frac{120}{2} = 60$$



d) Solución:

α es un arco y al igual que un ángulo del centro mide el doble que el ángulo inscrito. Es decir

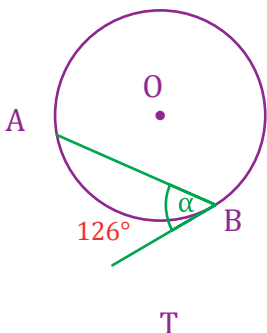
$$\sphericalangle \alpha = 2 \cdot 40 = 80$$

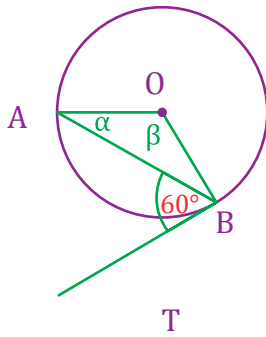


e) \overline{BT} es tangente
Solución:

Un ángulo semi-inscrito (al igual que un ángulo inscrito) siempre mide la mitad que el arco que subtende. En este caso α es semi-inscrito en la circunferencia y subtende al arco \widehat{AB} .

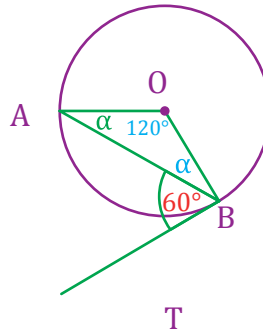
$$\text{Por lo tanto } \sphericalangle \alpha = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{126}{2} = 63$$





f) \overline{BT} es tangente
Solución:

El triángulo AOB es isósceles $\alpha = \angle OBA$ por ser ángulos basales, es decir, ángulos opuestos a lados de igual medida, el radio. Sabemos que el ángulo del centro mide siempre el doble que el ángulo semi-inscrito con el cual subtende el mismo arco. Así, la figura se puede completar a:



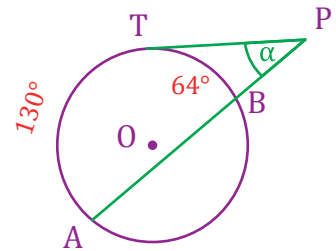
Hallemos el valor de α a partir de la suma de los ángulos interiores del triángulo:

$$\begin{aligned} \angle \alpha + \angle \alpha + 120 &= 180 \\ 2\alpha &= 60 \\ \angle \alpha &= 30 \end{aligned}$$

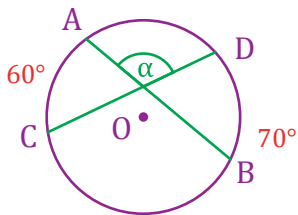
g) \overline{PT} es tangente
Solución:

En este caso tenemos un ángulo exterior por lo que mide la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos que subtende. Es decir $\angle \alpha = \frac{1}{2}(\widehat{TA} - \widehat{TB})$, sustituyendo los valores

$$\angle \alpha = \frac{130 - 64}{2} = \frac{76}{2} = 37$$

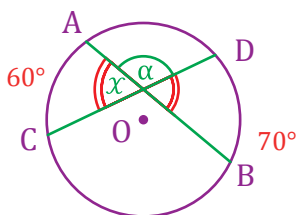


h) Solución:



Conocemos la medida de los arcos AC y DB. En este caso buscamos primero el ángulo suplementario x , el cual al igual que α , es un ángulo interior, que mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que subtende él y su vértice opuesto. Es decir, se cumple que $\angle x = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{DB})$, sustituyendo los

$$\text{valores } \angle x = \frac{60 + 74}{2} = \frac{130}{2} = 65$$

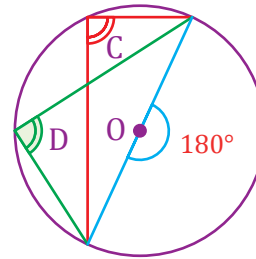
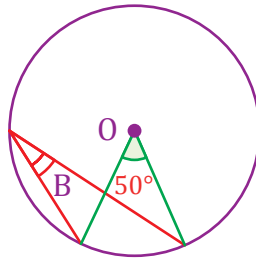
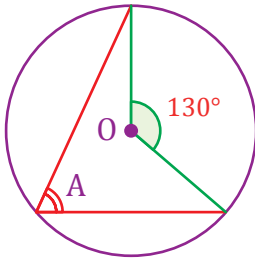


$$\begin{aligned} \angle x + \angle \alpha &= 180, \text{ de donde} \\ \angle \alpha &= 180 - \angle x \\ \angle \alpha &= 180 - 65 = 115 \end{aligned}$$

¡Comprobemos lo aprendido!

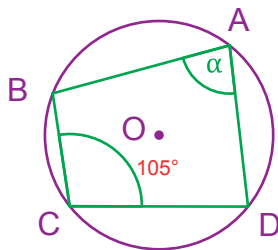
Resolvamos en nuestros cuadernos cada uno de los ejercicios planteados a continuación:

- I) En las siguientes figuras indiquemos cuál es la medida de los ángulos A, B, C y D. Justifiquemos las respuestas.

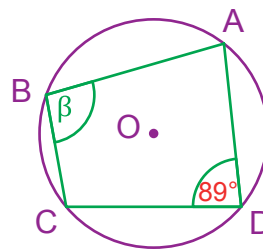


- II) Calculemos el ángulo desconocido en cada figura.

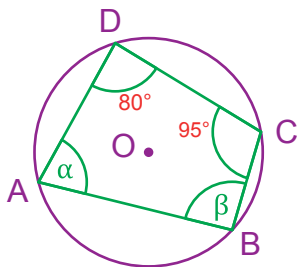
a)



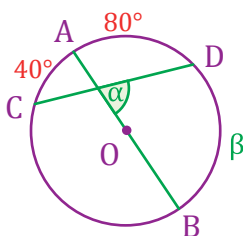
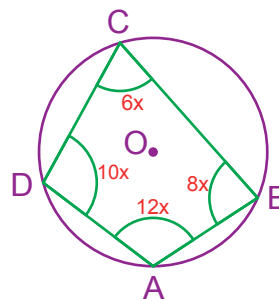
b)



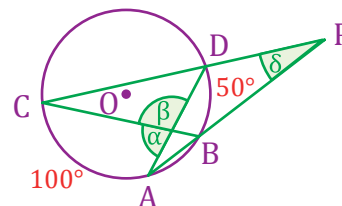
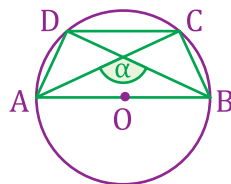
c)



d)



SI $DA = 500$; $CD = ?$; $\alpha = ?$



AUTOEVALUACIÓN

1. Dado un hexágono hallar el número de diagonales trazados desde 3 vértices consecutivos.

- a) 8 b) 4 c) 5 d) 3 e) 7

2. Hallar el total de diagonales de un icoságono.

- a) 180 b) 140 c) 150 d) 170 e) 130

3. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un pentadecágono regular?

- a) 156 b) 154 c) 155 d) 153 e) 157

4. Determinar el número de lados de un polígono si su número de diagonales equivale a 10 veces el número de lados.

5. De cuantos lados es el polígono regular en el cual la diferencia de la suma de las medidas de los ángulos exteriores e interiores es 180.

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 4 e) 3

6. Los ángulos internos B, C y D de un polígono convexo ABCDEA, miden 170, 160 y 150 grados respectivamente ¿Cuál es el valor del menor ángulo formado por los lados AB y DE?

- a) 50 b) 60 c) 70 d) 80 e) 100

7. En un polígono la suma de los ángulos interiores excede en 720 a la suma de los ángulos exteriores ¿Cuál es el polígono?

- a) Heptágono b) Hexágono c) Octágono d) Nonágono e) N.A

8. ¿Cuántos lados tiene el polígono si de cinco vértices consecutivos se han trazado 64 diagonales?

- a) 16 b) 20 c) 19 d) 18 e) 17

9.Cuál es el valor del ángulo interno de un pentadecágono regular?

- a) 146 b) 56 c) 86 d) 165 e) 156

10. Los números de la siguiente figura indican el área de los polígonos.

10.1 El área del polígono B es:

- A. 5 cm^2
- B. 20 cm^2
- C. 30 cm^2
- D. 45 cm^2

| | |
|------------------------|------------------------|
| A 54 cm^2 | C |
| B | D 25 cm^2 |

10.2 El perímetro es la suma de las medidas de los lados. En el polígono C, Cuál es la medida de su perímetro?

- a) 40 cm b) 37 cm c) 22 cm d) 10 cm

10.3 El área de los polígonos B + C es:

- a) 18 cm^2 b) 39 cm^2 c) 75 cm^2 d) 101 cm^2

10.4. El perímetro total de la figura es:

- a) 61 cm b) 50 cm c) 23 cm d) 15 cm

10.5. El área total de la figura es:

- a) 154 cm^2 b) 88 cm^2 c) 38 cm^2 d) 11 cm^2

10.6. La mitad del área del polígono A es:

- a) 13 cm^2 b) 27 cm^2 c) 54 cm^2 d) 84 cm^2

11. Un segmento que une el centro de una circunferencia con cualquier punto de ella se llama:

- a) Tangente b) Diámetro c) Radio d) Cuerda

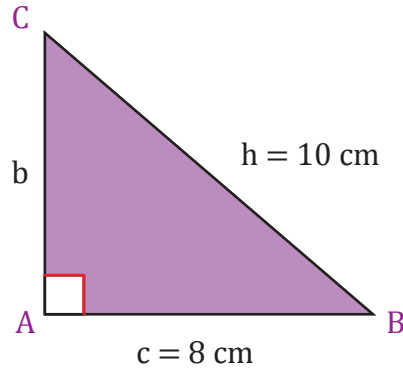
12. Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia:

- a) Diámetro b) Cuerda c) Arco d) Semicircunferencia

13. Es un paralelogramo con cuatro lados congruentes, cuyas diagonales son perpendiculares:

- a) Cuadrado b) Rectángulo c) Rombo d) Romboide

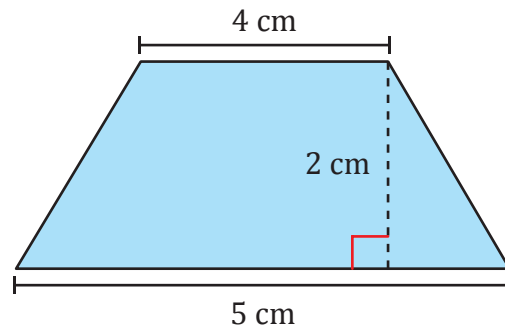
14. La medida de lado b del triángulo ABC, si $h = 10$ cm y $c = 8$ cm es:



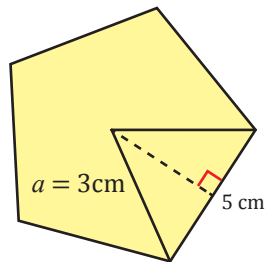
- a. 12 cm.
- b. 6 cm.
- c. 8 cm.
- d. 10 cm.

15. Las medias de un trapezio son $B = 5$ cm, $b = 4$ cm y $h = 2$ cm. Su área es:

- a. 9 cm^2
- b. 10 cm^2
- c. 20 cm^2
- d. 8 cm^2



16. El área de un pentágono regular de 5 cm de lado y 3 cm de apotema es:



- a. 37 cm^2
- b. $37,5 \text{ cm}^2$
- c. 38 cm^2
- d. $38,5 \text{ cm}^2$

17. El área del terreno de la figura es:

- a) $2\ 330 \text{ m}^2$
- b) $2\ 330 \text{ cm}^2$
- c) $2\ 340 \text{ m}^2$
- d) $2\ 340 \text{ cm}^2$

