REPÚBLICA DE
NICARAGUA

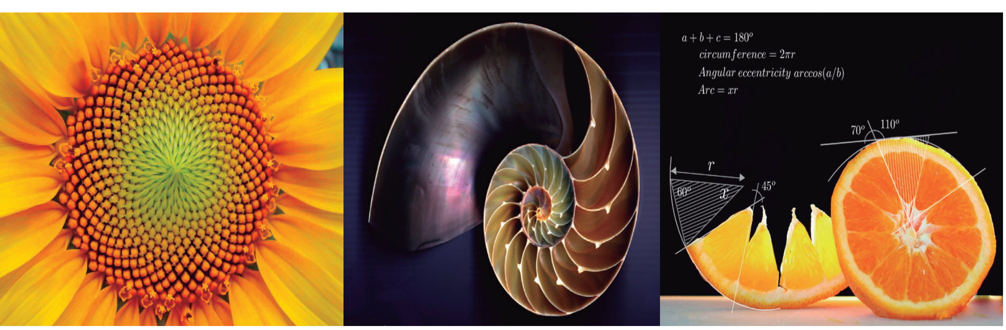
Gobierno de Reconciliación
y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

UNIÓN EUROPEA

Programa de Apoyo al Sector de Educación en Nicaragua
PROSEN

MÓDULO Autoformativo de
MATEMÁTICA



10mo Grado

EDUCACIÓN SECUNDARIA
A DISTANCIA EN EL CAMPO

FE, FAMILIA Y COMUNIDAD!

2017
TIEMPOS DE VICTORIAS! Por Gracia de Dios!

CRÉDITOS

Coordinación General, Revisión y Asesoría Técnica
Profesora María Elsa Guillén
Profesor Julio César Canelo Castillo
Profesora Rosalía Ríos Rivas

Autora:
Profesora María Antonia Midence

Revisión y Asesoría Técnica Científica
Profesor Humberto Antonio Jarquín López
Profesor Francisco Emilio Díaz Vega

Diagramación
Javier Antonio González Manzanarez

Fuente de Financiamiento
Recursos del Tesoro - PROSEN

Primera Edición 2017

«La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Unión Europea a través del Programa de Apoyo al Sector Educación en Nicaragua (PROSEN). El contenido de la misma es responsabilidad exclusiva del MINED y en ningún caso debe considerarse que refleja los puntos de vista de la Unión Europea».

PRESENTACIÓN

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través del Ministerio de Educación (MINED), entrega a docentes y estudiantes de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, el Módulo Autoformativo de Matemática de 10º Grado el cual ha sido elaborado con el próposito de fortalecer los procesos centrados en el aprendizaje de las y los estudiantes y los valores de la cultura campesina.

El módulo es un instrumento de trabajo independiente para el estudiante, con actividades de iniciación, desarrollo y consolidación, que permitirán alcanzar los indicadores de logro en cada una de las disciplinas asignadas.

Las diversas actividades que se orientan en el módulo contribuyen a promover el autoestudio, el autocontrol, la autoevaluación y el “aprender a aprender, emprender, prosperar” en la que el estudiante aplique los conocimientos, habilidades, actitudes y valores adquiridos a través de su formación y que sea capaz de enfrentar los nuevos desafíos que se le presentan.

El módulo contiene información diversificada que propiciará en las y los educandos empoderarse y consolidar sus conocimientos, lo cual evidentemente servirá como instrumento didáctico muy valioso que le facilitará valorar, corregir y perfeccionar sus habilidades, respetando la cultura campesina de trabajar y estudiar, a fin de que se sienta miembro fundamental de su comunidad.

Este documento es propiedad social, por tanto debe cuidarse pora que también le sea de provecho a otros estudiantes, razón por la que le sugerimos lo forre, evite mancharlo, ensuciarlo, romperlo o deshojarlo. Esa será su contribución desinteresada y solidaria con los próximos educandos que utilizarán este módulo.

Ministerio de Educación

INTRODUCCIÓN

Apreciables niñas, niños y adolecentes:

En la unidad 1, iniciamos, retomando los sistemas de 2x2, el concepto, y su solución. También se representan gráficamente, un sistema de 2x2, en los casos de un sistema compatible e incompatible.

Estudiamos la solución de sistemas 2x2, solamente por el método de reducción. Resolvemos los problemas cotidianos de aplicación, a fin de revisar la solución de sistemas lineales.

Al final se estudia la regla de Sarrus, que a la vez se utiliza para resolver sistemas de 3x3, utilizando la regla de Cramer.

Al finalizar cada tema, hay una lista de ejercicios que se deben resolver a fin de apropiarse del conocimiento previo. En cada unidad se hace referencia a los ejes transversales orientados por el MINED.

La segunda unidad se comienza por distinguir la igualdad de la desigualdad, se continúa luego estudiando los conceptos de intervalo y de inecuación, mostrando de esta forma la similitud que existe entre uno y otro concepto.

Se continúa estudiando las inecuaciones lineales, enfatizando en la representación de la respuesta, como una desigualdad y como un intervalo.

Se aplica el concepto de inecuación, a problemas que encontramos en situaciones cotidianas. Las soluciones de las inecuaciones cuadráticas, se hacen: utilizando primero factorización y luego la formula cuadrática.

Teniendo en cuenta que la modalidad de estudio es por encuentros, se hacen aplicaciones sencillas y nos apoyamos en ilustraciones y gráficos a fin de facilitar la comprensión del material. Se comienza la unidad 3, recordando conceptos que el estudiante ha visto en cursos anteriores y que ahora no los tiene presente.

Se rememoren los conceptos de Función, dominio, recorrido.

Antes de estudiar la función exponencial, se retoman las propiedades de los exponentes, similarmente, antes de estudiar la función logarítmica, se estudian los aspectos fundamentales de las funciones inversas.

A lo largo de todo el texto se sugiere el trabajo con los compañeros, a fin de promover el trabajo en equipo, la solidaridad y la creatividad en la solución final de los ejercicios. Al final de cada unidad aparece su correspondiente auto evaluación.

En la unidad 4, se estudian 3 tipos de medidas angulares como son: la sexagesimal las medidas angulares y las centesimal, aunque esta última no es parte del sistema internacional de medidas.

Se aclaran luego los conceptos de ángulo en posición normal estándar, ángulo cuadrantal, ángulo co – terminal y ángulo de referencia, de esta manera, el lector identificará sin problema, cada situación en la que se tratan los temas siguientes.

Al abordar las razones trigonométricas, se estudian particularmente, las correspondientes a los ángulos específicos de 30°, 45° y 60°.

Al resolver problemas de triángulos rectángulos, se procura que no tengan gran dificultad.

Cuando abordamos las funciones trigonométrica generales, presentamos, un círculo trigonométrico, que puede facilitar el trabajo al lector.

Las ecuaciones trigonométricas se abordan con ejercicios que no tienen mayor dificultad.

Por último se estudian la ley del seno y el coseno, aunque se estudian por separado, se resuelven respectivamente los problemas de aplicación.

Profesora
María Antonia Midence

ÍNDICE

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE TRES VARIABLES EN LA VIDA RURAL

UNIDAD I   Página #1

RELACIONES Y FUNCIONES EN EL AMBIENTE NATURAL

UNIDAD II   Página #33

FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTALES EN LA NATURALEZA

UNIDAD III Página #77

LA TRIGONOMETRÍA EN EL ÁMBITO RURAL

UNIDAD IV Página #129

DESEMPEÑOS DE APRENDIZAJE

- Aplica los sistemas de ecuaciones lineales de tres variables, en la solución de problemas, con autonomía y seguridad, vinculados a su entorno rural.
- Aplica las funciones algebraicas y trascendentes en la resolución de problemas de su entorno.
- Interpreta las características y propiedades de las funciones trigonométricas y los aplica en triángulos rectángulos en la solución de problemas.
- Aplica funciones trigonométricas y sus propiedades en la demostración de identidades y la solución de ecuaciones.
- Resuelve problemas de su entorno rural aplicando la ley senos y cosenos.

I UNIDAD

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE TRES VARIABLES EN LA VIDA RURAL

La forma más eficaz de aprovechar el espacio y crecer es la distribución en espiral. Por eso las flores y las hojas o ramas, crecen con formas en espiral, rotando sobre un eje y con el ángulo áureo o ángulo de oro.

Detectar las formas áureas es una afición apasionante, que puede llegar a obsesionar. Por una parte la belleza que contiene es muy atractiva. Por otra el misterio del cálculo y la cantidad de matemáticas aplicadas a este estudio es desbordante y me llama mucho la atención.

Indicador de logro: Resuelve sistemas de ecuaciones de tres variables usando el método de reducción en problemas propios de su entorno.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE TRES VARIABLES EN LA VIDA RURAL

Ecuaciones lineales con dos variables

Una ecuación, es una relación de igualdad que contiene variables y constantes. Ejemplos:

$3x - y = 7$ ①

Es una ecuación con variables x e y, constantes, 3, –1 y 7.

$ax + by - c = 0$ ②

Es una ecuación con variables x e y, constantes *a, b* y cero,

$t + w^2 - w = 1$ ③

Es una ecuación con variables t y w, constante 1, – 1.

Una expresión como $2^3 - 5 = 3$, no es una ecuación, no tiene variables. Es sencillamente una expresión aritmética (igualdad).

Una ecuación lineal en dos variables tiene la forma general $ax + by + c = 0$; donde *a, b, c* reprepresentan números reales y los tres no pueden ser iguales a cero a la misma vez.

Las ecuaciones 1 y 2, son lineales. La ecuación 3, no es lineal ya que contiene variables con exponente 2.

Otros ejemplos de Ecuaciones lineales son:

a) $2x + 3y - 2 = 0$
b) $4x - 9y + 1 = 0$
c) $x + y = 12$

Una expresión de la forma $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, recibe el nombre de sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Estos sistemas no siempre tienen solución, cuando la tienen, ésta puede ser única o pueden ser infinitas.

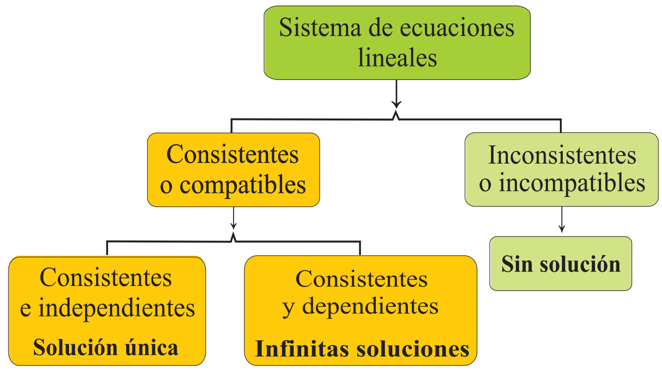
- El nombre común asignado a un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 variables, es; sistema de 2x2.
- Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 variables, es un sistema de 3x3.

La solución de un sistema de la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, es un par de valores $(a;\ b)$, donde a, es el valor correspondiente a la variable x y b, es el correspondiente a la variable y.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener o no, al menos una solución, si tiene solución, se dice que el sistema es **consistente**, si no tiene solución, se dice que es **inconsistente**.

Si la solución es <u>única</u> se dice que el sistema además de ser consistente es **independiente**.

Si tiene <u>infinitas soluciones</u>, entonces es consistente porque tiene al menos una solución pero es **dependiente**.



Los gráficos correspondientes a las ecuaciones lineales son líneas rectas.

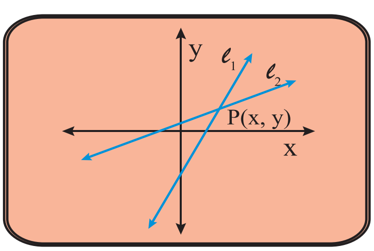
Consideremos el sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$.

Sea $a_1x + b_1y = c_1$, la ecuación de la recta ℓ_1

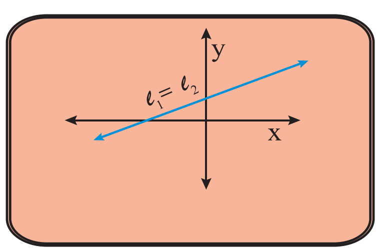
y $a_2x + b_2y = c_2$, la ecuación de ℓ_2.

Sea $P\ (x;\ y)$ el punto solución del sistema.

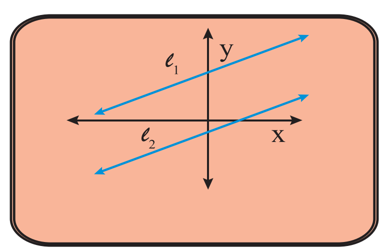
Supongamos que al graficar cada recta del sistema, tenemos;



Caso 1.
Las rectas se cortan en un punto P(x; y). Esto significa que el sistema tiene una única **solución**. <u>Es **compatible** y</u> **<u>determinado</u>**.



Caso 2.
Las rectas coinciden en todos sus puntos. (está una sobre la otra). El sistema tiene **infinitas soluciones,** es un sistema **<u>indeterminado</u>.**



Caso 3.
Las rectas son paralelas. No tienen puntos en común. El sistema **no tiene solución.** Es **<u>incompatible e indeterminado.</u>**

ACTIVIDADES

Analiza la teoría y resuelve con tus compañeros. Justifica tu respuesta.

I. Identifica cada ecuación y justifica la razón de ser o no, lineal.

1) $-x - y = 7$ ________________________________

2) $3x + 2y = 7$ ________________________________

3) $12y - 24y^2 = 0$ ________________________________

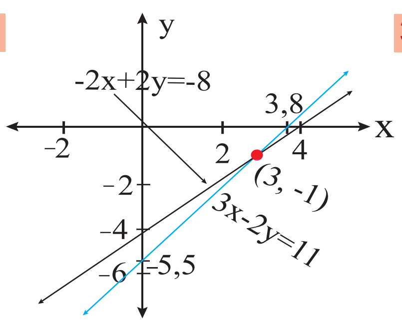
4) $x + y = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ ________________________________

5) $\dfrac{8}{x} + \dfrac{10}{y} = 6$ ________________________________

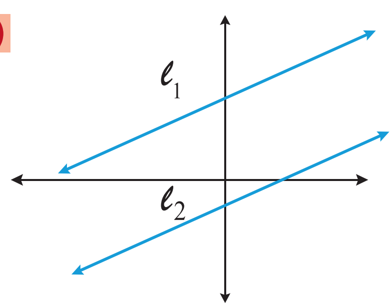
6) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6$ ________________________________

II. Los gráficos siguientes representan sistemas de ecuaciones, explica si son o no lineales, si tienen o no solución, que tipo de solución.

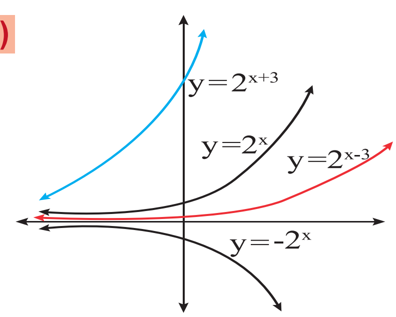
1)



3)



2)



Solución de un sistema lineal de 2x2

Estudiaremos ahora, el procedimiento a seguir, para averiguar si un par dado $(a; b)$, es solución de un sistema lineal de 2x2.

Ejemplo 1

Comprueba que el par $(2; 1)$, es solución de $\begin{cases} 2u - 3v = 1 \\ 3u + 4v = 10 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

Si el par $(2; 1)$, es solución del sistema, debe cumplirse que, al sustituir la variable u por 2 y la variable v por 1, entonces, cada ecuación del sistema se convierte en una igualdad.

Para resolver:

1° Por comodidad, enumeramos cada una de las ecuaciones. (Esto facilita la comprensión).

2° Sustituimos en el sistma la u por 2 y la v por 1 y observamos que el sistema se hace verdadero.

$\begin{cases} 2u - 3v = 1 & (1) \\ 3u + 4v = 10 & (2) \end{cases}$ enumerando las ecuaciones.

$\begin{cases} 2(2) - 3(1) = 1 & (1) \\ 3(2) + 4(1) = 10 & (2) \end{cases}$ sustituyendo.

$\begin{cases} 4 - 3 = 1 & (1) \\ 6 + 4 = 10 & (2) \end{cases}$ comprobado. El sistema se hace verdadero.

Luego, el par $(2; 1)$, es solución del sistema.

Ejemplo 2

Comprueba que el par $(1; 2)$, es solución de $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{9}{10} \end{cases}$

SOLUCIÓN

Si el par $(1; 2)$, es solución del sistema, debe cumplirse que, al sustituir la variable x por 1 y la variable y por 2, entonces, cada ecuación del sistema se convierte en una igualdad.

$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} & (1) \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{10} & (2) \end{cases}$ enumerando las ecuaciones.

$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} & (1) \\ -\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{10} & (2) \end{cases}$ sustituyendo x por 1 y y por 2.

1) Para eliminar los denominadores, multiplicamos (1) por 6 que es el mínimo común múltiplo de 3 y

2) También multiplicamos (2) por 10,que es el mínimo común múltiplo de 2 y 5. De esta manera tenemos.

$\begin{cases} \frac{6}{2} - \frac{12}{3} = -\frac{6}{6} & (1) \\ -\frac{10}{2} + \frac{20}{5} = -\frac{10}{10} & (2) \end{cases}$ multiplicando (1) por 6 (2) por 10.

$\begin{cases} 3 - 4 = -1 & (1) \\ -5 + 4 = -1 & (2) \end{cases}$ las ecuaciones se convierten en identidades.

El par $(1; 2)$ es solución del sistema.

ACTIVIDADES

Después de interpretar la teoría, razona con tu grupo de trabajo, la solución.

I. Escribe a la par de cada expresion, V o F, según esta sea verdadera o falsa.

1) En un sistema lineal, los exponentes de las variables pueden ser mayores que 1 ☐.

2) La solución de un sistema lineal $2{\times}2$, tiene la forma $(a;\, b;\, c)$ ☐.

3) La solución de un sistema lineal es un par que satisface las dos ecuaciones ☐.

4) En la ecuación lineal, los coeficientes pueden ser números enteros o fraccionarios ☐.

II. Comprueba si el par (a; b) dado, es solución de cada uno de los sistemas.

Resuelve en tu cuaderno

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$ $(0, 1)$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $(1, 1)$

3) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ $(0, 1)$

4) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ $(2,2)$

5) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$ $(-2, 1)$

6) $\begin{cases} 4x - 3y = -11 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$ $(-2, 1)$

7) $\begin{cases} x + 5y = 11 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $(1, 0)$

8) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ $(-2, -2)$

9) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ $(0, 0)$

Método de reducción para resolver un sistema de 2x2

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Aquí estudiaremos, el método de reducción. Los pasos a seguir usando este método, son los siguientes:

1) Se amplifican las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convengan, a fin de eliminar una variable.

2) Se reducen las ecuaciones miembro a miembro para eliminar una de las variables.

3) Se resuelve la ecuación resultante para encontrar el valor de una variable.

4) El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve para encontrar el valor de la segunda variable.

Ejemplo 3

Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ por el método de reducción.

SOLUCIÓN

Por comodidad, empezaremos enumerando las ecuaciones del sistema.

$\begin{cases} 3x + 2y = 9 & (1) \\ x + 3y = 10 & (2) \end{cases}$ enumerando las ecuaciones.

$\begin{cases} 3x + 2y = 9 & (1) \\ -3x - 9y = -30 & (2) \end{cases}$ amplificando la ecuación ② por -3 para eliminar x.

$\begin{cases} \cancel{3x} + 2y = 9 & (1) \\ -\cancel{3x} - 9y = -30 & (2) \\ \hline -7y = -21 & (3) \end{cases}$ elliminando la variable x.

$y = \frac{-21}{-7} = 3$ $\boxed{y = 3}$ es el valor de la variable y.

De acuerdo con el paso 4, sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones, en este caso sustituiremos en (1) y tenemos:

$3x + 2(3) = 9$ (1) sustituyendo el valor obrenido de y.

$3x + 6 = 9$ (1) resolviendo el producto.

$3x = 9 - 6 = 3$ despejando $3x$.

$y = \frac{3}{3} = 1$ $\boxed{x = 1}$

La solución del sistema es el par $(1, 3)$

Ejemplo 4

Resuelva el sistema por el método de reducción $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \\ \frac{y}{5} + \frac{x}{3} = \frac{8}{15} \end{cases}$.

SOLUCIÓN

Empezaremos por ordenar y enumerar las ecuaciones del sistema.

$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} & (1) \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = \frac{8}{15} & (2) \end{cases}$ el sistema ordenado y enumerando.

$\begin{cases} \frac{x}{2} \cdot -\frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot -\frac{1}{3} = \frac{5}{6} \cdot -\frac{1}{3} & (1) \\ \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{y}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$ amplificando (1) por $-\frac{1}{3}$ y (2) por $\frac{1}{2}$, para eliminar x.

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{9}=-\dfrac{5}{18} & \text{①} \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{10}=\dfrac{8}{30} & \text{②} \end{cases}$$

efectuando los productos indicados.

$$\begin{cases} -\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{6}}-\dfrac{y}{9}=-\dfrac{5}{18} & \text{①} \\ \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{6}}+\dfrac{y}{10}=\dfrac{8}{30} & \text{②} \\ \hline -\dfrac{y}{9}+\dfrac{y}{10}=\dfrac{8}{30}-\dfrac{5}{18} & \text{③} \end{cases}$$

sumando las dos ecuaciones miembro a miembro.

Mutiplicaramos toda la ecuación por 90, que es el mínimo común múltiplo entre 9, 10, 30, y 90.

$$-\frac{90y}{9}+\frac{90y}{10}=\frac{720}{30}-\frac{450}{18} \quad ③$$

ecuación resultante.

$$-\frac{\overset{10}{\cancel{90}}y}{\cancel{9}}+\frac{\overset{9}{\cancel{90}}y}{\cancel{10}}=\frac{\overset{24}{\cancel{720}}}{\cancel{30}}-\frac{\overset{25}{\cancel{450}}}{\cancel{18}} \quad ③$$

dividiendo entre 9, 10, 30, y 18 respectivamente.

$-10y+9y=24-25$ ecuación obtenida.

$-y=-1$ multiplicamos toda la ecuación por (-1) y obtenemos $\boxed{y=1}$.

Aplicamos en paso 4, sustituyendo el valor obtenido en ① o en ②.

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$ ① sustituyendo el valor obtenido, en ① .

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{6}=-\dfrac{1}{3}$ asociando adecuadamente.

$\dfrac{6x}{2}=\dfrac{30}{6}-\dfrac{6}{3}$ multiplicando por 6 que es el M.C.M de 2, 6, y 3.

$3x=5-2$ simplificando.

$3x=5-2=3$ el valor obtenido es, $\boxed{x=1}$.

La solución del sistema es el par $(1; 1)$.

ACTIVIDADES

Después de interiorizar el método de solución, resuelve los sistemas.

I. Amplifica adecuadamente las ecuaciones del sistema para eliminar la variable que se te indica. Escribe el sistema amplificado.

1) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ Variable x. **2)** $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Variable x. **3)** $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ Variable y.

4) $\begin{cases} x + 5y = 11 \\ x - y = -1 \end{cases}$ Variable y. **5)** $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$ Variable x. **6)** $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ Variable x.

7) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ Variable x. **8)** $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$ Variable y. **9)** $\begin{cases} 4x - 3y = -11 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$ Variable y.

II. Resuelve cada uno de los sistemas anteriores por el método de reducción.

1) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 4x - 3y = -11 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + 5y = 11 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

Aplicaciones cotidianas de los sistemas de 2x2

Antes de plantear el problema de aplicación, debemos;

- Leer bien el problema.
- Identificar los datos conocidos, y las condiciones del problema.
- Identificar las preguntas o valores desconocidos.
- Plantear el modelo matemático que resuelve el problema.

Ejemplo 5

Un finquero, compró 4 vacas y 7 caballos por C$ 51 400. Más tarde compró, a los mismos precios 8 vacas y 9 caballos por C$ 81 800. ¿Cuánto le costó cada vaca y cada caballo.

SOLUCIÓN

- Sea x el precio de cada vaca.
- Sea y el precio de cada caballo.

Si compró 4 vacas, a x córdobas cada una, pagó $4x$ por las cuatro vacas.

Similarmente, compró 7 caballos a y córdobas cada uno, luego pago $7y$ por los 7 caballos.

Por las 4 vacas más los 7 caballos pagó C\$ $51\ 400$. Matemáticamente, esta situación se representa por la ecuación $4x + 7y = 51\ 400$ ①.

Más tarde compró, 8 vacas y 9 caballos, a los mismos precios, por los cuales pagó C\$ $81\ 800$. Esto nos genera la ecuación $8x + 9y = 81\ 800$ ②.

Con las ecuaciones ① y ②, se forma es sistema: $\begin{cases} 4x + 7y = 51\ 400 & ① \\ 8x + 9y = 81\ 800 & ② \end{cases}$

Para resolver el sistema por el método de reducción, amplificaremos ① por -2, a fin de reducir la variable x.

$$\begin{cases} -8\cancel{x} - 14y = 102\ 800 & ① \\ \ \ 8\cancel{x} + \ \ 9y = \ \ 81\ 800 & ② \\ \hline \qquad -5y = -21\ 000 & ③ \end{cases}$$

amplificando ① por -2 a fin de eliminar la x sumando ① y ② término a término.

$y = \dfrac{-21\ 000}{-5} = 4\ 200$ despejando y.

$\boxed{y = \text{C\$}\ 4\ 200}$ es el precio de cada caballo.

Ahora sustituimos el valor obtenido para y, en ② para encontrar el valor de x.

$8x + 9(4\ 200\ ) = 81\ 800$ ②	sustituyendo el valor de y en ②.
$8x + 37\ 800 = 81\ 800$	multiplicando $9(4\ 200\ )$.
$8x\ = 81\ 800 - 37\ 800$	despejando $8x$.
$8x\ =\ 44\ 800$	reduciendo.
$x = \dfrac{44\ 000}{8} = 5\ 500$	despejando x.
$\boxed{x = \text{C\$}\ 5\ 500}$	es el precio de cada vaca.

Luego, él pagó C\$ $4\ 200$ por cada vaca y C\$ $5\ 500$ por cada caballo.

Ejemplo 6

Camilo y Eugenia crian gallinas. La diferencia entre el número de gallinas que tienen Camilo y Eugenia, es 40 y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11.

¿Cuántas gallinas tiene cada uno?

SOLUCIÓN

Desconocemos el número de gallinas que tiene cada uno, luego las designaremos por las variables x e. y.

- Sea x, la cantidad de gallinas que tiene Camilo.
- Sea y, la cantidad de gallinas que tiene Eugenia.

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos:

$x - y = 40$ (1)	la diferencia es 40.
$\frac{1}{8}(x + y) = 11$ (2) $\frac{1}{8}$	de su suma es 11.
$\begin{cases} x - y = 40 & (1) \\ \frac{1}{8}(x + y) = 11 & (2) \end{cases}$	sistema formado con (1) y (2).

Antes de resolver, multiplcaremos (2) por 8, de esta manera nos queda:

$\begin{cases} x - y = 40 & (1) \\ x + y = 88 & (2) \end{cases}$	multiplicando (2) por 8.
$\begin{cases} x - \cancel{y} = 40 & (1) \\ x + \cancel{y} = 88 & (2) \\ \hline 2x = 128 & (3) \end{cases}$	reduciendo la variable y.
$\boxed{x = \frac{128}{2} = 64}$	Camilo tiene 64 gallinas.
$64 - y = 40$ (1)	sustituyendo el valor obtenido en (1)
$64 - 40 = y$	Eugenia tiene 24 gallinas, $\boxed{x = 24}$

Ejemplo 7

Gabriela vive en Solentiname. Se traslada en bote a su trabajo. Cuando rema a favor de la corriente, hace 10 km en una hora, cuando lo hace contra la corriente, rema 4 km en una hora. Halla la velocidad de la corriente y la del bote en aguas tranquilas.

SOLUCIÓN

- Sea x, la velocidad del bote en aguas tranquilas.
- Sea y, la velocidad de la corriente.

Cuando Gabriela navega a favor de la corriente, lleva una suma de velocidades que tienen la misma dirección, estas son la del bote más la de la corriente.

→ velocidad del bote. → velocidad de la corriente.	velocidad resultante $(x + y)$

.

Al ir contra la corriente, su velocidad resultante es, la suma de la velocidad bote en una dirección más la de la corriente en dirección contraria.

$\rightarrow$ velocidad del bote. $\leftarrow$ velocidad de la corriente.	velocidad resultante $(x - y)$

$x + y = 10$ km/h (1) es la velocidad a favor de la corriente.

$x - y = 4$ km/h (2) es la velocidad contra la corriente.

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$$ es el sistema formado.

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 10 & (1) \\ x - \cancel{y} = 4 & (2) \\ \hline 2x = 14 & (3) \end{cases}$$ reduciendo y en las ecuaciones.

$x = \frac{14}{2} = 7$ km/h la velocidad del bote, es $x = 7$ km/h, por tanto x = 7.

Ahora sustituimos el valor encontrado en una de las ecuaciones.

$7 - y = 4$ (2) sustituyendo en (2).

$7 - 4 = y$ despejando y.

$y = 3$ km/h es la velocidad de la corriente.

ACTIVIDADES

I. Analiza, antes de resolver.

1) El menor de dos números, es igual a $\frac{1}{3}$, del mayor.

2) El mayor de dos hermanos, excede en 2 años al menor.

3) Dentro de 6 años, la edad de A será igual a la edad actual de B.

4) A un número de 2 cifras le agrego 9, y la cifras se invierten.

5) Al dividir un número mayor entre otro menor, el cociente es 6 y el resíduo 1.

6) La edad de Alejandro dentro de 2 años, excederá a la de Roberto en 3 años.

II. Resuelva los siguientes problemas.

1) Divida 80, en dos partes de modo que los $\frac{3}{8}$, de la parte mayor equivalgan a los $\frac{3}{2}$ de la menor. Encuentre el valor de cada parte.

2) Encuentre dos números tales que 5 veces el mayor exceda en 5 a 5 veces el menor, y 5 veces el menor exceda en 7 al mayor.

3) El número de gallinas del gallinero de Amanda es el doble de las de Blanca, menos 6, pero tiene $\frac{8}{5}$ de lo que tiene Blanca, mas 2. ¿Cuántas gallinas tiene cada una?

4) Un tercio de la diferencia de dos números es 11, y $\frac{4}{9}$ del mayor equivalen a $\frac{3}{4}$ del menor. Halla los números.

5) En el puerto de San Jorge, se compran, 10 boletos del barco, para adultos y 9 para niños por C\$ 512 además 17 boletos de niño más 15 de adultos por C\$ 831. ¿Cuánto cuesta cada boleto de niño y de adulto?

6) Dos hombres reman, río abajo 16 km en una hora, y rio arriba 6 km en una hora. Halle la velocidad del bote en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

7) Si el numerador de una fracción, disminuye en 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Si denominador disminuye en 2, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Encuentre la fracción.

8) Pedro dice a Juan: si me das C\$ 15, tendré 5 veces lo que tú tienes. Juan dice a Pedro: si me das C\$ 20, tendré tres veces lo que tú tienes. ¿Cuánto tiene cada uno?

9) Halla dos números, tales que 5 veces el mayor exceda a $\frac{1}{5}$ del menor en 222, y 5 veces el menor, exceda a $\frac{1}{5}$ del mayor en 66.

Sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

Un sistema de la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_2x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, donde cada una de las ecuaciones que lo conforman, es una ecuación lineal, recibe el nombre de sistema lineal de $3x3$.

La solución de un sistema de $3x3$, es una terna de valores $(a;\ b;\ c)$, donde a, es el valor correspondiente a la variable x, b, es el correspondiente a la variable y y c es el valor correspondiente a la variable z.

Ejemplo 8

Comprueba que la terna $(3; 2; -1)$, es solución de $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ 3x + 4y + 7z = 10 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

1) Sustituimos en el sistma la x por 3, la y por 2, la z por -1, y observamos que el sistema se hace verdadero. Veamos:

$$\begin{cases} 3 + 2 - 1 = 4 \\ 2(3) - 3(2) + 5(-1) = -5 \\ 3(3) + 4(2) + 7(-1) = 10 \end{cases}$$ sustituyendo.

$$\begin{cases} 3 + 2 - 1 = 4 \\ 6 - 6 - 5 = -5 \\ 9 + 8 - 7 = 10 \end{cases}$$ las tres ecuaciones del sistema se hace verdaderas.

Luego, la terna $(3; 2; -1)$, es solución del sistema.

Ejemplo 9

Comprueba que la terna $(1; 1; 0)$, es solución de $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = \frac{5}{6} \\ \frac{x}{3} - y + \frac{z}{2} = -\frac{2}{3} \\ x - y + \frac{z}{3} = 0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

Para comprobar que la terna $(1; 1; 0)$, es solución del sistema, sólo tenemos que sustuir, la x por 1, la y, por 1, la z, por 0, y comprobar que las ecuaciones del sistema se convierten en identidades.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{5}{6} & (1) \\ \frac{1}{3} - 1 + \frac{0}{2} = -\frac{2}{3} & (2) \\ 1 - 1 + \frac{0}{3} = 0 & (3) \end{cases}$$ sustituyendo.

$$\begin{cases} \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + 0 = \frac{30}{6} & (1) \\ \frac{3}{3} - 3 + \frac{0}{2} = -\frac{6}{3} & (2) \\ 1 - 1 + \frac{0}{3} = 0 & (3) \end{cases}$$ multiplicando, (1) por 6, y (2), por 3.

$$\begin{cases} 3 + 2 + 0 = 5 & (1) \\ 1 - 3 + 0 = -2 & (2) \\ 1 - 1 + 0 = 0 & (3) \end{cases}$$ puede verse que cada una de las ecuaciones del sistema, es verdadera.

Luego, podemos concluir que la terna $(1; 1; 0)$, es solución del sistema.

ACTIVIDADES

Antes de responder, piensa y analiza.

I. Escribe V o F, en el cuadrito, según la expresión sea verdadera o falsa.

1) La solución de un sistema de 3x3, es una expresión del tipo $(a;\ b)$ ☐.

2) La solución de un sistema lineal 3x3, tiene la forma $(a;\ b;\ c)$ ☐.

3) Si el punto $(a;\ b;\ c)$, es solución de un sistema lineal, entonces cada una de las ecuaciones del sistema es igual a un número positivo ☐.

4) Las ecuaciones que forman un sistema 3x3, pueden no ser lineales ☐.

II. Averigua si cada una de las ternas dadas, es solución del sistema.

1) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - 3y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$ $(1, 1, 1)$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + y - 6z = 9 \\ 4x - 2y - 9z = 11 \end{cases}$ $(1, -1, -1)$

3) $\begin{cases} 3x + 5y - z = 4 \\ -6x + 10y - 3z = 7 \\ 9x + 4z - 15y = -11 \end{cases}$ $(0, 1, 1)$

4) $\begin{cases} 4x - 2y - 3z = -9 \\ x + 3y - 5z = -8 \\ 3x - 5y + z = -4 \end{cases}$ $(1, 2, 3)$

5) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - 8z = 10 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ $(2, 2, 3)$

6) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 3y - 4z = -11x \end{cases}$ $(0, 0, 1)$

Método de reducción para resolver un sistema de 3x3

Ya conoces el método de reducción para resolver sistemas de 2x2, utilizaremos éste mismo método para resolver sistemas de 3x3.

Los pasos a seguir en la aplicación de este método de reducción son los siguientes:

1) Se amplifica una o ambas ecuaciones, multiplicando por factores, de modo que el coeficiente de una de las incógnitas, sea el opuesto al coeficiente de la misma incógnita en la otra ecuación.

2) Se elimina la incógnita, de una ecuación con la de signo opuesto en la otra, sumando ambas miembro a miembro.

3) Se resuelve el sistema de 2x2 que se genera.

4) Se repite el proceso.

Ejemplo 10

Utilice el método de reducción, para resolver el sistema $\begin{cases} x + \ y + \ z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ 3x + 4y + 7z = 10 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

Comencemos por enumerar las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} x + \ y + \ z = 4 & 1 \\ 2x - 3y + 5z = -5 & 2 \\ 3x + 4y + 7z = 10 & 3 \end{cases}$$ enumerando las ecuaciones del sistema.

Ahora, amplificamos 1, multiplicándola por -2, para eliminar la x en 1 y 2.

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -8 & 1 \\ 2x - 3y + 5z = -5 & 2 \\ 3x + 4y + 7z = 10 & 3 \end{cases}$$ amplificando 1 por -2.

$$\begin{array}{rl} -\cancel{2x} - 2y - 2z = -8 & 1 \\ \cancel{2x} - 3y + 5z = -5 & 2 \\ \hline -5y + 3z = -13 & 4 \end{array}$$ reduciendo 1 y 2 para obtener 4.

Repetimos el mismo procedimiento, amplificando 1 por -3 para sumar 1 y 3, miembro a miembro. De esta manera, eliminamos la x de 3, y obtendremos la ecuación 5.

$$\begin{array}{rl} -3x - 3y - 3z = -12 & 1 \\ 3x + 4y + 7z = 10 & 2 \\ \hline y + 4z = -2 & 5 \end{array}$$ reduciendo 1 y 3 para obtener 5.

Ahora resolvemos el sistema de $2x2$, que se forma con 4 y 5, de esta manera obtendremos los valores de y y de z.

$$\begin{array}{rl} -5y + 3z = -13 & 4 \\ y + 4z = -2 & 5 \end{array}$$ es el nuevo sistema de $2x2$.

Amplificamos 5 por 5, para reducirla con 4 y de esta manera eliminamos y en 4 y 5.

$$\begin{array}{rl} -5y + \ 3z = -13 & 4 \\ 5y + 20z = -10 & 5 \\ \hline 23z = -23 & \end{array}$$ eliminando y en ambas ecuaciones.

$23\,z = -23$ ecuación lineal de una variable.

$z = \frac{-23}{23}$ de aquí se obtiene que $\boxed{z = -1}$

Sustituimos ahora el valor obtenido de $z = -1$, en cualquiera de las ecuaiones del nuevo sistema para encontrar el valor de y.

$y + 4(-1) = -2$ 5 sustituyendo z por -1, en 5 .

$y - 4 = -2$ resolviendo el producto.

$y = -2 + 4$ sumando 4 en toda la ecuación.

$y = 2$ de donde se obtiene $\boxed{y = 2}$.

Sustituimos ahora los valores obtenidos de y y de z, en cualquiera de las ecuaciones que contenga x para encontrar el valor de esta.

$x + 2 - 1 = 4$ 1 sustituyendo los valores de y y de z, en 1.

$x = 4 - 2 + 1$ despejando x.

$\boxed{x = 3}$ es el valor de x.

Por tanto; $\boxed{(3, 2, -1)}$ es la solución del sistema.

Ejemplo 11

Utilice el método de reducción, para resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + 5x + 2z = 14 \\ z + 4x + y = 8 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Comencemos por ordenar y enumerar las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & 1 \\ 5x - 2y + 2z = 14 & 2 \\ 4x + y + z = 8 & 3 \end{cases}$$

ordenando y enumerando el sistema.

$$\begin{cases} -5x - 5y - 5z = -10 & 1 \\ 5x - 2y + 2z = 14 & 2 \\ 4x + y + z = 8 & 3 \end{cases}$$

amplificamos 1 por -5, para eliminar la variable x con 1 y 2.

$$\begin{cases} -5\cancel{x} - 5y - 5z = -10 & 1 \\ 5\cancel{x} - 2y + 2z = 14 & 2 \\ \hline -7y - 3z = 4 & 4 \end{cases}$$

reduciendo 1 y 2 para obtener 4.

Repetimos el mismo procedimiento, amplificando 1 por -4 para sumar 1 y 3, miembro a miembro. De esta manera eliminamos la x de 3, y obtenemos otra ecuacion; 5.

$$\begin{cases} -4\cancel{x} - 4y - 4z = -8 & 1 \\ 4\cancel{x} + y + z = 8 & 2 \\ \hline -3y - 3z = 0 & 5 \end{cases}$$

reduciendo 1 y 3 para obtener 5.

Ahora resolvemos el sistema de $2x2$, que se forma con 4 y 5, de esta manera obtendremos los valores de y y de z.

$$\begin{cases} -7y - 3z = 4 & 4 \\ -3y - 3z = 0 & 5 \end{cases}$$

es el nuevo sistema de $2x2$.

Amplificamos 5 por -1, para reducirla con 4 y eliminar z en 4 y 5.

$$\begin{cases} -7y - 3\cancel{z} = 4 & 4 \\ 3y + 3\cancel{z} = 0 & 5 \end{cases}$$
$$-4y \quad = 4$$

eliminando y en ambas ecuaciones.

$y = -\dfrac{4}{4}$	de aquí se obtiene que $y = -1$.
$-7(-1) - 3z = 4$ 4	sustituyendo en 4, y por -1.
$7 - 3z = 4$	efectuando el producto.
$-3z = 4 - 7 = -3$	despejando y reduciendo.
$z = \dfrac{-3}{-3}$	se obtiene el valor de $z = 1$.
$x - 1 + 1 = 2$ 1	sustituyendo los valores obtenidos para y y z.
$x = 2$	es el valor encontrado para x.

La solución del sistema es la terna $(2; -1; 1)$.

ACTIVIDADES

Analiza cuidadosamente el material antes de resolver.

I. En cada uno de los sistemas dados, amplifica las ecuaciones indicadas para eliminar la variable que se te pide. Determina el nuevo sistema.

1) $\begin{cases} x - y - 4z = -3 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$ Elimina y, en 1 y 3

2) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -12 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$ Elimina x, en 1 y 3

3) $\begin{cases} x - 6y + 2z = -4 \\ 3x + 4y - z = 3 \\ 2x - y + 5z = 4 \end{cases}$ Elimina x, en 2 y 3

4) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ 4x + y - 3z = 2 \end{cases}$ Elimina y, en 1 y 2

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 4x - 2y + z = 8 \\ 2x - y + 3z = 11 \end{cases}$ Elimina z, en 1 y 3

6) $\begin{cases} 5x + 2z = 11 \\ y - 2z = -4 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ Elimina z, en 1 y 2

7) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases}$ Elimina x, en 2 y 3

8) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -6 \\ 2x + y + z = 8 \\ x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$ Elimina y, en 1 y 3

9) $\begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ 3x + 3y - 4z = 0 \\ 6x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ Elimina z, en 1 y 3

II. Resuelve los sistemas lineales aplicando el método de reducción.

1) $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = -12 \\ 3x - 4y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 1 \\ 5x - 4y - 2z = -2 \\ 6x - 9y - 12z = 3 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 5x + 2z = 13 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y - 4z = -3 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x - 2y - 3z = -12 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x - 6y + 2z = -4 \\ 3x + 4y - z = 3 \\ 2x - y + 5z = 4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ 4x + y - 3z = 2 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 4x - 2y - z = 8 \\ 2x - y + 3z = 11 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} 5x + 2z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x - 2y - 3z = -2 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ 3x + 3y - 4z = 0 \\ 6x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Aplicaciones cotidianas de los sistemas lineales 3x3

Estos problemas se resuelven de manera parecida a los que involucran 2 variables.

Hay que seguir las mismas sugerencias dadas para resolver un sistema de 2×2.

Ejemplo 12

Cinco libras de azúcar, 3 de café y 4 de frijoles cuestan C$ 118.Cuatro de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles, cuestan C$ 145. Dos de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan C$ 46. ¿Cómo encontrarías el precio de una libra de cada producto?

SOLUCIÓN

- Sea, x, el precio de una libra de azúcar.
- Sea y, el precio de una libra de café.
- Sea z, el precio de una libra de frijoles.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 118 & (1) \\ 4x + 5y + 3z = 145 & (2) \\ 2x + y + 2z = 64 & (3) \end{cases}$$

es el sistema formado y enumerado.

$$\begin{cases} -5x - 3\cancel{y} - 4z = -180 & (1) \\ \underline{6x + 3\cancel{y} + 6z = 138} & (2) \\ x \qquad + 2z = 20 & (4) \end{cases}$$

amplificamos 1 por − 1, y 3 por 3 para eliminar y.

Repetimos el procedimiento con 2 y 3 para eliminar la misma variable.

$$\begin{cases} -4x - \cancel{5y} - 3z = -145 & (2) \\ 10x + \cancel{5y} + 10z = 230 & (3) \\ \hline 6x + \quad 7z = 85 & (5) \end{cases}$$

amplificamos 2 por -1, y 3 por 5 para eliminar y.

Resolvemos ahora, el sistema formado por 4 y 5.

$$\begin{cases} x + 2z = 20 & (4) \\ 6x + 7z = 85 & (5) \end{cases}$$

en este nuevo sistema, si amplificamos 4 por 6, y la sumamos con 5, eliminamos x y encontramos z.

$$\begin{cases} \cancel{6x} + \quad 7z = 85 & (5) \\ -\cancel{6x} - 12z = -120 & (4) \\ \hline \quad -5z = -135 \end{cases}$$

amplificamos 4 por 6, y reduciendo.

$z = \frac{-135}{-5} = 7$

el valor es $\boxed{z = 7}$.

$2(6) + c + 2(7) = 46$ 3

sustituyendo $x = 6$ y $z = 7$, en 3.

$12 + c + 14 = 46$

multiplicando.

$c = 46 - 14 - 12$

$\boxed{c = 20}$.

Por tanto: la libra de frijoles cuesta C\$ 7, la de azúcar, C\$ 6 y la de café, C\$ 20.

Ejemplo 13

Un comerciante desea mezclar dos tipos de café, uno que cuesta C\$ 3 la libra y otro que cuesta C\$ 4 la libra, con otro de mejor calidad que cuesta C\$ 8 la libra, de esa manera espera obtener 140 libras de una mezcla que cuesta C\$ 6 la libra. También desea que la cantidad de café de C\$ 3, sea igual al doble del de C\$ 4. ¿Cuántas libras de café de cada tipo debe mezclar?

SOLUCIÓN

- Sea, x, la cantidad de libras de café de C\$ 3 la libra.
- Sea y, la cantidad de libras de café de C\$ 4 la libra.
- Sea z, la cantidad de libras de café de C\$ 8 la libra.

De las condiciones del problema tenemos:

$x + y + z = 140$ el total de libras de cada precio debe ser igual a 140 libras.

$3x + 4y + 8z = 6 \times 140$ el costo de la compra de cada tipo es igual al costo de la libra de mezcla.

$x = 2y$ la cantidad de café de C\$ 3, sea el doble del de C\$ 4.

Con estas ecuaciones se forma el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 140 & (1) \\ 3x + 4y + 8z = 840 & (2) \\ x = 2y & (3) \end{cases}$$

es el sistema formado y enumerado.

$$\begin{cases} 2x + \cancel{2y} + 2z = 280 & (1) \\ x - \cancel{2y} = 0 & (3) \\ \hline 3x + \quad 2z = 280 & (4) \end{cases}$$

amplificamos 1 por 2, y eliminando y con 1 y 3.

$$\begin{cases} -4x - \cancel{4y} - 4z = -560 & (1) \\ 3x + \cancel{4y} + 8z = 840 & (3) \\ \hline -x + \quad 4z = 280 & (5) \end{cases}$$

educiendo la y en 1 y 3 para obtener 5.

Resolvemos ahora, el sistema formado por 4 y 5.

$$\begin{cases} 3x + 2z = 280 & (4) \\ -x + 4z = 280 & (5) \end{cases}$$

es el nuevo sistema.

$$\begin{cases} -4x - 4y - 4z = -560 & (1) \\ 3x + 4y + 8z = 840 & (3) \end{cases}$$
$$\overline{-x + 4z = 280} \quad (5)$$

amplificamos 4 por 6, y reduciendo.

$$z = \frac{1\,120}{14} = 80$$

el valor es $\boxed{z = 80}$.

$$-x + 4 \times 80 = 280 \quad (5)$$
$$4 \times 80 - 280 = x$$

sustituyendo el valor de $z = 80$ en 5.

$\boxed{x = 40}$

despejando x.

$$40 + y + 80 = 140 \quad (1)$$

es el valor de x.

$$y + 140 - 120$$

sustituyendo los valores obtenidos en 1.

$\boxed{y = 20}$ es el valor de y.

Debe comprar 40 libras de C\$$3$,$20$ libras de C\$ 4 y 80 libras de C\$$8$, para obtener 140 libras de 6.

ACTIVIDADES

Analiza los ejercicios resueltos en el material antes de resolver.

I. Determine la ecuación matemática que describe cada situación.

1) La diferencia entre el precio de B el precio de A, es igual a la mitad del precio de C. (B, es mayor que A).

2) Carlos y Roberto tienen entre ambos C$ 150. Utiliza una sóla variable para representar lo que tiene Carlos y lo que tiene Roberto.

3) El mayor (x) de 3 números, disminuido en 1, equivale a $\frac{1}{5}$ de la suma del menor (z) y el mediano (y).

4) Pagué C$ 179 por la compra de, 3 camisetas, 2 pantalones y 1 sombrero.

II. Resuelva los siguientes problemas.

1) En la pulpería pagué C$ 75 por la compra de 1 litro de aceite, 1 libra de maíz y 1 libra de café. Por 3 litros de aceite y 2 libras de café, se pagan C$ 160. La libra de café cuesta 10 veces el precio de una libras de maíz. ¿Cuánto cuesta una unidad de cada producto?

2) Quiero mezclar tres tipos de concentrado, uno de C$ 6 la libra, otro de C$ 8 la libra, con otro de C$ 16 la libra, para obtener 280 libras de una mezcla que cuesta C$ 12 la libra. También quiero que la cantidad de concentrado de C$6, sea igual al doble del de C$ 8. ¿Cuántas libras de concentrado de cada tipo debo mezclar?

3) Un negocio vende bolsas de café de 3 calidades A, B, y C, por la compra de una bolsa de cada tipo(3 bolsas), se pagan C$ 37, el precio del más caro (C), excede en C$ 1 a la tercera parte de la suma de los precios de A y B, la diferencia entre el precio de B y el más barato (A), equivale al precio de C disminuido en 13. Halla el precio de cada bolsa.

4) Entre A, B y C tienen C$ 140,000. C tiene la mitad de los que tiene A, y A tiene C$ 10,000 más que B. Encuentre la cantidad que tiene cada uno.

5) Compre un caballo, un sombrero y un perro. El perro me costó C$ 200, el caballo y el perro me costaron el triple del sombrero, el perro y el sombrero, me costaron $\frac{3}{5}$ del precio del caballo. Encuentre el precio del caballo y el sombrero

Matrices y determinantes de 2x2

Utilizaremos un ejmemplo de la vida diaria para explicar el concepto de determinante.

Supongamos que compro arroz, frijoles y maíz bajo las siguientes condiciones:

- **Condición 1;** Tres libras de arroz, 4 de frijoles y 5 de maíz, me cuestan C$ 81.
- **Condición 2;** Dos libras de arroz, 5 de frijoles y 3 de maíz,me cuestan C$ 76.
- **Condición 3;** Dos libras de arroz, 1 de frijoles y 1 de maíz,me cuestan C$ 28.

Designemos por A, F, y M, cada libra de arroz, cada libra de frijoles y cada libra de maíz, respectivamente. Si escribimos esto en una tabla, tenemos:

	Arroz	Frijoles	Maíz	Precio total
Condición 1	3A +	4F +	5M	= 81
Condición 2	2A +	5F +	3M	= 76
Condición 3	2A +	F +	M	= 28

El sistema que se forma es:

$$\begin{cases} 3A + 4F + 5M = 81 \\ 2A + 5F + 3M = 76 \\ 2A + F + M = 28 \end{cases}$$

Un arreglo de los coeficientes del sistema es:

3	4	5
2	5	3
2	1	1

El <u>arreglo</u> representado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

se conoce como <u>matriz de 3×3</u>, ya que tiene 3 filas y 3 columnas.

El <u>arreglo</u> siguiente, se conoce como <u>matriz de 2×2</u>, ya que tiene 2 filas y 2 columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Una matriz que tiene <u>igual</u> número de filas que de columnas, se llama <u>matriz cuadrada</u>.

A toda matriz cuadrada se le puede hacer corresponder <u>un número</u> llamado determinante.

El determinante de orden dos, es el número que resulta de sumar, el productos de los términos de la diagonal principal (señalada en rojo) menos el producto de los términos de la diagonal secundaria (destacadas en azul).

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A = [a_1 b_1 - a_2 b_1]$$

Ejemplo 14

Resuelva los deterrminantes de 2x2: a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ 5 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la explicación anterior,

a) $\Delta_A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (-3 \times 5)$
$= 8 - (-15)$
$= 8 + 15 = 23$

El valor del determinante es 23.

b) $\Delta_B = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ 5 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - (4 \times 5)$
$= -\frac{1}{6} - (20)$
$= \frac{-1-120}{6} = \frac{-121}{6}$

ACTIVIDADES

Antes de resolver, lee con cuidado.

I. Escribe a la par de cada expresión, V o F, según esta sea verdadera o falsa.

1) Un determinante es un sistema lineal ☐.

2) El determinante de un sistema lineal 2x2, es una función ☐.

3) El determinante de un sistema de 2x2 tiene la forma $(a_1 \times b_2 \times c_3) + (a_2 \times b_3 \times c_1)$ ☐.

4) En un determinante de 2x2, un número entero ☐.

5) Un determinante de 2x2, es una matriz ☐.

II. Resuelve en tu cuaderno cada uno de los determinantes de 2x2.

1) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ -15 & 2 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -1 & 20 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ 5 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 5 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix}$

$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$\Delta_A = [a_1 b_1 - a_2 b_1]$

Indicador de logro: Resuelve sistemas de ecuaciones de tres variables usando método de menores o la regla de Sarrus.

Determinante de 3x3 y regla de Sarrus

Consideremos un sistema lineal de 3×3

$$\text{Sea S} = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

El determinante de S, representado por Δ_S, es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante

El determinante Δ_S, de 3×3, es el número resultante de:

$$\Delta_S = [a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2] - [c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2]$$

La regla de Sarrus es un método fácil para calcular un determinante 3×3. Recibe su nombre, del matemático francés, Pierre Frederic Sarrus.

Consiste en repetir después de las última fila del determinante, las dos primeras filas del mismo y luego hacer una diferencia entre los tres productos de los elementos de las tres diagonales principales destacadas en rojo, y las tres diagonales secundarias señaladas en azul, es decir:

Si $\text{S} = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, entonces, el determinante de S con las dos primeras filas agregadas es;

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = [a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2] - [c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2]$$

También se pueden agregar al final de la última columna las dos primeras y luego, repetir el procedimiento, al igual que se hace con las fila.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = [a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2] - [c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2]$$

Ejemplo 15

Utilice la regla de Sarrus para calcular el determinante del sistema, $S = \begin{cases} x - 3y + 2z = 3 \\ 5x + 6y - z = 13 \\ 4x - y + 3z = 8 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Siguiendo la Regla de Sarrus, agregamos las dos primeras filas, y procedemos como se explicó anteriormente de esta manera, tenemos:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (18 - 10 + 12) - (48 + 1 - 45) \\ &= 20 - 4 = 16 \end{aligned}$$

Ejemplo 16

Resuelva el mismo problema agregando a la derecha, las 2 primeras columnas para comprobar que obtendremos el mismo resultado.

SOLUCIÓN

Siguiendo la Regla de Sarrus, agregamos las dos primeras columnas a la derecha, y procedemos como se explicó anteriormente.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (18 + 12 - 10) - (48 + 1 - 45) \\ &= 20 - 4 = 16 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

Lee cuidadosamente cada pregunta entes de responder.

I. Escribe a la par de cada expresión , V o F, según esta sea verdadera o falsa.

1) Un matriz de 3×3, es un sistema lineal ☐.

2) Un determinante de un sistema lineal 3x3, es un un número ☐.

3) El determinante es un arreglo de los coeficientes del sistema lineal ☐.

4) Un determinante de $3x3$, es el número asociado a una matris de 2×2 ☐.

5) La regla de Sarrus, me permite agregar las dos primeras filas, arriba o columnas abajo para calcular el determinante ☐.

II. Utilice la regla de Sarrus para calcular el determinante del sistema.

1) $\begin{cases} x-2y-3z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ x+3y-2z=-2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y-z=-3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+2y-z=13 \\ x-2y+2z=0 \\ 3y+z=7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y+2z=-3 \\ -3x+2y+z=1 \\ 4x+y-3z=4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 4x-2y-z=6 \\ 2x-y+3z=10 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x+2z=1 \\ y-2z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 5x-2y+2z=0 \\ 8x+y+5x=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2y+z=0 \\ x+2z=11 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x-y+5z=0 \\ 3x+3y-4z=0 \\ 6x+2y-3z=0 \end{cases}$

Indicador de logro: Resuelve sistemas de ecuaciones de tres variables y los aplica en la solución de problemas de la vida en el campo utilizando métodos de Cramer.

Regla de Cramer

La regla de Cramer, es un teorema, que proporciona la solución de un sistema lineal, de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer; matemático suizo nacido en Ginebra (1 704 - 1 752).

La regla de Cramer facilita la solución de un sistema lineal, sin embargo, su aplicación a sistemas de más de tres ecuaciones lineales, resulta muy laboriosa.

Sea el sistema lineal, $S = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$. El determinante del sistema es; $\Delta_S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Representemos los términos independientes del sistema por la columna $[t_1] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$.

Designaremos otros tres determinantes que representaremos por Δ_x, Δ_y, y Δ_z respectivamente, y los conformaremos de la manera siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} t_i & y & z \end{array} \\ \Delta_x = & \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & t_i & z \end{array} \\ \Delta_y = & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & t_i \end{array} \\ \Delta_z = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

Observe que en el determinante Δ_x, hemos reemplazado en la primera fila $[t_1] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$.

los elementos (t_i ; y ; z) agregados en la primera fila, no intervienen en los cálculos, se agregaron solamente para señalar que cuando se calcula Δ_x, se sustituye la primera columna del determinante por los términos independientes:

$[t_1] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$, similarmente se hace cuando se calculan Δ_y, y Δ_z.

Observa, como $[t_i]$, sustituye; la primera columna, cuando determinamos Δ_x, la segunda, cuando determinamos Δ_y. y la tercera cuando determinamos Δ_z.

De esta forma, según Cramer, se obtienen los valores de las variables x, y y z, al efectuar las divisiones que siguen:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{array}{c} t_i \quad y \quad z \\ \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{array}} \qquad x = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{array}{c} x \quad t_i \quad z \\ \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array}} \qquad x = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = \frac{\begin{array}{c} x \quad y \quad t_i \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array}}$$

Ejemplo 17

Utilice la regla de Cramer para calcular el determinante del sistema, $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = -4 \\ 3x - 5y + 2z = 7 \\ -x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

Lo primero que debemos hacer, es formar el determinante del sistema con los coeficientes de las variables, $\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. Los otros tres determinantes son:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & -4 & 4 \\ 7 & -5 & 2 & 7 & -5 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (40 + 24 - 63) - (45 - 24 + 56)$$
$$= 1 - 77 = -76$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (28 + 8 - 27) - (21 + 12 - 24)$$
$$= 9 - (9) = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-30 - 28 - 36) - (-20 + 42 + 36)$$
$$= -94 - (58) = -152$$

Para calcular los determinantes, utilizaremos la regla de Sarrus, repetiremos las dos columnas de la izquierda, a la derecha.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-20 - 8 - 27) - (-15 + 12 + 24) = -55 - (21) = -76$$

De acuerdo con la regla de Cramer tenemos:

$$x = \frac{-76}{-76} = 1 \qquad y = \frac{0}{-76} = 0 \qquad z = \frac{-152}{-76} = 2$$

La solución del sistema es la terna $(1, 0, 2)$.

ACTIVIDADES

Antes de resolver cada sistema, analiza con tu compañero o compañera, los ejemplos resueltos.

Resuelva los sistemas lineales, utilizando la regla de Sarrus y la regla de Cramer

1) $\begin{cases} 9x + 4y - 10z = 35 \\ 6x - 8y + 5z = 2 \\ 12x + 12y - 15z = 60 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3y - 4z = -1 \\ -5x + z = 4 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 5x + 3y - z = -9 \\ 10x - y + z = 4 \\ 15x + 2y - z = 14 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + y + 5z = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3y - 4z = -5 \\ -5x + z = -8 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 3y - 4z = -3 \\ -5x + z = -12 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} y + z = -8 \\ 2x + z = 9 \\ 3y + 2x = -3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} -5x + 3z = 2 \\ 5x - 3y = -2 \\ 3y - 5z = 2 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 3x - 5y = -7 \\ 5y - 5z = 1 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2y + z = -1 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 10x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x - 5z = -19 \\ -3y + 5z = 16 \\ -5x + 3y = -1 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ x - y + 2z = 6 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} y + 2x = -4 \\ 2x + z = -7 \\ y + 2z = -6 \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} 5x + y + z = 8 \\ x + 10y + 3z = 53 \\ 2x + 4y - 5z = 4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x + 9y - 10z = -2 \\ 8x - 6y + 5z = -9 \\ 3x + 3y - 5z = -5 \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4y - 3z = 0 \\ -5x + z = -5 \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} 3x + 5y - z = 13 \\ -x - 10y + z = -28 \\ 2x + 15y - z = 43 \end{cases}$ **20)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \\ 5x + y + 8z = 0 \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN

I. Señale entre las ecuaciones dadas, las lineales y explique la razón.

1) $x - y = 7$ ______________________________

2) $3x^3 + 2y = 7$ ______________________________

3) $12 + y^2 = 0$ ______________________________

4) $x + k = y - k$, k constante. ______________________________

II. Responde V o F

En un sistema de 2×2, se cumple que:

1) Los exponentes de las variables pueden ser menores que 1 ☐.
2) La solución de tiene la forma $(a;\ b;\ c)$ ☐.
3) La solución es un par que satisface las dos ecuaciones ☐.
4) Los coeficientes pueden ser variables ☐.

III. Encuentre el sistemas de solución (2, 3).

1) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ -x + 4y = 10 \end{cases}$

IV. Encuentre el sistemas de solución $(1; 1)$.

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{5} = 3 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{5} = 2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - 2 = 1 \\ x - \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6} \\ 3x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

V. Para eliminar y en el sistema $\begin{cases} -x + 2y = 0 & (1) \\ x - 3y = 4 & (2) \end{cases}$, hay que amplificar:

1) (1), por 3. 2) (2), por 2. 3) (1), por 2 y (2), por -3. 4) (1), por -3 y (2), por 2.

VI. En el sistema $\begin{cases} -x + 2y = 4 & (1) \\ 4y - 2x = 8 & (2) \end{cases}$.

1) La ecuación (1), es igual al doble de la (2).
2) La ecuación (1), es igual a la (2), multiplicada por 3.
3) La ecuación (2), es igual a la (1), multiplicada por 2.
4) La ecuación (2), es igual a la (1), sumándole 2.

VII. El sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + z = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{x}{3} - y + \dfrac{z}{2} = -\dfrac{2}{3} \\ x - y + \dfrac{z}{3} = 0 \end{cases}$.

1) Tiene coeficientes enteros.
2) Tiene coeficientes variables.
3) Tiene coeficientes enteros y fraccionarios.
4) Tiene coeficientes iguales.

VIII. ¿Cuál sistema tiene solución $(1, -1, -1)$.

1) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - 3y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + y - 6z = 9 \\ 4x - 2y - 9z = 11 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 3x + 5y - z = 4 \\ -6x + 10y - 3z = 11 \\ 9x - 15y + 4z = 11 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 3x + 5y - z = -1 \\ -6x + 10y - 3z = -13 \\ 9x - 15y + 4z = 20 \end{cases}$

IX. Plantea la ecuación matemática que describe la expresión; la suma de los precios, de 2 libras de azúcar, más 3 de café, excede en C$10 al doble del precio de que 6 libras de frijoles.

1) $2A + 3C = 12F + C\$ 10$

2) $A + 3C = 12F + C\$ 10$

3) $2A + 3C - C\$10 = 2(6F)$

4) $2A + 3C - 10 = 6F$

X. Resuelve utilizando la regla de Cramer.

1) $\begin{cases} 9x + 4y - 10z = -16 \\ 6x - 8y + 5z = 11 \\ 12x + 12y - 15z = -18 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 3y - z = 18 \\ 10x - y + z = 18 \\ 15x + 2y - z = 35 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -5x + 3z = 4 \\ 5x - 3y = -1 \\ 3y - 5z = -9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + z = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$

XI. Si x, es un número mayor que y y y es mayor que z, entonces la expresión, ¿"La suma de un número mayor y el menor, excede en 20 al doble del número mediano" es?

1) $x + z + 20 = 2y$

2) $x + y - 20 = z$

3) $x + 2z + 20 = 2y$

4) $x + z - 20 = 2y$

II UNIDAD

RELACIONES Y FUNCIONES EN EL AMBIENTE RURAL

También en el cuerpo humano podemos encontrarnos con la proporción áurea. Jasper Veguts, ginecólogo del Hospital Universitario de Lovaina, en Bélgica, asegura que se puede determinar si el útero de una paciente tiene un aspecto normal basándose en sus medidas: que al dividir su altura por su anchura, el resultado sea cercano a 1618.

Se supone que es la representación ideal de la belleza, y sería, expresada sencillamente, la siguiente: la altura total debe ser igual a la distancia entre las puntas de los dedos teniendo los brazos y las manos totalmente abiertos. Esto equivale a ocho palmos, ocho veces la cara o seis veces los pies. En total, es la misma distancia que obtendríamos si multiplicásemos por 1618 la distancia que separa nuestro ombligo del suelo.

Indicador de logro: Resuelve problemas de su entorno relacionados a inecuaciones con una variable y sus propiedades.

INECUACIONES EN LA NATURALEZA

Inecuaciones lineales de una variable

En la unidad anterior, trabajamos con expresiones matemáticas relacionadas con el signo =, por tal razón nuestros planteamientos fueron siempre, de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales cuya solución, es un <u>punto único</u>.

Una expresión matemática que <u>no</u> es ecuación, es <u>inecuación</u>. Los valores que verifican una inecuación, son sus soluciones. Ejemplos de inecuaciones son;

$-2x + 7 < 2$ ①

Es una inecuación lineal con una variable: x, constantes, 2 y 7.

$ax > c$ ②

Es una inecuación lineal con una variable: x, constantes, a y c.

$2w^2 + 3 \leq 1$ ③

Es una inecuación cuadrática con variable w, constantes, 2, 3 y 1.

Las inecuaciones se clasifican atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas.

La inecuación $4x > 2x + 5$	Es de 1° grado con 1 incognita.
La inecuación $x^2 - x \leq 2$	Es de 2° grado con 1 incognita.

Ejemplos de inecuaciones

- Supongamos que vas a comprar un quintal de frijoles al el mercado, no conoces exactamente el precio, pero sabes que oscila entre los C$ 800 y los C$ 900 córdobas, luego; si x es el precio desconocido del quintal de frijoles, entonces, el precio (x), está entre C$ 800 y C$ 900.

matemáticamente, se escribe;	$800 < x < 900$	forma de inecuación o desigualdad.
también se puede escribir	$x \in (800; 900)$	en forma de <u>intervalo</u>;

Estas notaciones, significan que el precio del quintal de frijoles, es mayor que C$800 y menor que C$900, o que dicho precio, pertenece al intervalo (800; 900); es mayor que 800 y menor que 900.

- Se dice que Nicaragua fue descubierta por Cristóbal Colón en 1502, y alcanzó su independencia en 1821, luego el <u>intervalo</u> de tiempo entre esos dos hechos es de 319 años.

- Quieres comprar un pantalón cuyo precio es menor o puede ser igual a C$ 100. Si x es el precio del pantalón, entoces: $x \leq 100$, también se puede escribir; $100 \geq x$, esta expresión es verdadera si el precio del pantalón en el mercado es de C$100, o menos de C$ 100.

Si *a*, <u>no es menor</u> que *b*, entonces $a \geq b$.
Si *a* <u>no es mayor</u> que *b*, entonces $a \leq b$.

ACTIVIDADES

Comparte con tu compañero o compañera el análisis de cada una de las expresiones para responder adecuadamente, justificando tu respuesta.

I. ¿Cuál de las expresiones dadas es inecuación? ¿Porqué?

1) $x + 5 = 2$ ______________________________

2) $8y - y^2 < 0$ ______________________________

3) $x + k \leq 5$, k constante ______________________________

4) $5 \geq 2(3x - 2y)$ ______________________________

5) $x + 1 > x + 1 > \frac{a^2 + b^2}{ab}$, *a* y b son constantes ______________________________

6) $2x + y + b + 2$, *b* es constante ______________________________

7) $\frac{8}{x} + \frac{10}{y} = 6$ ______________________________

II. ¿Cuál de las anteriores inecuaciones que identificastes es lineal?¿Porqué?

1) ______________________________

2) ______________________________

3) ______________________________

4) ______________________________

5) ______________________________

6) ______________________________

7) ______________________________

Intervalos reales, notación y gráfico

Los intervalos de números reales, son subconjuntos del conjunto de números reales, pueden representarse como <u>inecuaciones</u> o como <u>desigualdades</u> y también, en su notación propia (notación de intervalo).

A continuación te presentanos los tipos de intervalos.

$(a; b)$ Intervalo abierto.

$[a; b]$ Intervalo cerrado.

$[a; b)$ Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.

$(a; b]$ Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.

Los intervalos, pueden representarse como inecuación y viceversa. Verlo a continuación.

Intervalo	Inecuación	Gráfico	significado
$(a; b)$	$a < x < b$		Todos los valores, entre *a* y *b* <u>sin incluir</u> los extremos.
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$		Todos los valores, entre *a* y *b* <u>incluyendo</u> los extremos.
$[a; b)$	$a \leq x < b$		Todos los valores, entre *a* y *b* <u>incluyendo</u> *a*, <u>no incluyendo</u> *b*.
$(a; b]$	$a < x \leq b$		Todos los valores entre *a* y *b* <u>incluyendo</u> *b*, <u>no incluyendo</u> *a*.
$(-\infty; b)$	$x < b$		Todos los valores reales, a la izquierda de *b* <u>sin incluir</u> *b*.
$(-\infty; b]$	$x \leq b$		Todos los valores reales, a la izquierda de *b* <u>incluyendo</u> *b*.
$(a; \infty)$	$x > a$		Todos los valores reales, a la derecha de *a* <u>sin incluir</u> *a*.
$[a; \infty)$	$x \geq a$		Todos los valores a la derecha de *a* <u>incluyendo</u> *a*.
$(-\infty; \infty)$	$-\infty < x < -\infty$		Todos los números reales.

Los intervalo $(a; b)$ y $(-\infty; \infty)$, son abiertos, los de la forma $[a; b]$, son cerrados, los de la forma $[a; b)$, y $(a; b]$, se conocen como semi abiertos.

La desigualdad $1 < x \leq 5$ se representa por el intervalo $(1, 5]$, de acuerdo con la explicación anterior, esta notación representa todos los números reales que se encuentran entre 1 y 5, excluyendo el 1 e incluyendo el 5.

Gráficamente es;

ACTIVIDADES

Analiza con la tu compañero o compañera cada una de las expresiones para resolver adecuadamente.

I. Escribe cada intervalo, como una desigualdad.

1) $(-2; 1)$ ____________________

2) $(-\infty; 0]$ ____________________

3) $(5; \infty)$ ____________________

4) $[-12; 10)$ ____________________

5) $(-15; -5)$ ____________________

6) $[2; \infty)$ ____________________

7) $(-\infty; -10]$ ____________________

8) $(-\infty; 0)$ ____________________

II. Escribe cada desigualdad, como un intervalo.

1) $x < 1$ ____________________

2) $x \geq 3$ ____________________

3) $2 \leq x < 10$ ____________________

4) $-3 < x \leq 1$ ____________________

5) $-4 \leq x \leq 1$ ____________________

6) $-3 < x < 1$ ____________________

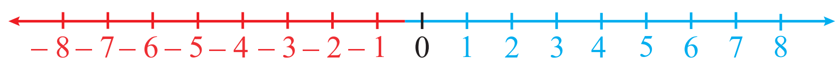
7) $x \geq 1$ ____________________

8) $x \leq 1$ ____________________

Solución de inecuaciones lineales

Resolver una inecuación implica, aplicar a la misma, cada una de sus propiedades, a fin de encontrar, el intervalo, que la hace verdadera.

El gráfico unidimensional, o línea recta, llamada recta numérica, contiene todos los números reales, mediante una aplicación biyectiva entre estos números y los puntos de una recta. Se usa para representar todos los números como puntos.



Propiedades básicas de las desigualdades lineales	Ejemplos
1. Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.	$-5<-3$ y $-3<2$, entonces $-5<2$
2. Si $a<b$, entonces, $a+c<b+c$ y $a-c<b-c$.	$\begin{cases} -3<1 \text{ y } c=5, \text{ entonces, } -3+5<1+5 \\ \text{si } c=-5, \text{ entonces, } -3+(-5)<1+(-5) \end{cases}$.
3. Si $a<b$ y $c>0$, entonces, $ac<bc$ y $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.	$2<5$ y $c=3$, entonces, $(2)(3)<(5)(3)$ y $\frac{2}{3}<\frac{5}{3}$.
4. Si $a<b$ y $c<0$, entonces, $ac>bc$ y $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.	$2<5$ y $c=-3$, entonces, $(2)(-3)>(5)(-3)$ y $\frac{2}{-3}>\frac{5}{-3}$

Al multiplicar o dividir una desigualdad, por un número real negativo, se invierte el signo de la desigualdad.

Ejemplo 1

Aplica las propiedades de las inecuaciones para resolver, $x+5<10$.

SOLUCIÓN

$x+5<10$	desigualdad dada.
$x+5-5<10-5$	aplicando la propiedad 2.
$x<5$	reduciendo.

Intervalo solución

$(-\infty; 5)$

Gráfico

Ejemplo 2

Aplica las propiedades de las inecuaciones para resolver, $4x + 5 < 10 - 8x$

SOLUCIÓN

$4x + 5 < 10 - 8x$	inecuación dada.
$4x + 8x + 5 < 10 - 8x + 8x$	sumando $8x$. Propiedad 2.
$12x + 5 < 10$	reduciendo las x.
$12x + 5 - (5) < 10 - (5)$	sumando -5. Propiedad 2.
$12x < 5$	reduciendo.
$\cancel{12}\left(\frac{1}{\cancel{12}}\right) < 5\left(\frac{1}{12}\right)$	multiplicando por $\left(\frac{1}{12}\right)$. Propiedad 3.

reduciendo, se obtiene $x < \left(\frac{5}{12}\right)$ o $x \in \left(-\infty, \frac{5}{12}\right)$.

Intervalo solución

$\left(-\infty, \frac{5}{12}\right)$

Gráfico

Ejemplo 3

Aplica las propiedades de las inecuaciones para resolver, $3 - (x - 6) \leq 4x - 5$

SOLUCIÓN

$3 - (x - 6) \leq 4x - 5$	inecuación dada.
$3 - x + 6 \leq 4x - 5$	eliminando el paréntesis.
$3 - x + 6 + 5 \leq 4x - 5 + 5$	sumando 5. Propiedad 2.
$14 - x \leq 4x$	reduciendo $(3 + 6 + 5)$.
$14 + x - x \leq 4x + x$	sumando x. Propiedad 2.
$14 \leq 5x$	reduciendo.
$14\left(\frac{1}{5}\right) \leq (5x)\left(\frac{1}{5}\right)$	multiplicando por $\left(\frac{1}{5}\right)$. Propiedad 3.
$\left(\frac{14}{5}\right) \leq \left(\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}\right)$	efectuando el producto y simplificando.

$\left(\frac{14}{5}\right) \leq x$, es lo mismo que $x \geq \left(\frac{14}{5}\right)$. es el conjunto solución.

Intervalo solución **Gráfico**

$\left[\frac{14}{5};\infty\right)$

Ejemplo 4

Aplica las propiedades de las desigualdades para resolver; $\frac{3x-5}{4}-\frac{x-6}{12}>1.$

SOLUCIÓN

$\frac{3x-5}{4}-\frac{x-6}{12}>1$	inecuación dada.
$\frac{12\,(3x-5)}{4}-\frac{12\,(x-6)}{12}>12$	multiplicando por 12.Propiedad 3.
$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\,(3x-5)}{\cancel{4}}-\frac{\cancel{12}\,(x-6)}{\cancel{12}}>12$	simplificando.
$9x-15-x+6>12$	reduciendo.
$8x-9>12$	reduciendo.
$8x-9+9>12+9$	propiedad 2.
$8x>21$	reduciendo.
$x>\frac{21}{8}$	es la solución.

Intervalo solución **Gráfico**

$\left(\frac{21}{8};\infty\right)$

ACTIVIDADES

Analiza con tu compañero o compañera antes responder.

I. Contesta en tu cuaderno.

1) ¿Cuáles de los siguientes elementos del conjunto $\{-3, 2, 4, 5\}$, satisfacen la desigualdad $3x-2<8$.

2) ¿Para que valores del conjunto $\{2, 4, 6\}$, la desigualdad $3x-1<4$ es falsa?

3) ¿Cuál expresión es verdadera?

i) $1 <$, ii) $\frac{x}{x} \geq 1, x < 0$, iii) $|x| = 0, x \neq 0$

4) ¿Para qué valores de x es falso que?

$$\left|\frac{x+1}{x+1}\right| = 1$$

5) ¿Cuál de los elementos del conjunto $\{12, 14, 16\}$, satisface la desigualdad $2x + 5 < 3x - 7$?

6) ¿Para que valores de $\{2, 4, 6\}$, la desigualdad $3x - 1 > 4$ es falsa?

II. Encuentra el intervalo solución de la inecuación.

1) $2x + 5 \leq 7$

2) $3 - 5x < 11$

3) $x - 8 > 5x + 3$

4) $\frac{1}{4}x - 7 \leq \frac{1}{3}x + 8$

5) $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$

6) $\frac{1}{2}x + 2 \leq \frac{1}{3}x + 5$

7) $\frac{1}{4}x - 7 \leq \frac{1}{3}x + 8$

8) $\frac{1}{7}x - 7 \leq \frac{1}{2}x + 8$

9) $\frac{1}{8}x + 6 \leq \frac{1}{2}x - 8$

Aplicación de las inecuaciones lineales

Ejemplo 5

Una fábrica de artesanías tiene un costo combinado de mano de obra y materiales de C$ 10 c/u. Tiene unos costos fijos de C$ 4 000. Si el precio de venta de cada pieza es de C$35. ¿Cuántas piezas se deben vender para obtener utilidades?

SOLUCIÓN

- Sea q, el número total de piezas que deben ser vendidas a 35 cada una, entonces;
- El ingreso total es $35q$, ya que cada pieza se vende a 35 cada una.
- El costo total es; 4 000 de costos fijos más $10q$ de mano de obra y materiales, es decir:

$$\text{Costo total} = 4\,000 + 10q$$

Para obtener utilidades, el ingreso total debe ser mayor que el costo total, esto es:

Ingreso total − costo total > 0, es decir:

$35q - (4\,000 + 10q) > 0$	para obtener utilidades.
$35q - 10q > 4\,000$	asociando los términos en q.
$25q > 4\,000$	reduciendo.
$q > \frac{400}{25}$	despejando q.
$q > 160$	se deben vender más de 160 piezas, para obtener utilidades.

Intervalo solución; $(160; \infty)$. Respuesta gráfica; 

.

Ejemplo 6

Lorena tiene 20 años menos que Andrea. Si la suma de ambas edades es menor o igual a 86 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Lorena?

SOLUCIÓN

- Sea x, la edad de Lorena e y la edad de Andrea.

Si Lorena tiene 20 años menos que Andrea, entonces, $y = x + 20$.

Si ambas edades suman menos de 86 años, entonces $x + (x + 20) \leq 86$.

$x + (x + 20) \leq 86$	inecuación dada.
$x + x + 20 \leq 86$	eliminando paréntesis.
$2x + 20 \leq 86$	sumando x.
$2x + 20 - 20 \leq 86 - 20$	sumando -20.
$2x < 66$	reduciendo.
$x \leq 33$	dividiendo entre 2.

Lo más que debe tener Lorena son 33 años; 

.

Intervalo solución; $(0; 33]$

Ya que las edades no pueden ser negativas, la edad de Lorene debe ser mayor que 0, pero lo más que tiene son 33 años.

Ejemplo 7

Una fábrica de sacos de bramante, paga en mano de obra y materiales C$5 por cada saco, vende cada uno por C$7 y sus ventas semanales son no mayores a 300 sacos. ¿Cuál debe ser el costo fijo semanal máximo para obtener utilidades?

SOLUCIÓN

Sea x el costo el costo fijo semanal que puede mantener la empresa.

En mano de obra y materiales paga, por los 300 sacos; $5(300)$, si a este costo, agregamos el costo fijo x, tenemos un costo total de $5(300) + x = 1\,500 + x$.

Cada saco se vende a C$ 7, luego el ingreso total por la venta es $7(300) = 2\,100$.

Para obtener utilidades, el ingreso total debe ser mayor al costo total, es decir;

$$2\,100 > 1\,500 + x.$$

$2\,100 > 1\,500 + x$	condiciones del problema (para obtener utilidades).
$2\,100 - 1\,500 > x$	asociamos los términos en x.
$600 > x$	reduciendo.

El costo total semanal máximo, que aguanta la empresa, para tener utilidades es de C$ 600.

$x \in (-\infty; 600)$ la respuesta gráfica es 

.

ACTIVIDADES

Comparte con tu compañero o compañera el analisis de cada una de las expresiones dadas, para resolver en tu cuaderno, justifica en cada caso la respuesta.

I. Plantea la inecuación que describe, cada una de las siguientes situaciones.

1) ¿Cuántos ladrillos de 30 por 30 cm, son el mínimo requerido para enladrillar un cuarto de 3 por 4 m?

2) ¿Qué área mínima de terreno necesito para sembrar 20 matas de plátano, si cada una necesita 2 m^2 de área?

3) La venta de queso de esta semana, me generó utilidades mallores o iguales a C$ 3 000, con un costo total de mano de obra, e insumos de C$4 500. Si vendí 150 libras, ¿A cómo vendí la libra para obtener utilidades?

4) En la venta de frijoles de postrera, tuve un ingreso de C$ 12 000 y un costo por manzana de C$ 200x, ¿Cuántas manzanas sembré para tener utilidades?

5) Quiero repartir 21 vacas entre 2 de mis hijos de tal manera que el 2° reciba el doble que el primero. ¿Cuál será el mayor número de vacas debo dar a cada uno?

6) El área de mi casa es 80 m^2 ¿Cuántas baldosas de 400 cm^2 necesito para embaldozarla?

II. Resuelve en tu cuaderno y escribe la respuesta, como desigualdad y como intervalo.

1) La venta de frijoles de postrera, me dejó un ingreso de al menos C$ 12 000 y un costo por manzana de C$240x, ¿Cuántas manzanas al menos sembré para tener utilidades?

2) El área de mi casa es 80 m^2 ¿Cuál deben ser las máximas dimensiones del jardin de 20m^2, si quiero que el ancho sea la mitad del largo?

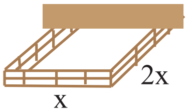
3) Ana preparan enchiladas para vender. Si el triple de lo que prepara Ana más 10 enchiladas es mayor que 91. ¿Cuántas enchiladas preparó?

4) El doble del número de alumnos de una escuela más la mitad de ellos es mayor que 250. ¿Cuál es el número máximo de alumnos de la escuela?

5) Luisa tiene 8 años menos que Antonia. La suma las edades de ambas, es menos de 76 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Luisa?

6) Luis va al pueblo y, lleva C$250 para comprar 3 pasajes de igual precio. ¿Cuál es el precio máximo del pasaje, si requiere C$ 20 de cambio?

7) Se quieren utilizar 180 m de alambre para cercar a tres líneas, un terreno aprovechando parte de un muro. ¿Cuanto es el mayor perímetro que se puede cercar?



8) ¿Cuántos árboles es lo más que puedo sembrar en un terreno de 30 por 32m, si cada árbol requiere $4m^2$ para desarrollarse?

9) ¿Cuántas baldosas cuadradas es el mínimo que necesito, para enbaldosar una bodega de 6 por 4,5 metros si cada baldosa cuadrada tiene 25 cm de lado?

Indicador de logro: Resuelve problemas de su vida en el campo, relacionados a inecuaciones simultáneas y sus propiedades.

Inecuaciones simultáneas

Cuando dos inecuaciones tienen soluciones comunes reciben el nombre de inecuaciones simultáneas, también se conocen como inecuaciones o desigualdades dobles, ya que son en si, dos desigualdades . Ejemplos de ellas son: $-5 < x + 3 < 10$ y $2 \leq x + 12 \leq 10$.

$$-5 < x + 3 < 10$$

$-5 < x + 3$	$x + 3 < 10$
↓	↓
Inecuación izquierda	Inecuación derecha

Son simultáneas y las dos se resuelven simultáneamente.

Ejemplo 8

Encuentre el conjunto solución de la inecuación; $-1 \leq \frac{5x-2}{3} < 2$.

SOLUCIÓN

$-(3) \leq \frac{5x-2}{3}(3) < 2\,(3)$ multiplicando toda la inecuación por 3 (propiedad 3).

$-(3) \leq \left(\frac{5x-2}{\cancel{3}}\right)(\cancel{3}) < 6$ efectuando las operaciones indicadas.

$-3 \leq 5x - 2 < 6$ reduciendo.

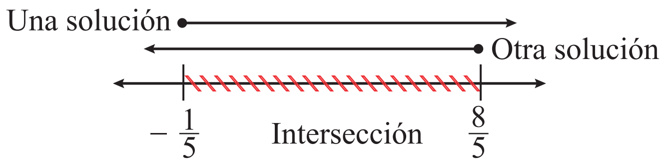
$-3 + 2 \leq 5x < 6 + 2$ sumando 2 a toda la desigualdad (propiedad 2).

$-1 \leq 5x < 8$ reduciendo.

$-1\left(\frac{1}{5}\right) \leq 5x\left(\frac{1}{5}\right) < 8\left(\frac{1}{5}\right)$ propiedad 3.

$-\left(\frac{1}{5}\right) \leq x < \frac{8}{5}$ es la solución es; $\left[-\frac{1}{5}\,;\,\frac{8}{5}\right)$.

El conjunto solución de una de las inecuaciones es; $x \geq -\frac{1}{5}$, el otro es; $x < \frac{8}{5}$, dado que son simultáneas, la solución final debe satisfacer las dos soluciones, es decir; está compuesta por intersección de los dos conjuntos solución. El gráfico siguiente ilustra esta situación:

Explicación gráfica	Intervalo	Respuesta gráfica
	$\left[-\frac{1}{5};\frac{8}{5}\right)$	

Si $a < x < b$ entonces $a < x$ y $x < b$, es decir, el conjunto solución es la intersección de los dos conjuntos solución.

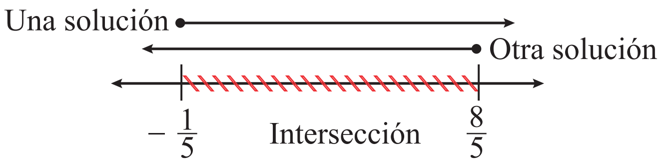
Ejemplo 9

Encuentre el conjunto solución de la inecuación, $-2 \le \frac{5-2x}{3} \le 2.$

SOLUCIÓN

$-2\,(3) \le \left(\frac{5-2x}{3}\right)(3) < 2\,(3)$	multiplicando toda la inecuación por 3 (propiedad 3).
$-6 \le \left(\frac{5-2x}{\cancel{3}}\right)(\cancel{3}) < 6$	efectuando las operaciones indicadas.
$-6 \le 5-2x < 6$	reduciendo.
$-6-5 \le 5-5-2x < 6-5$	sumamos -5 a toda la desigualdad (propiedad 2).
$-11 \le -2x < 1$	reduciendo.
$-11\left(-\frac{1}{2}\right) \ge -\cancel{2}x\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) > \left(-\frac{1}{2}\right)$	propiedad 3.
$\frac{11}{2} \ge x > -\frac{1}{2}$	reduciendo.
$\left(-\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right]$	es la solución.

La propiedad 4 establece que, al multiplicar una inecuación por un número negativo, se invierten el $\le$ por $\ge$, Lo mismo ocurre con $<$ y $>$.

Explicación gráfica	Intervalo	Respuesta gráfica
	$\left[-\frac{1}{5};\frac{8}{5}\right)$	

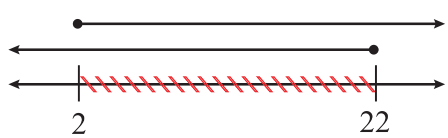
Ejemplo 10

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad $-2<\frac{1}{2}(x-6)\leq 8$.

SOLUCIÓN

Empecemos, multiplicando toda la inecuación por 2, (propiedad 3); para eliminar el denominador.

$-2\,(2)<\frac{1}{2}(x-6)\,(2)\leq 8\,(2)$	multiplicando por 2.
$-4<x-6\leq 16$	efectuando las operaciones indicadas.
$-4+6<x-6+6\leq 16+6$	sumando 6 (propiedad 2).
$2<x\leq 22$	la solución es el intervalo $(2; 22]$.

Explicación gráfica	Intervalo	Respuesta gráfica
	$(2\,;\,22]$	

ACTIVIDADES

I. Discute en base a la teoría la solución de cada ejercicio, y encuentra el número o los números que hacen verdadera cada inecuación.

1) ¿Cuál de los siguientes elementos del conjunto $\{-3, 2, 4, 5\}$, satisfacen la desigualdad $-4<x<8$.

2) ¿Cuál de los siguientes elementos del conjunto $\{12, 14, 16\}$, satisfacen la desigualdad $0\leq 2x+5<3x-7$.

3) ¿Para que valores del conjunto $\{0, 1, 2, 4\}$, la desigualdad $3x-1<4$ es falsa?

4) ¿Cuál expresión es falsa?

i) $0 < x < 10$ si $x = 1$; ii) $-1 < 0$; iii) $|-x| = 0, x \neq 0$

5) ¿Para qué valores de x es verdadera la expresión $\dfrac{|x+1|}{|x+1|} \geq 1$.

6) ¿Para que valores del conjunto $\{2, 4, 6\}$, la desigualdad $1 \leq 3x - 1 > 4$ es falsa?

II. Resuelve las inecuaciones. Escribe la respuesta en forma de intervalo.

1) $1 < 2x - 1 < 5$

2) $-1 < 7 - x < 5$

3) $0 \leq 2 - 3x < 5$

4) $5 < 2x - 1 \leq 1$

5) $0 \leq \dfrac{x-1}{3} < 5$

6) $0 < \dfrac{1-x}{4} \leq 5$

7) $3 \leq \dfrac{2x-3}{5} < 7$

8) $-2 < \dfrac{4x+1}{3} \leq 0$

9) $4 > \dfrac{2x-3}{7} \geq -2$

10) $4 > \dfrac{2x-3}{7} \geq -2$

11) $8 > \dfrac{x+3}{2} \geq -2$

12) $4 \leq \dfrac{2x-3}{5} \leq 12$

Aplicación de las inecuaciones simultáneas

Ejemplo 11

¿Cuál es el número natural tal que la sexta parte de su antecesor es menor que 6; además la sexta parte de su sucesor es mayor que 6?

SOLUCIÓN

➢ Sea x, el número natural buscado. La diferencia entre cada número natural es uno,

1, 2, 3... de tal manera
que el antecesor a x es $x - 1$ y el sucesor es $x + 1$.

- La sexta parte del antecesor es $\frac{x-1}{6}$ y la sexta parte de su sucesor es $\frac{x+1}{6}$.

De acuerdo con las condiciones del problema, se forman 2 inecuaciones:

$\frac{x-1}{6} < 6$ 1 y $\frac{x+1}{6} > 6$ 2.

$\frac{x-1}{6} < 6$ 1	es una de las inecuaciones.
$x - 1 < 36$ 1	multiplicando por 6. Propiedad 3.
$x < 36 + 1$	sumando 1 a ambos lados. Propiedad 2.
$x < 37$	es el resultado de una inecuación.

Para completar la solución, debemos resolver la otra inecuación.

$\frac{x+1}{6} > 6$ 2	es la otra inecuación.
$x < 36 - 1$	despejando x.
$x > 35$	es el resultado obtenido.

El número es mayor que 35 y menor que 37, es natural, entonces, es 36, la respuesta es $x = 36$.

> En este caso, aunque se esté resolviendo una inecuación, la solución buscada es un número y no es un intervalo.

Ejemplo 12

Mauro va al pueblo con todos sus hermanos para ver las corridas de toro de Santo Tomás (Chontales). Dispone de C$ 22 solamente para pagar el bus. Si paga C$ 3 por el pasaje, le sobra dinero; pero si paga C$3,50 le falta dinero. ¿Cuántos hermanos tiene Mauro y cuántos pasajes compró?

SOLUCIÓN

- Sea x, el número de pasajes que compró Mauro.

- Si paga C$ 3 por cada pasaje entonces pagaría en total $3x$ y le sobra dinero, esto es:

$$3x < 22 \quad (1).$$

- Si paga C$ 3,5 por cada pasaje entonces pagaría en total $3{,}5x$ y le faltaría dinero, esto es:

$$3{,}5x > 22 \quad (2).$$

Para encontrar el número x, de hermanos de Mauro, debemos resolver un par de inecuaciones:

$3x < 22$ ①	es una de las inecuaciones.
$x < \frac{22}{3}$	multiplicando por $\frac{1}{3}$ o dividiendo entre 3. Propiedad 3.
$x < 7{,}33$	efectuando la división.

Para completar la solución, debemos resolver la otra inecuación.

$3{,}5x > 22$ ②	es la otra inecuación.
$x > \frac{22}{3{,}5}$	dividiendo entre $3{,}5$. Propiedad 3.
$x > 6{,}28$	

En conclusión Mauro compró 7 pasajes, 6 de sus hermanos y uno suyo.

Ejemplo 13

Ana y Beatriz preparan nacatamales para la kermes del día de Santa Ana en la comarca. Ana prepara la mitad de los que prepara Beatriz y juntas deben hacer entre 15 y 30 nacatamales. Beatriz dice que ella hizo entre 10 y 20. Si Beatriz dice la verdad, ¿en qué intervalo está el número de nacatamales que hizo Ana?

SOLUCIÓN

- Sea x, el número de nacatamales que hizo Beatriz.
- Si Ana preparó la mitad de los que preparó Beatriz, entonces Ana hizo $\frac{x}{2}$ nacatamales.
- Entre las dos prepararon $x + \frac{x}{2}$ nacatamales.

De acuerdo con las condiciones del problema $15 < x + \frac{x}{2} < 30$.

$15 < x + \frac{x}{2} < 30$	inecuación obtenida.
$30 < 2x + x < 60$	multiplicando por 2. Propiedad 3.
$30 < 3x < 60$	reduciendo.
$10 < x < 20$	multiplicando por $\frac{x}{3}$ o dividiendo entre 3. Propiedad 3.

Teniendo en cuenta que x, representa la cantidad de nacatamales que hizo Beatriz, y Ana hizo la mitad, entonces, Beatriz dice la verdad, hizo entre 10 y 20 nacatamales y Ana hizo entre 5 y 10 nacatamales.

> La solución a este problema no es un intervalo, es un conjunto de números enteros:
>
> 6, 7, 8, 9 que se encuentran entre 5 y 10.

ACTIVIDADES

Aplica la teoría para resolver.

I. Escribe la expresión matemática que corresponde a cada una de las siguientes situaciones.

1) La suma de del dinero que tengo, con el doble del mismo está entre 14 y 10.

2) Un medio del cuádruplo de lo que gané hoy es mayor que -10 y no menor que 8.

3) La suma de las patas de igual número de gallinas y cerdos no es mayor que 80, pero es mayor que 2.

4) El resultado de dividir lo que gané hoy entre 2, no es menor que su tercera parte.

5) El cociente de un número entre 5 es menor o igual a 100.

6) El Producto del doble de un numero menos triplo del mismo es mayor que 1 y menor o igual que 10.

II. Lee analiza y resuelve.

1) ¿Cuánto dinero ando, si al dividirlo entre 2 y multiplicar el resultado por 12, la cantidad es mayor que 120 y menor o igual que 360?

2) ¿Qué cantidad de dinero tengo, si los $\frac{3}{4}$ de lo que tengo, es mayor o igual que C\$ 45 y los $\frac{5}{8}$ de lo que tengo es menor que 38?

3) Para ir de la isla "La Venada" a la isla San Fernando en el archipiélago de Solentiname, Miguel, tiene que comprar boletos para él y sus hijos. Dispone de C\$220 para comprar los boletos de adulto. Si compra boletos de C\$ 30, le sobra dinero, si copra de C\$35, le falta dinero. ¿Cuántos boletos compró?

4) $\frac{2}{7}$ de los alumnos de mi escuela usan lentes, y solamente $\frac{3}{5}$ de ellos practican deporte, si la suma de los dos grupos anda entre 90 y 91, ¿cuánto suman los deportistas con los que usan lentes?

5) Rosa y Milena hacen güirilas para vender. Rosa prepara la mitad de los que prepara Milena y juntas deben hacer entre 30 y 60 güirilas. Milena dice que ella hizo entre 20 y 40. Si Milena está en lo cierto, ¿en qué intervalo está el número de güirilas que hizo Rosa?

6) Katia, recibe el pago de hora y media por cada hora extra que cocina, después de las 40 horas semanales. ¿Cuál fue el salario por hora si lo más que recibió fue C\$ 1 442 por 48 horas de trabajo?

7) Miguel y Daniel pescan en Corn Islad, se reparten el ingreso de la pesca de tal manera, que Miguel recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe Daniel. Si entre ambos recibieron entre C\$5 000. ¿Cuánto recibe cada uno?

8) Marcelo es un estudiante becado, para que no le quiten su beca, debe mantener en sus 5 exámenes del período académico, calificaciones entre 80 y 85. Sus notas de los cuatro exámenes anteriores son: 90, 75, 81, y 85. En qué intervalo debe estar su quinta calificación para conservar la beca.

9) Rebeca es una alumna becada. Ella pierde la beca si no obtiene un promedio de entre 80 y 85. Hasta ahora, sus notas son 65, 85 y 78. ¿Cuanto debe sacar en la cuarta prueba para obtener un promedio requerido?

Indicador de logro: Resuelve problemas relacionados a inecuaciones cuadráticas y sus propiedades.

Inecuaciones cuadráticas

Las inecuaciones cuadráticas son aquellas inecuaciones en donde la variable tiene exponente 2.

Ejemplos de inecuaciones cuadráticas son:

$x^2 - 4 > 0$ ① Inecuación cuadrática factorizable.	$2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ ② Inecuación cuadrática factorizable.	$x^2 + 3x + 10 < 0$ ③ Inecuación cuadrática <u>no</u> factorizable

Para resolver las inecuaciones cuadráticas factorizables se sugiere:

1) Relacionar la desigualdad con cero (como las inecuaciones 1 y 2).
2) Factorizar la ecuación cuadrática que conforma la desigualdad.
3) Calcular las raíces o soluciones de la ecuación.
4) Determinar los intervalos formados por todas las raíces.
5) Por último comprobar el, o los intervalos que satisfacen la desigualdad.

Ejemplo 14

Encuentra el conjunto solución de la inecuación $x^2 > 7x - 10$.

SOLUCIÓN

La inecacuación no está relacionada con 0, al relacionarla con 0, nos queda; $x^2 - 7x + 10 > 0$.

$x^2 - 7x + 10 > 0$	relacionando la desigualdad con cero.
$(x - 2)(x - 5) > 0$	factorizando la desigualdad.
si $x - 2 = 0$, $x_1 = 2$	es una raíz encontrada.
si $x - 5 = 0$, $x_2 = 5$	es la otra raíz.

Colocamos estos valores sobre la recta numérica 

, y se generan los subintervalos: $(-\infty; 2)$, $(2; 5)$, $(5; \infty)$.

Escogemos como valores de prueba; 0, en $(-\infty; 2)$, 3, en $(2; 5)$ y 7, en $(5; \infty)$. Ver la tabla.

Intervalos	$(-\infty; 2)$	$(2; 5)$	$(5; \infty)$
Valores de prueba	0	3	7
Signos de $(x-2)$	−	+	+
Sogno de $(x-5)$	−	−	+
Signo de $(x-2)(x-5)$	+	−	+

Ya que $x^2 - 7x - 10 > 0$, en los intervalos $(-\infty; 2)$ y $(5; \infty)$, la solución es la unión de ambos, que se representa por: $(-\infty; 2) \cup (5; \infty)$.

Intervalo	Respuesta gráfica
$(2 ; 22]$	

Ejemplo 15

Encuentre el conjunto solución de la inecuación $x^2 < x$

SOLUCIÓN

Al relacionar la inecuación con cero, nos queda: $x^2 - x < 0$, la ecuación se puede factorizar.

$x(x-1) < 0$ factorizando.

Ahora igualamos cada factor a 0, y tenemos;
$x = 0$, o bien $x_1 = 0$ la primera raíz encontrada.

Si $x - 1 = 0$, $x_2 = 1$ es la otra raíz.

Al colocar las raíces estas raíces, en la recta numérica tenemos: 

.

Los subintervalos que se forman son: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$

Los valores arbitrarios de prueba, que tomamos son: -1, $\frac{1}{2}$ y 2.

Intervalos	$(-\infty; 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Valores de prueba	-1	$\frac{1}{2}$	2
Signos de (x)	−	+	+
Sogno de $(x-1)$	+	−	+
Signo de $x(x-1)$	+	−	+

La solución es el intervalo $(0, 1)$.

Intervalo	Respuesta gráfica
$(0, 1)$	

Ejemplo 16

Encuentre el conjunto solución de la inecuación $x^2 - x < 6$.

SOLUCIÓN

La inecuación está relacionada con 6 y no con cero, siguiendo el $1°$ paso, la relacionamos con cero, escribiendo $x^2 - x - 6 < 0$.

Para factorizar la ecuación cuadrática que conforma la desigualdad, debemos buscar dos números que multiplicados den -6 y que sumados nos den -1. Estos números son -3 y 2.

$(x + 2)(x - 3) < 0$ factorizando la inecuación.

$(x + 2)(x - 3) = 0$ igualando a 0 para encontrar las soluciones o raíces de la ecuación.

si $x + 2 = 0$, entonces $x = -2$, es la primera raíz o solución, que representamos por $x_1 = -2$.

si $x - 3 = 0$, entonces $x = 3$, es la segunda raíz o solución que representamos por $x_2 = 3$.

Al colocar estos valores sobre la recta numérica, tenemos: 

.

Estos dos números, generan tres subintervalos que son:

$(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$ y $(3; \infty)$, formados por las raíces encontradas.

Ahora escogemos arbitrariamente, un valor en cada subintervalo, lo sustituimos en la inecuación para ver si la hace verdadera.

El intervalo o intervalos que satisfagan la desigualdad, conformarán la solución de la misma.

Escojamos arbitrariamente: -5, que está en $(-\infty; -2)$.

0, que está en $(-2; 3)$.

5 que está en $(3; \infty)$.

Sustituiremos cada valor de prueba de cada subintervalo, en la inecuación.

Intervalos obtenidos	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
Valores de prueba	-5	0	5
Signos de $(x+2)$	−	+	+
Sogno de $(x-3)$	−	−	+
Signo de $(x+2)(x-3)$	(−)(−) = +	(+)(−) = −	(+)(+) = +

Intervalo	Respuesta gráfica
$(-2, 3)$	-2 3

ACTIVIDADES

I. Factoriza cada una de las desigualdades, si es posible.

1) $x^2 - 6x + 8 > 0$
2) $x^2 + 2x - 1 \geq 0.$
3) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$
4) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
5) $-x^2 + 8x - 7 < 0$
6) $x^2 - 2x < 0$
7) $x^2 + 3x - 28 < 0$
8) $x^2 + 3x \leq 0$

II. Encuentre en cada caso, el intervalo solución y represéntelo graficamente.

1) $x^2 - 6x + 8 > 0$
2) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$
3) $x^2 - x - 5 > 0$
4) $-x^2 + 6x - 5 < 0$
5) $x^2 + x - 20 > 0$
6) $-x^2 - 9x + 14 \leq 0$
7) $x^2 \leq 5 - 4x$
8) $x \geq 3x$
9) $-x^2 - 2x - 15 > 0$

Soluciones de inecuaciones con la fórmula cuadrática

Continuando siempre con las inecuaciones cuadráticas, resolveremos ahora ejercicios, utilizando el método de la formula cuadrática.

La fórmula general o fórmula cuadrática, nos resuelve cualquier ecuación cuadrática.

Supongamos la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$, en ésta ecuación, el coeficiente de x^2 es a, el de x es b y el término independiente es c. Se puede demostar que las raíces de la ecuación, se encuentran con la fórmula.

Fórmula general o cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces obtenidas de esta forma, serán reales o complejas dependiendo del signo de:

$b^2 - 4ac$, llamado discriminante.
Si $b^2 - 4ac \geq 0$, las raíces son reales.

Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son complejas.

Ejemplo 17

Encuentra el conjunto solución de $x^2 + 2x - 1 > 0$, utilizando la fórmula cuadrática.

Primero, debemos encontrar las raíces de $x^2 + 2x - 1 = 0$ utilizando esta fórmula.

En esta ecuación identificamos: $a = 1, \; b = 2 \;$ y $\; c = -1$, luego;

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$ aplicando la fórmula con $a = 1, b = 2$ y $c = -1$.

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$ reduciendo la expresión.

Pero $= \sqrt{8} = \sqrt{4}(2) = 2\sqrt{2}$, luego,

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ calculando la raíz cuadrada de 4.

$x = -1 \pm$ simplificando por 2.

$x_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{2}$ son las dos raíces obtenidas.

Al colocar las raíces encontradas, en la recta numérica tenemos: 

.

Los sub intervalos que se forman son: $(-\infty, -1-\sqrt{2})$, $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$, $(-1+\sqrt{2}, \infty)$.

Valores arbitrarios elegidos:

-3 en el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{2})$.

0 en el intervalo $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

1 en el intervalo $(-1+\sqrt{2}, \infty)$.

Estos valores arbitrarios los sustituimos en $x^2 + 2x - 1 > 0$.

si $x = -3$, $(-3)^2 + 2(-3) - 1 = 2 > 0$ la inecuación no se satisface.
$x = 0$, $(0)^2 + 2(0) - 1 = -1 < 0$ se satisface.
si $x = 1$, $(1)^2 + 2(1) - 1 = 2 > 0$ no se satisface.

Recogiendo estos resultados en la tabla, tenemos:

Intervalos	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2}, \infty)$
Valores de prueba	-3	0	1
$x^2 + 2x - 1$	−	+	+
$x^2 + 2x - 1 > 0$	+	−	+

Intervalo solución	Respuesta gráfica
$(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$	

Opcional

Si calculamos el valor de $\sqrt{2}$, entonces,

$-1 + \; = -1 + 1{,}41 = 0{,}41$
$-1 - \sqrt{2} \; = -1 - 1{,}41 = -2{,}41$

Intervalos	$(-\infty; -2{,}41)$	$(-2{,}41; 0{,}41)$	$(0{,}41; \infty)$
Valores de prueba	-3	0	1
	+	−	+
$x^2 + 2x - 1 > 0$	+	−	+

Intervalo solución	Respuesta gráfica
$(-\infty; -2{,}41) \cup (0{,}41; \infty)$	

Ejemplo 18

Encuentra el conjunto solución utilizando la fórmula cuadrática $x^2 - 3x \geq -2$.

SOLUCIÓN

La inecuación relacionada con 0 es; $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Primero, debemos encontrar las raíces de $x^2 - 3x + 2 = 0$, utilizando la fórmula cuadrática.

En esta ecuación identificamos: $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$.

$x = \dfrac{\sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ resolviendo operaciones indicadas.

$x = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ simplificando.

$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ es una raíz.

$x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ es el valor de la otra raíz.

Con estas raíces,  se generan los intervalos:

$(-\infty; 1]$, $[1; 2]$ y $[2; \infty)$

Elegimos como valores arbitrarios: 0, $1{,}5$ y 3, para sustituir en $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

si $x = 0$, $(0)^2 - 3(0) + 2 = 2 > 0$ se satisface.

$x = 1{,}5$; $(1{,}5)^2 - 3(1{,}5) + 2 = 2{,}25 - 4{,}5 + 2 = -0{,}25 < 0$ no se satisface.

si $x = 3$, $(3)^2 - 3(3) + 2 = 2 > 0$ se satisface.

Intervalos	$(-\infty; 1]$	$[1; 2]$	$[2; \infty)$
Valores de prueba	-1	$0{,}5$	2
	−	+	+
$x^2 + 2x - 1 > 0$	+	−	+

Intervalo solución	Respuesta gráfica
$(-\infty; 1] \cup [2; \infty)$	

ACTIVIDADES

I. Aplica la fórmula cuadrática, para encontrar las raíces.

1) $x^2 - 6x + 8 > 0.$

2) $x^2 + 2x + 1 \geq 0.$

3) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

4) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

5) $-x^2 + 8x - 7 < 0$

6) $x^2 - 2x < 0$

7) $x^2 + 3x - 28 < 0$

8) $x^2 + 3x \leq 0$

II. Encuentre en cada caso, el intervalo solución y represéntelo graficamente.

1) $x^2 - 6x + 8 > 0$

2) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

3) $-x^2 + 2x - 1 < 0$

4) $-x^2 + x + 5 < 0$

5) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

6) $-x^2 - x + 1 \leq 0$

7) $x^2 < 9 - 3x$

8) $x \geq 2x$

9) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

Aplicaciones de las inecuaciones cuadráticas

En esta sección resolveremos problemas con los que te encuentras en la cotidianidad, aplicando inecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 19

Encuentra dos números enteros consecutivos tales que al restar 2 a su producto, el resultado es mayor o igual que 10.

SOLUCIÓN

- Sea x, el número. Al ser consecutivo, el número que sigue a x es $x + 1$.
- El producto de ellos es: $x(x + 1) = x^2 + x$.
- El problema, dice que si a este producto, le resto 2, el resultado es mayor o igual que 10, luego debemos resolver;

$x^2 + x - 2 \geq 10$, que relacionada con cero es; $x^2 + x - 12 \geq 0$.

Si resolvemos con la fórmula general o cuadrática, tenemos que;

$$a = 1,\ \ b = 1\ \text{ y }\ c = -12.$$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$ resolviendo operaciones indicadas.

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$ resolviendo operaciones indicadas.

$x = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$ simplificando.

$x_1 = \dfrac{-1 + 7}{2} = 3$ es una raíz.

$x_2 = \dfrac{-1 - 7}{2} = -4$ es el valor de la otra raíz.

Con estas raíces, 

se general los intervalos:

$$(-\infty; -4],\ [-4; 3]\ \text{y}\ [3;\ \infty)$$

Elegimos como valores arbitrarios: -5 , 0 y 4, para sustituir en $x^2 + x - 12 \leq 0$.

si $x = -5$, $(-5)^2 + (-5) - 12 = 25 - 5 - 12 > 0$ se satisface.
$x = 0$; $(0)^2 + (0) - 12 = < 0$ no se satisface.
si $x = 4$, $(4)^2 + 4 - 12 > 0$ se satisface.

Recogemos los resultados en la siguiente tabla.

Intervalos	$(-\infty; -4]$	$[-4; 3]$	$[3; \infty)$
Valores de prueba	-5	0	4
	+	−	+
$x^2 - 3x + 2$	+	−	+

La solución del problema, está en $(-\infty; -4] \cup [3; \infty)$, por definición de unión, esto significa que la solución del problema está en $(-\infty; -4]$ o en $[3; \infty)$.

Ya que estamos buscando dos números naturales, estos deben estar en $[3, \infty)$, uno de ellos es 3, y el consecutivo es 4, y se cumple que $3(4) - 2 = 10 \geq 10$.

Ejemplo 20

La distancia de frenado d en pie, de un autobús que se desplaza a velocidad de v mll/h, está dada por $d = \frac{v^2}{20} + v$, encuentre las velocidades cuya distancia de frenado, sean menor a 75 pie.

SOLUCIÓN

De acuerdo con el problema, debemos encontrar v talque $\frac{v^2}{20} + v < 75$.

Para resolver esta inecuación, debemos primero relacionarla con 0, esto es; $\frac{v^2}{20} + v - 75 < 0$.

$v^2 + 20v - 1\,500 < 0$ multiplicando por 20.

En esta inecuación cuadrática, $a = 1$, $b = 20$ y $c = -1\,500$.

$v = \frac{-20\ \sqrt{(20)^2 - 4(1)(-1\,500)}}{2(1)}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$v = \frac{-20\ \sqrt{(400) + 6\,000}}{2}$ haciendo las operaciones indicadas.

$v = \frac{-20\ \sqrt{6\,400}}{2}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$v = \frac{-20 \pm 80}{2}$ resolviendo operaciones indicadas.

$v = \frac{-20 + 80}{2} = 30$ resolviendo operaciones indicadas.

$v = \frac{-20 - 80}{2} = -50$ descartamos este valor.

Este valor se descarta, ya que v no puede ser negativa.

Buscamos una velocidad tal que $\frac{v^2}{20} + v, < 75$, entonces concluimos que $v < 30$ mill/h.

Ejemplo 21

Pedro y su mujer fueron a comprar granos, Pedro gastó C$ 50 menos que su mujer. Si multiplicamos el gasto de ambos, el resultado es menor que C$ 600. ¿Cuánto fue lo más que gastó cada uno para que el producto de sus gastos sea menor de C$ 600?

SOLUCIÓN

- Sea x, la cantidad que gastó la mujer de Pedro.
- Pedro gastó C$ 50 menos que su mujer, luego gastó $(x - 50)$.
- El producto del gasto de ambos es, $x(x - 50)$, este producto es < 600, luego, debemos resolver la inecuación $x(x - 50) < 600$, que relacionada con cero es; $x^2 - 50x - 600 < 0$.

Si resolvemos con la fórmula general o cuadrática, tenemos que;

$$a = 1,\ b = -50 \ \text{y} \ c = -600.$$

$x = \dfrac{50 \pm \sqrt{(50)^2 - 4(1)(-600)}}{2(1)}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$x = \dfrac{50 \pm \sqrt{(2\,500) + 2\,400}}{2}$ haciendo las operaciones indicadas.

$x = \dfrac{50 \pm \sqrt{2\,900}}{2}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$x = \dfrac{50 \pm 70}{2}$ resolviendo operaciones indicadas.

$x_1 = \dfrac{50 + 70}{2} = 60$ resolviendo operaciones indicadas.

$x_2 = \dfrac{50 - 70}{2} = -10$ este valor se descarta.

Lo más que pudo haber gastado la mujer C$60, y Pedro, C$10, para que el producto de sus gastos no pasara de C$ 600.

ACTIVIDADES

I. Escribe la inecuación cuadrática.

1) ¿Cuáles serían dos números enteros consecutivos cuyo producto sea no menor que 60?

2) Al cuadrado de la cantidad de dinero que tengo, le resto la sexta parte de lo que tengo, el resultado es mayor que 20.

3) $\frac{1}{2}$, no es mayor que $x^2 - 4$.

4) Multiplico el precio de mi pantalón por la cuarta parte del mismo, el resultado es mayor o igual que $\frac{1}{2}$.

5) Un número es tal, que su cuadrado dividido, entre (22 más el número) no es menor que 26.

6) El precio del quintal de arroz es tal, que su producto, multiplicado por (su quinta parte más 1) no es menor que 13.

II. Resuelve cada uno de los problemas.

1) Si por cada cerdo que vendo obtengo C$ 2 500, cuántos cerdos tengo que vender para obtener un ingreso de entre C$ 7 500 y C$ 12 500?

2) Encuentra dos números enteros consecutivos tales que al restar -3, a su producto, el resultado es mayor o igual que 10.

3) El ingreso que se obtiene por venta de x cajillas de huevos viene dado por la ecuación: $x(5-0{,}5x)$, donde x representa el número de cajillas de huevos vendidas. ¿Cuantas cajillas deben venderse para obtener un ingreso no menor de C$1 200.

4) Don Juan y su mujer fueron al mercado, don Juan gastó C$ 60 más que su mujer. Si multiplicamos el gasto de ambos, el resultado es menor que C$ 900. ¿Cuánto fue lo más que gastó cada uno?

5) El ingreso anual que don Jacinto obtiene por la venta de x número de cerdos, está determinado por la ecuación:

$$x(5+0{,}2x)$$

cuántos debe vender anualmente para obtener un ingreso no menor de C$ 750.

6) Si la diferencia entre $x(x+1)$, y $x(x-1)$ es menor que 1 800. ¿En que intervalo estaría el valor de x?

7) Cuánto debe valer x para que $2 < x(x-2) < 30$.

Indicador de logro: Aplicar las propiedades de las inecuaciones con valor absoluto en resolución de la vida cotidiana.

Propiedades de las inecuaciones con valor absoluto

El **valor** absoluto o módulo de un número real, está relacionado, con la noción de magnitud y distancia, en diferentes contextos matemáticos y físicos.

El valor absoluto o módulo de un número real, es su valor numérico sin tener en cuenta su signo, sea este positivo (+) o negativo (−).

Así, por ejemplo; el valor absoluto de 3,es; $|3| = 3$ y el de -3, es; $|-3| = 3$.

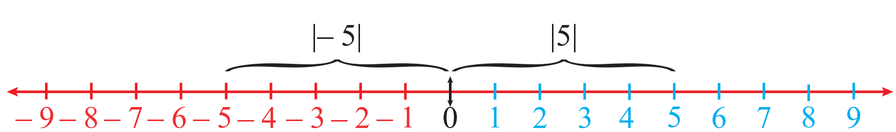
Formalmente, el valor absoluto del número a representado por |a|, se define:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a > 0 \\ 0, \text{ si } a = 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|a|$ representa una distancia, por tal razón, es un número positivo o cero, nunca negativo.

Por ejemplo:

- Si $a = 5$, $a > 0$, luego de acuerdo con la definición $|5| = 5$.
- Si $a = 0$, de acuerdo con la definición $|0| = 0$.
- Si $a = -5$, $a < 0$, luego, de acuerdo con la definición $|-5| = -(-5) = 5$. Véalo en el gráfico.



Sencillamente, suma las distancias unitarias entre 0 y 5, o 0 y -5. Magnitud que representan $|-5|$ y $|5|$.

Ejemplo 22

Encuentra cada una de las distancias y represéntalas graficamente.

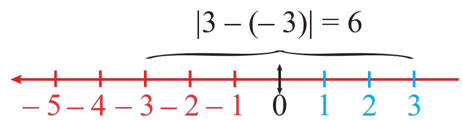
a) Entre -3 y 3.

b) Entre -8 y -3.

SOLUCIÓN

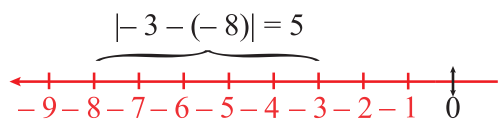
a) La distancia entre -3 y 3, es; $|3-(-3)| = |3+3| = 6$.

La distancia entre -3 y 3. es de 6 unidades.



b) La distancia entre -8 y -3 es; $|-3-(-8)| = |-3+8| = |5| = 5$.

La distancia entre -8 y -3, es de 5 unidades.

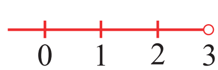


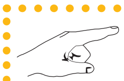
Propiedades fundamentales	Ejemplos
1) $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	$\lvert -5\rvert = \lvert 5\rvert = 5$
2) $\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	$\lvert -2\cdot 3\rvert = \lvert -2\rvert\cdot\lvert 3\rvert = 2\cdot 3 = 6$
3) $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert\frac{9}{2}\right\rvert = \frac{\lvert 9\rvert}{\lvert 2\rvert} = \frac{9}{2}$
4) $\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$	$\lvert 3-8\rvert = \lvert 8-3\rvert = \lvert 5\rvert = 5$
5) $\lvert a\rvert^2 = \lvert a^2\rvert$	$\lvert -6\rvert^2 = \lvert(-6)^2\rvert = 36$

Ejemplo 23

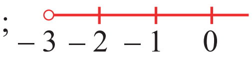
Encuentra los valores distintos de cero, que satisfacen la desigualdad $|x| < 3$, y represéntalos gráficamente.

SOLUCIÓN

- Si x es positivo, los valores que satisfacen son aquellos mayores que 0 (a la derecha de cero sin incluir 3)  .



El punto vacío en 3, indica que el 3 no se incluye.

- Si x es negativo, los valores que satisfacen son menores que 0 (a la izquierda de cero) y mayores que -3, (a la derecha de -3) sin incluir -3, esto es; 

.

Por lo tanto los valores que satisfacen $|x| < 3$, son todos los que están entre -3 y 3, sin incluir l los extremos, es decir:

Intervalo	Respuesta gráfica
$(-3, 3)$	

Ejemplo 24

Encuentra el conjunto solución de la inecuación $|x| \geq 2$

SOLUCIÓN

- Si x es positivo, los valores que satisfacen son los mayores o iguales que 2, incluyendo el 2.

- Si x es negativo, los valores que satisfacen son menores o iguales que -2, incluyendo -2.

por lo tanto los valores que satisfacen $|x| \geq 2$, son todos los que están a la derecha de 2 inclusive, o a la izquierda de -2 inclusive. Esta situación se representa como una unión de intervalos ya que $[2; \infty)$ y $(-\infty; 2]$ no tienen puntos en común.

Intervalo	Respuesta gráfica
$(-\infty; 2] \cup [2; \infty)$	

ACTIVIDADES

Analiza la teoría antes de resolver.

I. Encuentra los valores distintos de cero, que satisfacen la desigualdad.

1) $|x| < 3$
2) $|x| \leq 4$
3) $5 \geq |x|$
4) $|x + 1| \leq 5$
5) $|x| \geq 1$
6) $|x| \geq 1$
7) $|x| > 2$
8) $0 < |x + 1|$

II. Escribe la inecuación con valor absoluto, que corresponde a la expresión dada.

1) x, está entre -5 y 5 inclusive.
2) $x \neq 0$ y , no es mayor que 5.
3) $x + 2$, está entre -1 y 1.
4) $x > 0$ siempre.
5) x , está entre $-\infty$ y 5, o entre 5 y ∞.
6) $x - 2$, no es mayor que 1.
7) $x + 1$, es mayor que -2 o es mayor que 2.
8) $1 - x$, está entre -4 y 4 inclusive.

Resolución de inecuaciones con valor absoluto

Al resolver cualquier inecuación, debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

Propiedad	Ejemplo	Intervalo
1) $\|a\| < b, \leftrightarrow -b < a < b$	$\|a\| < 3, \leftrightarrow -3 < a < 3.$	$(-3; 3)$
2) $\|a\| > b, \leftrightarrow a > b$, o $a < -b$	$\|a\| > 3, \leftrightarrow a > 3$, o $a < -3.$	$(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

Ejemplo 25

Encuentre el conjunto solución de la inecuación $|x+2|<3$.

SOLUCIÓN

Este ejercicio, es justamente la aplicación de la propiedad 1. Esta propiedad establece:

- Sabemos que si el valor absoluto de una expresión, es menor que b, entonces la expresión sin su valor absoluto, es mayor que $-b$ y menor que b.

$\|x+2\|<3$	inecuación dada.
$-3< x+2<3$	aplicando la propiedad 1.

Ahora, resolvemos la inecuación simultánea que se forma.

$-3-2< x+2-2<3-2$	sumando -2 en toda la inecuación.
$-5< x <1$	sumando 2 a toda la desigualdad.

Lo anterior significa que los valores que satisfacen la inecuación son aquellos comprendidos entre -5 y 1, es decir; el intervalo o conjunto solución, o valores que hacen verdadera la inecuación es $(-5;\ 1)$.

Intervalo solución	Solución gráfica
$(-5, 1)$	

Ejemplo 26

Encuentre el conjunto solución de la inecuación $\left|\frac{x-2}{3}\right|\leq 2$.

SOLUCIÓN

La inecuación es de nuevo la aplicación de la propiedad 1, entonces:

$\left\|\frac{x-2}{3}\right\|\leq 2$	inecuación dada.
$-2\leq\frac{x-2}{3}\leq 2$	aplicando la propiedad 1.
$-2(3)\leq\left(\frac{x-2}{3}\right)(3)\leq 2(3)$	multiplicando por 3.

$-6 \le \left(\frac{x-2}{\cancel{3}}\right)(\cancel{3}) \le 6$ efectuando operaciones indicadas.

Ahora, resolvemos la inecuación simultánea que se forma.

$-6+2 \le x-2+2 \le 6+2$ sumando 2 en toda la inecuación.

$-4 \le x \le 8$ es la solución buscada.

Intervalo solución	Solución gráfica
$[-4, 8]$	

Ejemplo 27

Encuentra el conjunto solución de la inecuación $\frac{1-2x}{2} \le 4$.

SOLUCIÓN

La inecuación es de nuevo la aplicación de la propiedad 1, entonces:

$\frac{1-2x}{2} \le 4$ inecuación dada.

$-4 \le \frac{1-2x}{2} \le 4$ aplicando la propiedad 1.

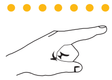
$-4(2) \le \left(\frac{1-2x}{2}\right)(2) \le 4(2)$ multiplicando por 2.

$-8 \le \left(\frac{1-2x}{\cancel{2}}\right)(\cancel{2}) \le 8$ efectuando operaciones indicadas.

$-8-1 \le 1-2x-1 \le 8-1$ sumando -1 en toda la inecuación.

$-9 \le -2x \le 7$ reduciendo.

$-9\left(-\frac{1}{2}\right) \ge -2x\left(-\frac{1}{2}\right) \ge 7\left(-\frac{1}{2}\right)$ multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$.



Recuerda, que al multiplicar una inecuación por un número negativo, se invierten los signos de la inecuación.

$\frac{9}{2} \geq x \geq -\frac{7}{2}$ multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ e invirtiendo la inecuación.

Intervalo solución	Solución gráfica
$\left[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]$	

Ahora, resolveremos ejercicios aplicando la propiedad 2, según la cual:

➢ Si el valor absoluto de una expresión algebraica es más grande que b, (|Expresión algebráica| > b), entonces, la expresión algebraica (Expresión algebráica) es mayor que b o menor que $-b$.

Ejemplo 28

Encuentra el conjunto solución de la inecuación de $|3x + 2| > 4$.

SOLUCIÓN

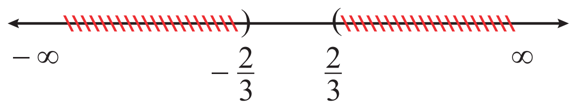
La inecuación es la aplicación de la propiedad 2, entonces:

$3x + 2 > 4$ o $3x + 2 < -4$

Estas son dos inecuaciones que podríamos resolver simultáneamente.

$3x + 2 > 4$	o	$3x + 2 < -4$	son las inecuaciones.
$3x + 2 - 2 > 4 - 2$	o	$3x + 2 - 2 < -4 - 2$	sumando -2.
$3x > 2$	o	$3x < -6$	resolviendo.
$3x\left(\frac{1}{3}\right) > 2\left(\frac{1}{3}\right)$	o	$3x\left(\frac{1}{3}\right) < -6\left(\frac{1}{3}\right)$	multiplicando por $\left(\frac{1}{3}\right)$.
$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > \left(\frac{2}{3}\right)$	o	$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > \left(\begin{matrix}2\\ \frac{-\cancel{6}}{\cancel{3}}\end{matrix}\right)$	simplificando por 3.
$x > \left(\frac{2}{3}\right)$	o	$x < -\left(\frac{2}{3}\right)$	es el resultado.

Lo anterior significa que el conjunto solución de la inecuación está conformado por todos los números meros reales que están, a la izquierda de $-\left(\frac{2}{3}\right)$ o a la derecha de $\left(\frac{2}{3}\right)$, lo cual genera una unión de intervalos.

Intervalo solución	Solución gráfica
$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$	

Ejemplo 29

Encuentra el conjunto solución de la inecuación de $|3 - x| \geq 4$.

SOLUCIÓN

La inecuación es de nuevo la aplicación de la propiedad 2, entonces:

$3 - x \geq 4 \qquad o \qquad 3 - x \leq -4$

Estas son dos inecuaciones que podríamos resolver simultáneamente.

$3 - x \geq 4$	o	$3 - x \leq -4$	son las inecuaciones.
$3 - x - 3 \geq 4 - 3$	o	$3 - x - 3 \leq -4 - 3$	sumando -3.
$-x \geq 1$	o	$-x \leq -7$	resolviendo.
$-x(-1) \leq 1(-1)$	o	$-x(-1) \geq -7(-1)$	multipliocando por (-1).
$x \leq -1$	o	$x \geq 7$	es el resultado.

Lo anterior significa que el conjunto solución de la inecuación está conformado por todos los números reales que están a la izquierda de -1, incluyendo -1, o a la derecha de 7, incluyendo 7, esto genera una unión de intervalos.

Intervalo solución	Solución gráfica
$(-\infty, -1] \cup [7, \infty)$	

ACTIVIDADES

Analiza la teoría antes de resolver.

I. Encuentra el intervalo solución de las inecuaciones.

1) $|x + 2| < 3$

2) $|x - 1| \leq 4$

3) $5 \geq |2 + x|$

4) $|3 - x| \leq 5$

5) $|x| \geq 1$

6) $|x| \geq 1$

7) $|1 + 2x| > 3$

8) $3 < |x + 1|$

9) $|1 + 2x| \leq 3$

10) $\dfrac{|2x + 1|}{3} < 1$

11) $\dfrac{|2x + 1|}{3} \leq 2$

12) $\dfrac{|2x + 1|}{3} > 6$

13) $|2x - 1| < 2$

14) $|1 - 2x| \leq 3$

15) $|4x + 2| > 5$

16) $|2x - 7| \geq 8$

17) $|5x - 1| < 4$

18) $|2 - 3x| \leq 10$

AUTOEVALUACIÓN

Con tu compañero del lado discute, a fin de resolver.

I. Distingue entre las inecuaciones dadas, las lineales y las cuadráticas. ¿Porqué son, o porqué no son?

1) $x - 1 < 7$ ______________________________

2) $3x^3 + 2 \geq 7$ ______________________________

3) $12 + x = 0$ ______________________________

4) $2 < 10 - x \leq 20$ ______________________________

5) $1 < 2 + x^2 < 9$ ______________________________

6) $2 + 3x^2 < 5$ ______________________________

II. Escribe V o F, según la expresión sea verdadera o falsa.

1) -2, satisface la inecuación $x - 1 < 7$

2) El 0, es un valor que hace falsa la inecuación $x^3 + 2 \geq 7$

3) 5, es un valor que satisface la inecuación $1 < 2 + x < 9$

4) El conjunto solución de $1 < 2 + x < 9$, es una unión de conjuntos

5) El conjunto solución de $|2 + x| \geq 9$, es una intersección de conjuntos

III. Las raíces de la ecuación asociada a cada inecuación son.

1) $x^2 - 6x + 5 > 0$
2) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$
3) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$
4) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

IV. Encuentra el intervalo solución de las inecuaciones siguientes.

1) $x^2 - 6x + 8 > 0$

2) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

3) $x^2 - x - 1 > 0$

4) $|6x - 5| < 0$

5) $-2 < x - 3 \leq 10$

6) $|-9x + 1| \leq 5$

7) $x \geq 5 - 4x$

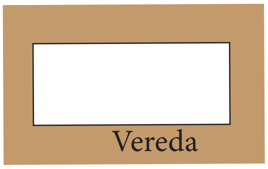
8) $x \geq 3x$

9) $|x - 15| > 6$

V. Resuelva

1) Robert, es pescador en Corn Island. Su ganancia neta diaria está dado por la ecuación: $x^2 - 7x$ donde x es el precio de cada libra de pescado que vende. ¿ A qué precio debe vender si quiere que su utilidad diaria sea mayor o igual que C$1 800.

2) Julio quiere cercar un terreno rectangular de 4×8 m, para hacer un corral. Decide poner una vereda de 1 m de ancho, en toda la orilla. ¿ Cual debe de ser el área máxima de la vereda?

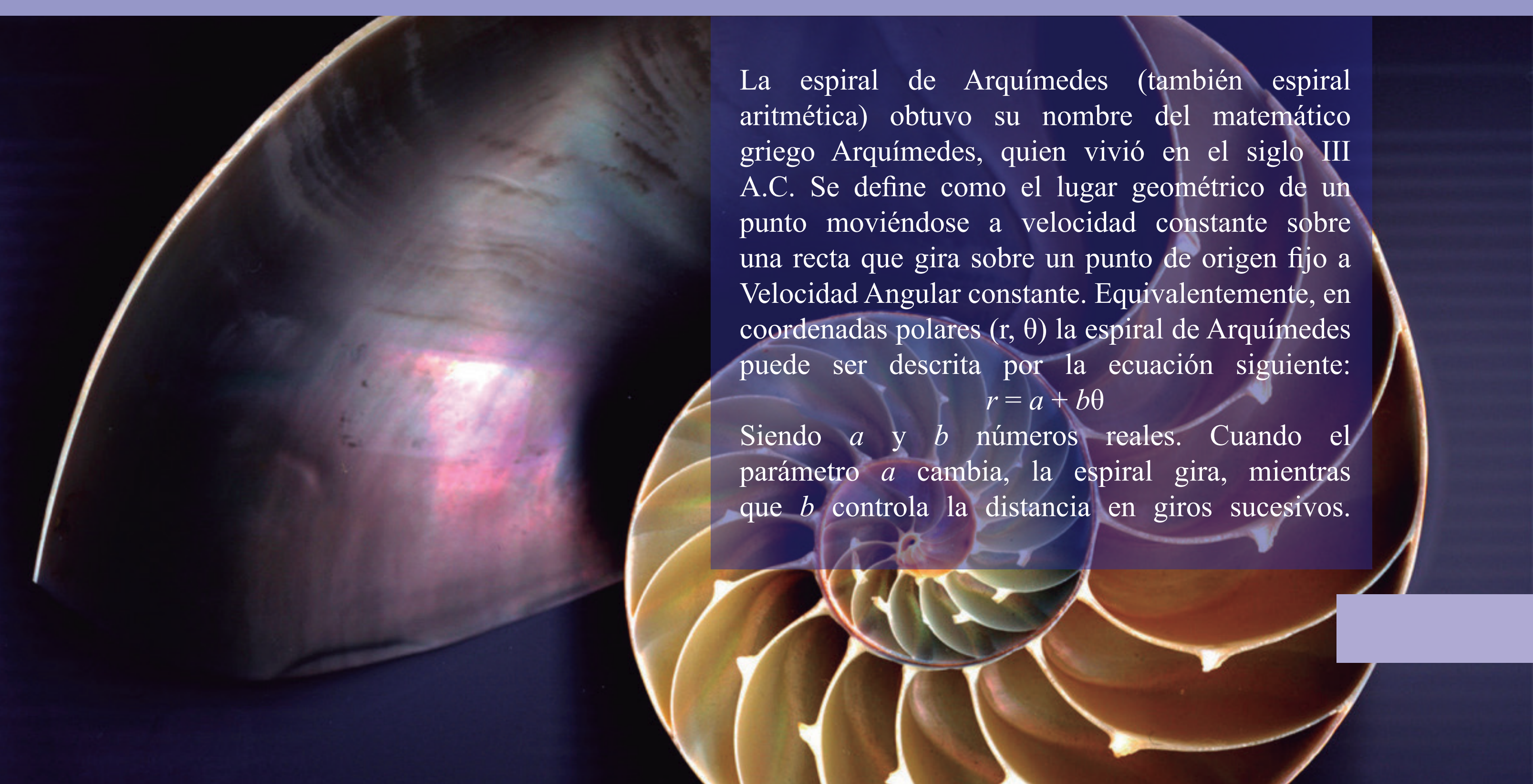


3) ¿Cuál es el intervalo que debe satisfacer, la inecuación de segundo grado cuyas raíces sean los cubos de las raíces de $x^2 - 3x > -2$.

4) Un alumno de álgebra tiene calificaciones de 75, 82, 71 y 84 ¿Qué calificación debe de obtener en la siguiente prueba para elevar su promedio a 80?

III UNIDAD

FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES EN LA NATURALEZA



La espiral de Arquímedes (también espiral aritmética) obtuvo su nombre del matemático griego Arquímedes, quien vivió en el siglo III A.C. Se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a Velocidad Angular constante. Equivalentemente, en coordenadas polares (r, θ) la espiral de Arquímedes puede ser descrita por la ecuación siguiente:

$$r = a + b\theta$$

Siendo a y b números reales. Cuando el parámetro a cambia, la espiral gira, mientras que b controla la distancia en giros sucesivos.

Indicador de logro: Gráfica funciones: función valor absoluto y función a trazos de acuerdo a las características de cada una y sus propiedades.

FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES EN LA NATURALEZA

Rememoración de conceptos previos

La idea de correspondencia o relación entre conjuntos, es muy común:

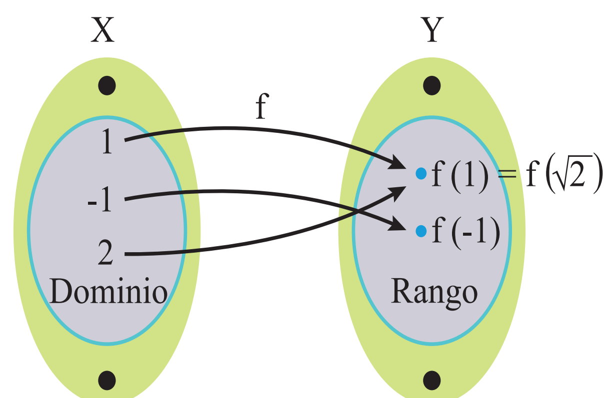
- Correspondencia entre las utilidades y las ventas.
- Entre velocidad y espacio recorrido.
- Entre el tipo de trabajo y salario devengado, etc.

Consideremos los conjuntos numéricos no vacíos, X e Y con la correspondencia f, mostrada en el diagrama.

Se observa lo siguiente:

- $f(1)$, es la imagen de 1 y también de $\sqrt{2}$.
- $f(-1)$, es la imagen de -1.

Los puntos (•) dibujados en el conjunto X, representan elementos de ese conjunto que no están relacionados con elementos de Y.



- Los puntos (•) dibujados en el conjunto Y, representan elementos de ese conjunto que no están relacionados con elementos de X.

- Los elementos del conjunto X que están relacionados con los de Y, son las **preimagenes** de f.
- Los elementos del conjunto Y que están relacionados con los de X, son las **imágenes** de f.
- El conjunto de elementos de X, relacionados con los de Y, determinan el **dominio** de f.
- El conjunto de elementos de Y,relacionados con los de X, determinan el **recorrido** de f.
- En este caso, el dominio de f es, $D_f = \{-1, 1, \sqrt{2}\}$, y el recorrido es, $R_f = \{f(-1), f(1), f(\sqrt{2})\}$

Definición de relación

Dados dos conjuntos A y B, llamamos <u>relación</u> de A en B, a cualquier subconjunto de pares (a, b) donde a está en A y b está en B, es decir:

$$a \in A \text{ y } b \in B$$

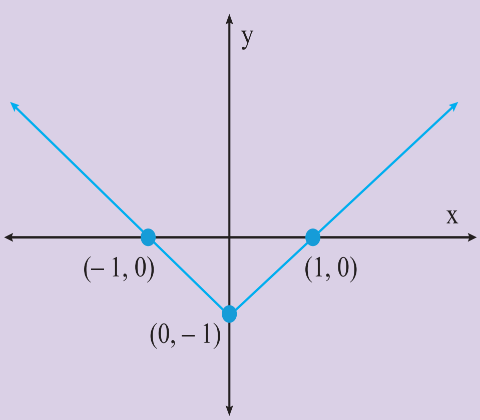
Definición de función

Una función, de un conjunto X en un conjunto Y, es una regla que le hace corresponder a cada elemento x del conjunto X, un <u>único</u> elemento del conjunto Y.

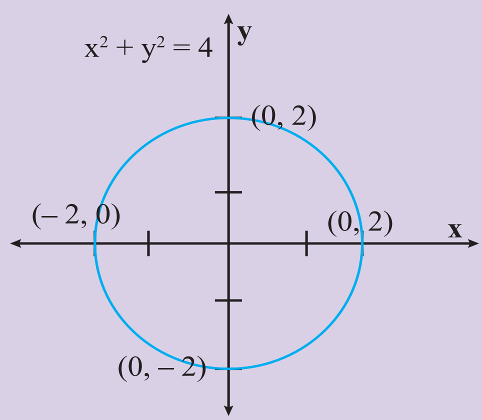
Si se hace corresponder a cada elemento x del conjunto X, más de un elemento del conjunto Y, la regla de asignación es una **relación**.

En general, cualquier conjunto de parejas ordenadas, representa una relación, en cambio la función exige que a cada preimagen le corresponda <u>solamente una</u> imagen.

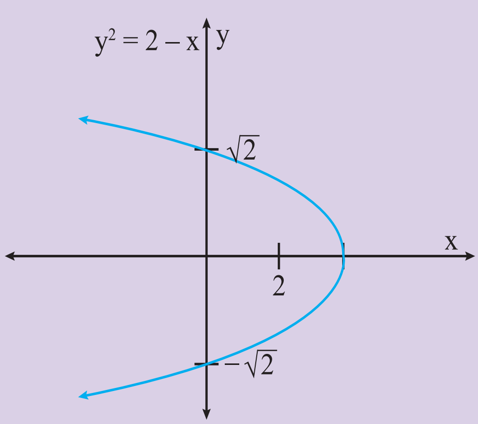
Con los siguientes gráficos, ejemplificamos estos conceptos.



Los puntos $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$ y $(1;\ 0)$ evidencian que a cada valor de x le corresponde una imagen única, luego el gráfico representa una función.



En el gráfico, el 0 tiene dos imágenes; 2 y -2, luego, <u>no</u> representa una función, representa una relación.



El 0, tiene dos imágenes; $\sqrt{-2}$ y $\sqrt{2}$ luego, el gráfico <u>no</u> representa una función, representa una relación.

Dominio y recorrido

- El conjunto de elementos de X, relacionados con los de Y, determinan el **dominio** de f.
- El conjunto de elementos de Y, relacionados con los de X, determinan el **recorrido** de f.

Dominio de una función

El dominio de una función real f, es el conjunto de todos los números reales x, que pertenecen a la función, esto es:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / (x; y) \in f\}$$

Recorrido de una función

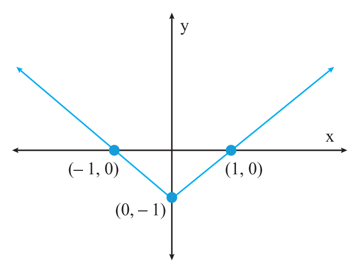
El recorrido de una función real f, es el conjunto de todos los números reales, que pertenecen a la función, esto es:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} / (x; y) \in f\}.$$

Ejemplo 1

Analicemos los siguientes ejemplos.

a) En el gráfico de la derecha, el dominio es el conjunto de todos los valores que toma x, puede verse que abarca los valores reales desde $-\infty$, hasta ∞, o bien, todos los números reales, el dominio es;

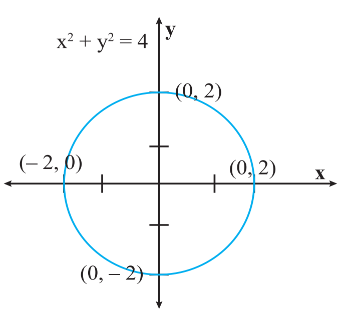


$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$$

El recorrido es el conjunto de todos los y, desde -1 (menor valor), hasta $+\infty$, es decir;

$$R_f = [-1; \infty)$$

b) En el gráfico de la derecha, el dominio es el conjunto de todos los valores que toma x, puede verse que abarca los valores reales desde -2, hasta 2, incluyendo los extremos, es decir, el dominio es;



$$D_f = [-2; 2]$$

El recorrido es el conjunto de todos los y, desde -2 (menor valor), hasta 2, es decir; el recorrido es;

$$R_f = [-2; 2]$$

Ejemplo 2

Analice en cada caso, la función y determine su dominio.

a. $f(x) = \sqrt{x}$ b. $y = \dfrac{2}{x+1}$ c. $y = x^2 - 3$

SOLUCIÓN

a) A la función $f(x) = +\sqrt{x}$, se le antepuso el signo $+$, esto lo hicimos con el único objetivo de recordarte que $\sqrt{x}$ tiene 2 valores, uno positivo y otro negativo, no obstante, para que $f(x) = +\sqrt{x}$, represente una función, debemos considerar solamente una raíz, o sea, un valor, ya que al ser, función, cada elemento x debe tener <u>una única imagen</u>.

El dominio de $f(x)$, es el conjunto de los números reales desde $-\infty$, hasta 0, ya que la raíz cuadrada de un número negativo, no existe.

Se puede escribir; $D_f = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq 0\}$, o se puedes escribir $D_f = (-\infty;\ 0]$.

La x toma el valor 0, lo cual justifica, el intervalo cerrado en 0.

b) El gráfico se extiende a lo ancho desde $-\infty$, hasta -1, luego, de -1, hasta ∞. ¿Que pasa en -1?

Sucede que si $x = -1$, entonces $y = \frac{2}{-1+1} = \frac{2}{0}$, la división por cero no esa definida, por esa razón, -1, no pertenece al dominio de f, esto se escribe;

$$D_f = (-\infty;\ -1) \cup (-1; \infty)$$

-1, no es parte del dominio de f, por tal razón no está incluido en $(-\infty;\ -1) \cup (-1; \infty)$.

c) En $y = x^2 - 3$, la variable x, puede tomar cualqier número real, por tanto su dominio es todo el conjunto de los números reales, $D_f = \mathbb{R}$, que también puede escribirse $D_f = (-\infty;\ \infty)$.

Ejemplo 3

Determine el recorrido o rango de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x$ b) $y = x^2 - 3$

SOLUCIÓN

La expresión $R_f = \{y \in \mathbb{R} / (x, y) \in f\}$, establece que el recorrido de f, son todos los <u>números reales</u> y, para los cuales la función está definida.

a). Observamos que $f(x)$, está definida para todos los valores de x, luego, el recorrido es:

$$R_f = (-\infty;\ \infty)$$

b. La función $y = x^2 - 3$, es cuadrática, su ecuación equivale a; $y = x^2 + 0x - 3$, donde;

$a = 1,\ b = 0,\ c = -3$ (b es cero ya que no aparece en la función)

De la función cuadrática sabemos que:

- Su gráfico es una parábola, que se abre hacia arriba cuando $a > 0$, y hacia abajo cuando $a < 0$.
- Su vértice, es el punto más alto en la gráfica cuando $a < 0$, y el más bajo, cuando $a > 0$.
- El vértice, se calcula con la fórmula $v = \left[-\frac{b}{2a};\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

> Para calcular el recorrido de una función cuadrática, es imperativo encontrar las coordenadas del vértice $v = \left[-\frac{b}{2a};\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

En el caso que nos ocupa, $a = 1,\ b = 0$. Como a es positivo, la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un punto mínimo. Las coordenadas del vértice son $-\frac{b}{2a}$ y $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2a} = 0$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(0)$$

sustituyendo $\frac{b}{2a}$ por 0

$= 0^2 - 3 = -3$ el vértice es $V = (0; -3)$.

El vértice $(0, -3)$, es un punto mínimo, ya que $a = 1 > 0$, luego, el menor valor de y, es -3, por tanto el recorrido de f es:

$$R_f = [-3;\ \infty)$$

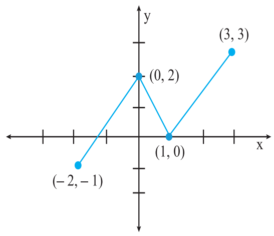
> El punto $(0, -3)$, pertenece a la función, por tanto el intervalo es cerrado por la izquierda.

El dominio y el recorrido de una función también se puede deducir a partir del gráfico de f.

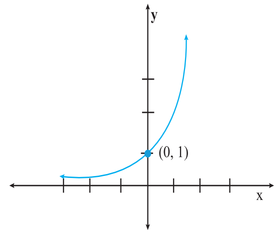
Ejemplo 4

Partiendo del gráfico, determina el dominio y el recorrido de cada función.

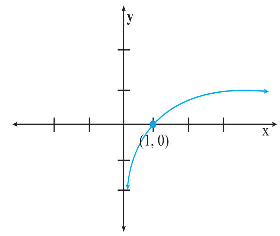
a)



b)



c)



SOLUCIÓN

a) La extensión del gráfico en el eje x, (a lo ancho), es de -2 a 3, luego; $D_f = [-2; 3]$.

La extensión del gráfico a lo alto, es -1 a 3, por tanto $R_f = [-1; 3]$.

b) La extensión del gráfico en el eje x, (a lo ancho), es de $-\infty$ a ∞, luego; $D_f = \mathbb{R}$, o sea $D_f = (-\infty; \infty)$.

La extensión del gráfico a lo alto, es desde 0, sin incluirlo, a ∞, por tanto $R_f = (0; \infty)$.

c) El gráfico en el eje x, (a lo ancho), se extiende, de 0, sin incluirlo, a ∞, luego; $D_f = (0; \infty)$.

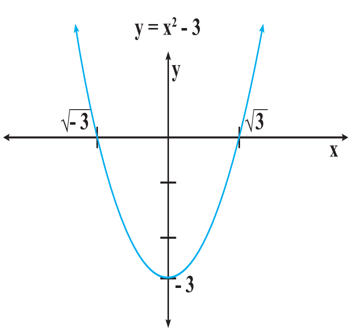
El gráfico a lo alto, se extiende desde $-\infty$, a ∞, por tanto $R_f = (-\infty; \infty)$.

ACTIVIDADES

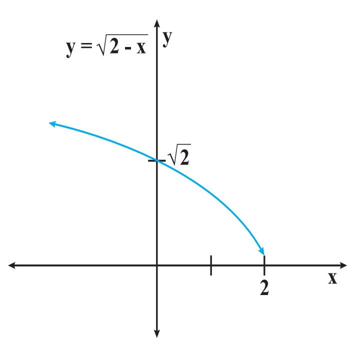
Se sugiere al docente, hacer prueba diagnóstica sobre estos conceptos.

I. En base a la teoría estudiada determina, el dominio y el recorrido de cada una de las funciones.

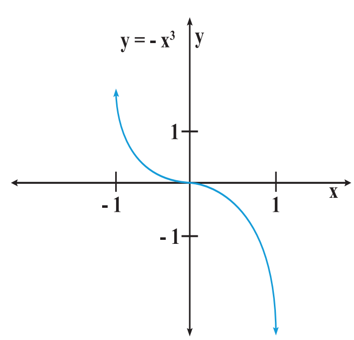
1)



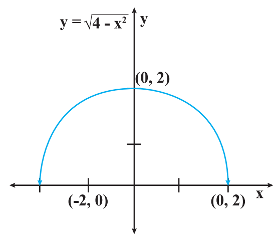
2)



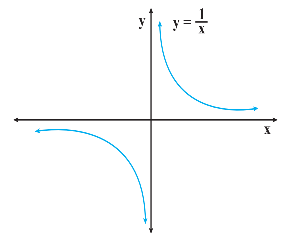
3)



4)



5)



II. Encontrar el dominio y el recorrido de las funciones siguientes.

1. $y = x^2 + 1$
2. $y = x$
3. $y = 2x + 3$
4. $y = \sqrt{x + 2}$
5. $y = 4 - x^2$
6. $y = \sqrt{1 - x}$
7. $2x - y + 3 = 0$
8. $y = 3$

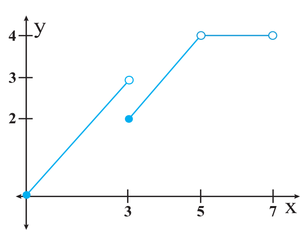
Funciones definidas a trozos

Las funciones seccionadas, son también llamadas funciones a trozos, ya que se trata de una misma función, que se define de distinta manera, en cada uno de los subintervalos de su dominio.

Un ejemplo de la utilidad de las funciones seccionadas, es el siguiente:

Si; $f(x)$ representa las ventas de artículos escolares, es claro que estas son mayores al inicio del período escolar, y disminuyen durante el resto del año, esto significa, que la función que describe estas ventas, tiene comportamientos distintos, en intervalos de tiempo distintos, se comporta de manera diferente; al comienzo, durante y al final del año escolar.

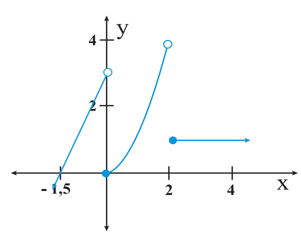
Como ejemplos de funciones seccionadas tenemos:



En este caso, f, está definida:

Como una recta en [0; 3).
Como otra recta en [3; 5).

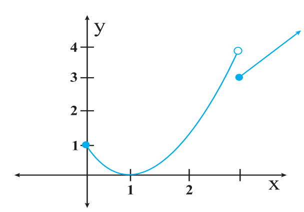
Como una función constante en (5; 7).



f, está definida:

Como una recta en $(-\infty; 0)$.
Como parábola en [0; 2).

Como una función constante en $(2; \infty)$.



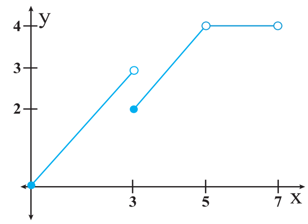
En este caso, f, está definida:

Como una función cuadrática en [0; 3).

Como una recta en $[3; \infty)$.

Los puntos que no toma la función, se representan gráficamente vacíos (0).

Ejemplo 5



Encuentra a partir del gráfico, las imágenes de; 0, 3, 5, y 7 si están definidas.

SOLUCIÓN

La imagen de 0, es 0.

La imagen de 3, es 2.

La imagen de 5 no existe, la función no está definida en ese punto.

La imagen de 7, tampoco existe.

Ejemplo 6

Explica el procedimiento seguido para elaborar el gráfico del ejemplo anterior, cuya función correspondiente es $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x-1 & \text{si } 3 \le x \le 5 \\ 4 & \text{si } 5 < x < 7 \end{cases}$.

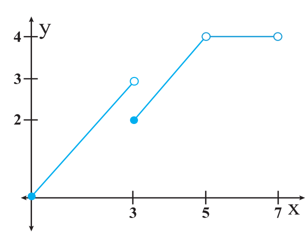
La imagen de 0, es 0.

La imagen de 3, es 2.

La imagen de 5 no existe, la función no está definida en ese punto.

La imagen de 7, tampoco existe.

SOLUCIÓN



El primer valor del dominio de $f(x)$ es $x = 0$ y el último es $x < 7$.

Empezamos a graficar en el intervalo $[0; 7)$, la primera parte del gráfico de f que es $f(x) = x$, o $y = x$, es una función lineal, ya que tanto y como x tienen exponente 1.

Sabemos que el gráfico de una función lineal es una recta, sabemos también, que dos puntos determinan una <u>única recta</u>, luego, para hacer el gráfico de una función lineal, es suficiente encontrar dos puntos de la función y ellos determinarán la recta. Asignaremos a x, los valores extremos ya que son los puntos donde empieza y termina el gráfico del primer trozo.

Primer trozo

x	0	3
$y = x$	0	3

Segundo trozo

x	3	5
$y = x - 1$	2	4

En el último segmento la función es constante e igual a 4. Se grafica sin necesidad de tabla.

Función mayor entero

La función de parte entera o mayor entero, es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$; toma un número real y devuelve un número entero mas próximo, sea por exceso, o por defecto.

Consideraremos aquella función, que a cada número real asigna el número entero, más próximo por defecto; se representa por $f(x) = [x]$.

Por ejemplo; $[-2,7] = -3$, porque -3 es el mayor entero más próxima a $-2, 7$.

$$[-\sqrt{3}] = 2, \text{ etc.}$$

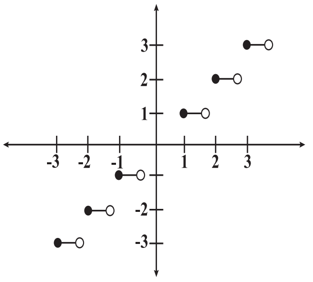
Ejemplo 7

El gráfico de $f(x) = [x]$, consta de segmentos de recta horizontales, siempre que x, esté entre dos enteros consecutivos.

Esta función se representa por $f(x) = [x]$, sus valores y el gráfico, se muestran en la tabla.

Observe que x no toma los valores derechos del intervalo.

Valores de x	[x]
. . .	
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
. . .	

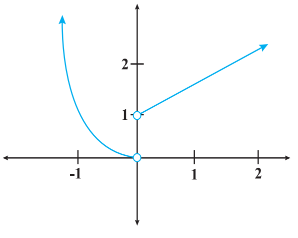


Ejemplo 8

Grafica la función, $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Determine el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN

Es importante enfatizar que $f(x)$ representa <u>una sóla función</u>, que a la izquierda de 0, describe una parábola, que no está definida en 0, y a la derecha describe un segmento lineal, que tampoco está definida en 0.



La función cuadrática $y = x^2$, describe una parábola con; $a = 1$, $b = 0$, y $c = 0$, por tanto su vértice es:

$$V = \left[-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right] = \left[-\frac{0}{2a}, f(0)\right] = (0, 0)$$

Primer trozo

x	0	-1	-2
$y = x^2$	0	1	4

Segundo trozo

x	0	2
$y = x + 1$	1	3

El segmento de gráfico, correspondiente a la función cuadrática, se abre por la izquierda, desde $-\infty$, hasta 0, y no está definida en 0.

El segmento de gráfico, correspondiente a la función lineal, se extiende a lo ancho desde 0, sin incluirlo,hasta + ∞, luego 0, no pertenece al dominio de la función y por tanto el dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Las dos ramas del gráfico de f, suben desde 0, sin incluirlo, hasta + ∞, luego, el recorrido de f es;

$$R_f = (0; \infty).$$

ACTIVIDADES 3.2

I. Elabore las gráficas de cada una de las funciones siguientes.

1) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 4 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & \text{si } x < 0 \\ 4 - x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x < 1 \\ 3, & \text{si } x = 1 \\ x + 1, & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \geq 4 \\ x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$

11) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x - 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

12) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 - x & \text{si } x = 1 \\ -x + 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

Gráfico de la función valor absoluto

La función valor absoluto, y = f(x) = |x|, es una función, que se puede definir a trozos, ya que de acuerdo con la definición, de valor absoluto de un número, la función se transforma, en una función seccionada.

$$|x| = \begin{cases} x > 0 & \rightarrow \text{caso } 1 \\ x = 0 & \rightarrow \text{caso } 2 \\ x < 0 & \rightarrow \text{caso } 3 \end{cases}$$

Para graficar la función valor absoluto de x, debemos considerar los 3 casos de su definición;

Ejemplo 9

Grafica la función $y = |x|$.

SOLUCIÓN

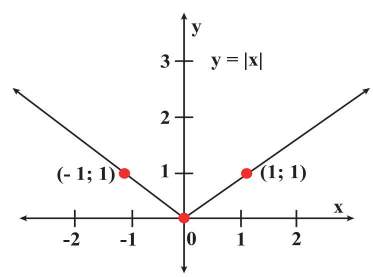
Por definición; $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \rightarrow \text{caso } 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \rightarrow \text{caso } 2 \\ -x & \text{si } x < 0 \rightarrow \text{caso } 3 \end{cases}$

La siguiente estrategia, es aconsejable para graficar esta función:

- Asignar a x, el número que anula el valor absoluto, o módulo de x.
- Asignar además, números a la izquierda, y a la derecha, del valor que anula el módulo.

En la definición de valor absoluto, se ha destacado en rojo, el valor que hace 0 el módulo.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x$	$y = \|-2\| = 2$	$y = \|-1\| = 1$	$y = \|0\| = 0$	$y = \|1\| = 1$	$y = \|2\| = 2$
	a la izquierda de 0.		valor nulo	a la derecha de 0.	



Aunque podemos asignar a x, cualquier valor real, por comodidad, asignamos solamente valores enteros.

Ejemplo 10

Represente gráficamente la función $f(x) = y = |x - 1|$.

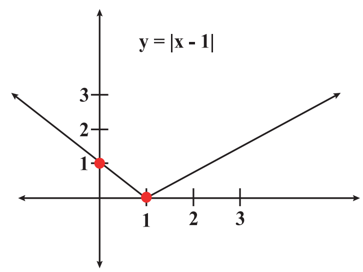
SOLUCIÓN

Por definición;

$$|x-1| = \rightarrow \begin{cases} x-1, & \text{si } x-1>0 \rightarrow \text{caso 1} \\ 0, & \text{si } x-1=0 \rightarrow \text{caso 2} \\ -(x-1), & \text{si } x-1<0 \rightarrow \text{caso 3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{si } x-1>0, \text{ entonces } x>1 & \rightarrow \text{caso 1} \\ \text{si } x-1=0, \text{ entonces } x=1 & \rightarrow \text{caso 2} \\ \text{si } x-1<0, \text{ entonces } x<1 & \rightarrow \text{caso 3} \end{cases}$$

El valor que anula el módulo es $x = 1$, entonces, debemos asignar a la variable x, valores a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

x	-1	0	1	2
$y = \|x-1\|$	$y = \|-1-1\|$ $= \|-2\| = 2$	$y = \|0-1\|$ $= \|-1\| = 1$	$y = \|1-1\|$ $= \|0\| = 0$	$y = \|2-1\|$ $= \|1\| = 1$
	a la izquierda de 1		valor 1	a la derecha de 1



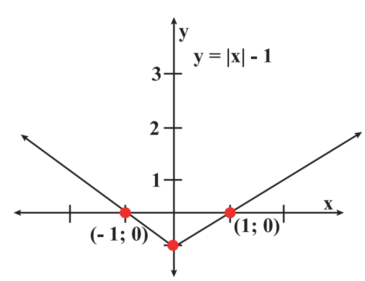
Ejemplo 11

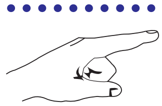
Represente gráficamente la función $f(x) = y = |x| - 1$.

SOLUCIÓN

El valor que anula el módulo es $x = 0$, entonces, debemos asignar a la variable x; además del valor que anula el módulo, valores a la izquierda y a la derecha del mismo.

x	-1	0	1	2
$y = \|x\| - 1$	$y = \|-1\| - 1$ $= 1 - 1 = 0$	$y = \|0\| - 1$ $= -1$	$y = \|1\| - 1$ $= 1 - 1 = 0$	$y = \|2\| - 1$ $= 2 - 1 = 1$
	a la izquierda de 0	valor 0	a la derecha de 0	





El gráfico de $y = |x| - 1$, es el mismo de $y = |x|$, trasladado, una unidad hacia abajo.

Ejemplo 12

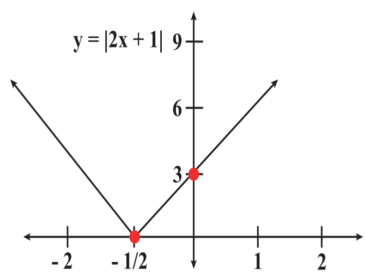
Representa gráficamente la función $f(x) = y = |2x + 1|$

SOLUCIÓN

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } 2x+1>0 \rightarrow \text{caso 1} \\ 0, & \text{si } 2x+1=0 \rightarrow \text{caso 2} \\ -(2x+1), & \text{si } 2x+1<0 \rightarrow \text{caso 3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{si } 2x+1>0, & \text{entonces } x > -\frac{1}{2} \rightarrow \text{caso 1} \\ \text{si } 2x+1=0, & \text{entonces } x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{caso 2} \\ \text{si } 2x+1<0, & \text{entonces } x < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{caso 3} \end{cases}$$

Como podemos ver, asignamos a x, el valor $-\frac{1}{2}$, valores a la izquierda y a la derecha de $-\frac{1}{2}$.

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = \|2x+1\|$	$\|2x+1\|$ $= \|2(-2)+1\|$ $= \|-4+1\|$ $= \|-3\| = 3$	$\|2x+1\|$ $= \cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)+1\|$ $= \|-1+1\| = 0$	$\|2x+1\|$ $= \|2(0)+1\|$ $= \|0+1\| = 1$
	menor que $-\frac{1}{2}$	valor $-\frac{1}{2}$	mayor que $-\frac{1}{2}$



ACTIVIDADES 3.2

I. Elabora el gráfico de cada una de las funciones dadas.

1) $f(x) = |2x+3|$
2) $f(x) = |-x+2|$
3) $f(x) = \left|\frac{1}{3} - x\right|$
4) $f(x) = |3 - x|$
5) $f(x) = |2 - x|$
6) $f(x) = |3x + 1|$
7) $f(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right|$
8) $f(x) = |5 - x|$
9) $f(x) = |-x - 1|$

Indicador de logro: Plantea y resuelve problemas de su vida cotiana relacionados con las funciones exponenciales y sus propiedades.

Función exponencial, base *a*

Función monótona

Antes de comenzar a estudiar las funciones exponenciales, necesitamos recordar el concepto de monotonía de las funciones.

Una función es monótona, si es creciente o decreciente. Una función puede ser creciente o decreciente en todo su dominio, o en partes de su dominio.

Definición de función monótona

Se dice que una función f es:

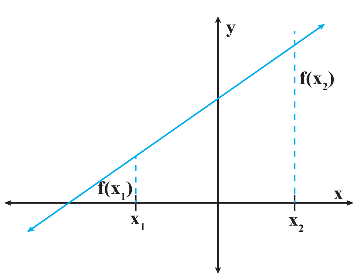
i. Creciente si y sólo si $x_1 < x_2$, implica que $f(x_1) < f(x_2)$.

ii Decreciente si y sólo si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

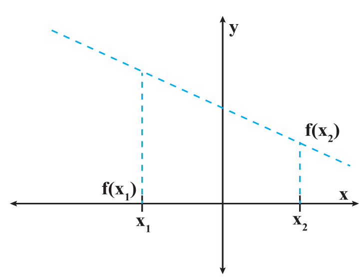
Ejemplo 13

Analiza el cumplimiento de la monotonía de la función, en cada uno de los gráficos siguientes.

a.



b.



SOLUCIÓN

a) El el gráfico a, se observa $x_1 < x_2$, ya que x_1 está a la izquierda de x_2, y, $f(x_1) < f(x_2)$, ya que la altura que determina $f(x_1)$, es menor que la determinada por $f(x_2)$. Luego la función es creciente.

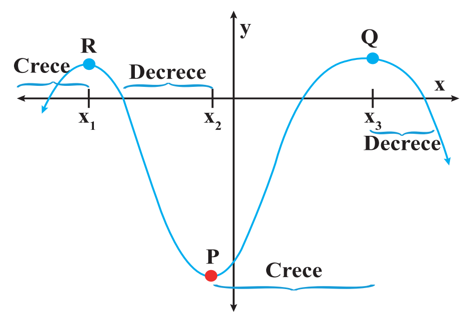
b) El el gráfico b, se observa $x_1 < x_2$, ya que x_1 está a la izquierda de x_2, pero , $f(x_1) > f(x_2)$, ya que la altura que determina $f(x_1)$, es mayor que la determinada por $f(x_2)$. La función es decreciente.

Ejemplo 14

Analiza en el gráfico el cumplimiento de la monotonía de la función.

SOLUCIÓN

En el gráfico muestra que la función alcanza su máximo valor, en los puntos R y Q. En el punto P, alcanza su valor mínimo.



El gráfico sigue el siguiente comportamiento:

- Crece a la izquierda de x_1, y a la derecha de x_2.
- Decrece a la derecha de x_1, y a la derecha de x_3.

Leyes de los exponentes

Recordaremos ahora las leyes de los exponentes ya que las utilizaremos en el estudio de la función exponencial.

Sean a, b números reales, m y n, enteros, entonces, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	Ejemplos
1) 1. $a^m \cdot \times a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = \overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}^{\text{7 veces}} = 128$
2) 2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$2^3 \cdot 3^3 = (2\cdot 3)^3 = 6^3 = 6\cdot 6\cdot 6 = 216$
3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 2\cdot 2 = 4$ $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
4) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$\frac{4^5}{2^5} = \left(\frac{4}{2}\right)^5 = 2^5 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$
5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} =$	$3^{-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
6) $(a^n)^m = a^{n\times m}$	$(2^3)^2 = 2^6 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 64$
7) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $n > 0$	$\sqrt[2]{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 5\cdot 5 = 25$
8) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, n > 0$	$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = \pm 5$
9) $a^o = 1,\ a \neq 0$	$25^o = 1,\ 99^o = 1$
10) $0^n = 0,\ n > 0$	$0^{25} = 0,\ n > 0$
11) 0^o, no está definido	

Ten en cuenta que en a^x, la base, *a* no puede ser negativa, ya que no existe un valor de x tal a^x sea menor que 0.

Definición

La función definida por $f(x) = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, x cualquier número real, se conoce como función exponencial de base a.

Ejemplo 15

¿Cuál de las siguientes funciones es exponencial?

a) $f(x) = y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$,

c) $f(x) = y = 3x + 2^x$,

d) $f(x) = y = 2^x + 1$.

SOLUCIÓN

a) Es una función exponencial de base $\frac{1}{2} < 1$.

b) Es una función exponencial. Es la función, $f(x) = \frac{1}{5}\ (2^x)$.

c) No es exponencial. Es la suma de la función lineal $y = 3x$, y la función exponencial, $y = 2^x$.

d) Es una función exponencial de base 2.

Ejemplo 16

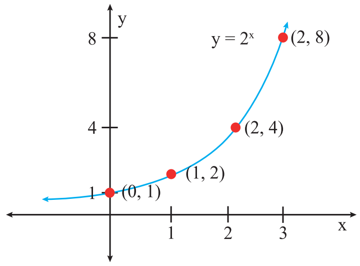
Grafica la función exponencial; $f(x) = 2^x$ y determine sus características.

SOLUCIÓN

Asignemos a la variable x, los valores que aparecen en la tabla.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$2^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}25$	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

Con esta información se hace el gráfico. Del gráfico deducimos las siguientes características de una función exponencial de base real mayor que 1:



- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$.
- El recorrido $(0; \infty)$.
- El gráfico de f intersecta al eje y en $(0; 1)$.
- La función es creciente.
- El gráfico no intersecta al eje x, es decir; que el eje x una asíntota horizontal.

Ejemplo 17

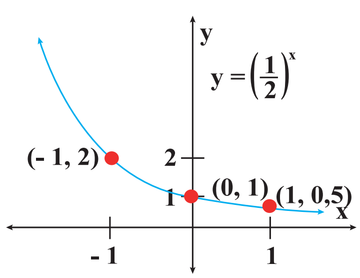
Grafica la función; $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

SOLUCIÓN

Asignemos a la variable x, los valores que aparecen en la tabla.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{2^{-2}} = 2^2 = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1^{-1}}{2^{-1}} = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$

Con esta información se hace el gráfico. Del gráfico deducimos las siguientes características de una función exponencial de base real mayor que 1:



- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$.
- El recorrido $(0; \infty)$.
- El gráfico de f intersecta al eje y en $(0; 1)$.
- La función es decreciente.
- El gráfico no intersecta al eje x; el eje x una asíntota horizontal.

Ejemplo 18

Grafica las funciones a) $f(x) = 2^x$ y b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en el mismo sistema de coordenadas, establezca las diferencias y semejanzas entre ambos gráficos.

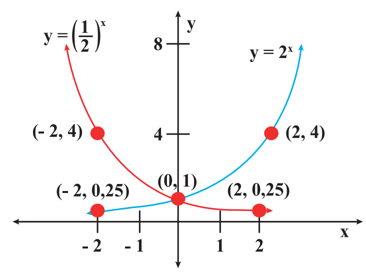
SOLUCIÓN

Del ejercicio anterior, conocemos, las características de $f(x) = 2^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$
$2x$	$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 0{,}25$	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$

Semejanzas

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$.
- El recorrido $(0; \infty)$.
- Los dos gráficos, intersectan al eje y en $(0; 1)$.
- Los dos gráficos, no intersectan el eje x, por tanto el eje x es una asíntota horizontal.



Diferencias

- $f(x) = 2^x$, es creciente; conforme los valores de x aumentan, el gráfico sube.
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, es decreciente; conforme los valores de x aumentan, el gráfico baja.

Ejemplo 19

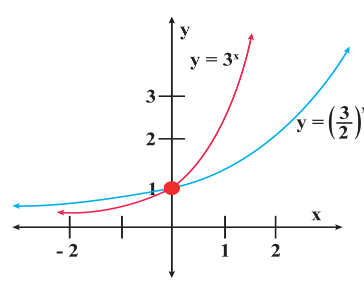
Represente en el mismo sistema de coordenadas los gráficos de a) $y = 3^x$, b) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

¿Qué características comunes se desprenden de los gráficos?

SOLUCIÓN

Una tabla de valores conjunta es la siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0{,}11$	$3^{-1} = \frac{1}{3} = 0{,}33$	1	3	9
$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}}\ \frac{4}{9} = 0{,}44$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3} = 0{,}66$	1	$1{,}5$	$2{,}25$



Los gráfico están representados en distintos colores.

Las características comunes son:

- Ambas tienen el eje x, como asíntota horizontal.
- Ambas tienen en común el punto $(0; 1)$.

ACTIVIDADES 3.2

I. ¿Cuáles de las siguientes funciones son exponenciales? Justifica la razón.

1) $f(x) = y = \left(\frac{3}{2}\right)^x,$

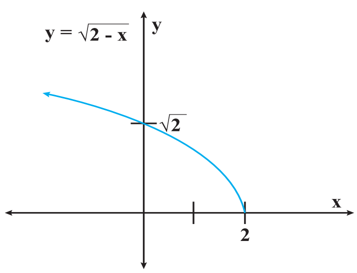
2) $f(x) = y = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x,$

3) $f(y) = x = 2^y + 3,$

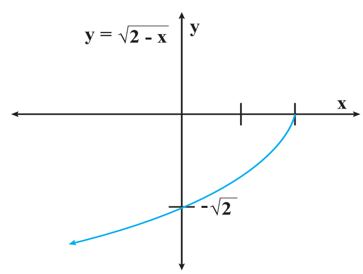
4) $f(x) = y = 2^x + 3x.$

II. Determina en cada uno de los gráficos, el intervalo de crecimiento o decrecimiento de la función.

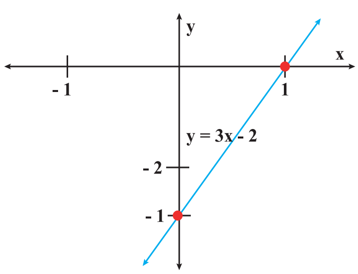
1)



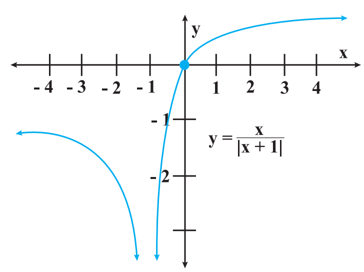
2)



3)



4)



III. Elabora el gráfico de cada una de las funciones. Determina el dominio y el recorrido.

1) $f(x) = y = 3^x$

2) $f(x) = y = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3) $f(x) = 3^{-x}$

4) $f(x) = y = 2^x + 3$

IV. Representa en el mismo sistema de coordenadas el par de gráficos, establece las semejanzas y las diferencias.

1) $f(x) = 2^x, \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \; f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,$

3) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x, \; f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}.$

Función exponencial natural

La función exponencial natural, es conocida como la función real $y = e^x$, donde e es un número irracional, aproximadamente igual a **2,71828…**

El número e, se define como el "número al que se acerca la expresión $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, cuando n se acerca al infinito.

Veremos esto, asignando valores a n y observando los valores de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

n	$\left(\frac{1}{n}\right)$	$1 + \left(\frac{1}{n}\right)$	$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	**Conclusión**
1	1	2	**2 00000000**	
10	0,5	1,5	2 59374246	Con estos cálculos, observamos
1 000	0,2	1,2	2 70481383	que cuando n es muy grande (n
10 000	0,1	1,1	2 71692393	$\to \infty$), el valor de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ se
100 000	0,01	1,01	2 71814593	acerca a 3.
1000 000	0,001	1,001	2 71826824	
10 000 000	0,0001	1,0001	2 71828047	
100 000 000	0,00001	1,00001	2 71828184	$e \approx 2{,}71828...$
1 000 000 000	0,000001	1,000001	**2 71828183**	$2 < e < 3$

Definición de función exponencial natural

La función exponencial natural está definida por $f(x) = e^x$, para todo número real x.

Utilizaremos ahora, dos gráficos bien conocidos para valorar el gráfico de $y = e^x$.

Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ estará entre las gráficos de $y = 3^x$ y de $y = 2^x$.

Representaremos esta situación utilizando valores comunes para las tres funciones.

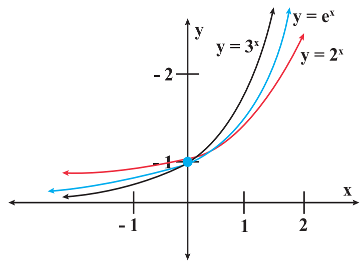
Los valores de e^x, los obtendremos con la calculadora.

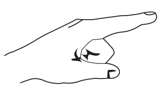
Si queremos encontrar el valor de e^0, presionamos la tecla $e^{\wedge}0$, la calculadora muestra en pantalla el número 1, si presionamos la tecla $e^{\wedge}1$, la calculadora muestra en pantalla el número $3{,}05599...$, si presionamos la tecla $e^{\wedge}2$, la calculadora muestra en pantalla el número

7,389056.... De esta manera encontramos los valores de la función e^x, para cada valor de x.

Hagamos la tabla siguiente:

x	− 1	0	1	2
$y = 2^x$	0,5	1	2	4
$y = e^x$	0,36	1	2,71	7,38
$y = 3^x$	0,33	1	3	9





Utiliza un cuaderno cuadriculado, para que ubiques los puntos de la tabla y confirmes los resultados gráficos.

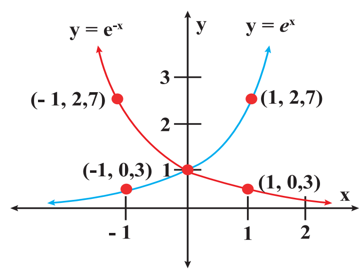
Ejemplo 20

En el mismo sistema de coordenadas, grafica las funciones $y = e^x$ y $y = e^{-x}$.

SOLUCIÓN

En la tabla se muestran algunos valores (x; y) que se hallan con la calculadora.

x	− 1	0	1	2
$y = e^x$	0,36	1	2,71	7,38
$y = e^{-x}$	2,71	1	0,36	0,13



En el gráfico se siguen manifestando las propiedades de la función exponencial.

La función e^x tiene base $e > 1$.

El dominio es $(-\infty; \infty)$, el recorrido es $(0; \infty)$.

El gráfico pasa por $(0; 1)$.

Asíntota horizontal; el eje x.

Es una función creciente.

La función e^{-x} tiene base $\frac{1}{e} = 0{,}36 < 1$.

El dominio es $(-\infty; \infty)$, el recorrido es $(0; \infty)$.

El gráfico pasa por $(0; 1)$.

Asíntota horizontal; el eje x.

Es una función decreciente.

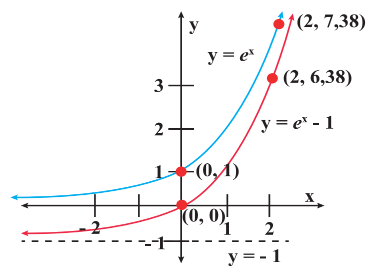
Ejemplo 21

Represente en el mismo sistema de coordenadas, los gráficos de a. $y = e^x - 1$, b. $y = e^x$. Establezca en cada caso el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN

Consideremos la siguiente tabla de valores para graficar.

x	-2	-1	0	1	2
$y = e^x$	0,13	0,36	1	2,71	7,38
$y = e^x - 1$	$-0,86$	$-0,63$	0	1,71	6,38



En el ejemplo anterior, hemos descrito las propiedades de las funciones $y = e^x$ y $y = e^x - 1$. Puede verse, que el gráfico de $y = e^x - 1$ es igual al $y = e^x$, movido una unidad hacia abajo.

Si el gráfico de $y = e^x - 1$, es el de $y = e^x$, movido una unidad hacia abajo, luego; a asíntota horizontal también se moverá una unidad hacia abajo, luego recta $y = -1$ es la asíntota horizontal de $y = e^x - 1$.

El recorrido, es: $\mathbf{R_f} = (1; \infty)$.

ACTIVIDADES 3.5

Analiza la teoría, luego responde.

I. Encuentre las asíntotas horizontales de la función.

1) $f(x) = e^x$

2) $f(x) = y = 1 + e^x$

3) $f(x) = e^{-x} + 3$

5) $f(x) = \frac{e^x}{2} - 1$

II. Calcule el recorrido de cada una de las funciones dadas en I.

III. En el mismo sistema de coordenadas grafica cada par de funciones y establezca sus semejanzas y diferencias.

1) $y = e^x$, $f(x) = e^{-x}$

2) $y = 1 + e^x$, $f(x) = e^x$

3) $y = e^{-x} + 3,\ y = e^{-x}$

4) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{2},\ y = e^{x}$

5) $y = -e^{x},\ f(x) = e^{x}$

6) $y = 2e^{-x},\ f(x) = e^{-x}$

7) $y = 2e^{x},\ f(x) = e^{x}$

8) $y = e^{x},\ f(x) = -e^{x}$

Aplicaciones de la función exponencial

Interés simple

En una inversión, el **interés simple**, es pagado sobre el capital invertido o principal (P), que permanece invariable. En consecuencia, el interés obtenido en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo. Los intereses obtenidos, no se reinvieten, por esta razón, el monto del interés es calculado siempre, sobre la misma base (P). Los beneficios o intereses se retiran al vencimiento de cada uno de los periodos.

El interés simple, se calcula con la fórmula $I = Prt$, donde

I, es el interés simple obtenido del capital invertido.
P, es el capital invertido o principal.
r, es la tasa de interés asignada en cada periodo.

Generalmente, el interés simple es utilizado en transacciones de corto plazo (períodos a lo más de 1 año).

Ejemplo 22

Si invertimos C$ 10 000, y al cabo de 30 días, nos devolvieron C$ 10 500, ¿cuál es el la tasa mensual de rendimiento y el rendimiento obtenido?

SOLUCIÓN

- El rendimiento obtenido, son los intereses obtenidos por la inversión.
- El porcentaje de rendimiento obtenido es la tasa pactada en la inversión.

El rendimiento obtenido es simplemente, la cantidad de dinero recibido al final de la inversión menos el principal P (capital invertido).

C\$ 10 500 − C\$ 10 000 = C\$ 500 es el rendimiento o intereses obtenidos.

La tasa (r), se despeja de la fórmula $I = Prt$, de donde se obtiene $r = \frac{I}{Pt}$, luego; $r = \frac{500}{10\,000 \times 1} = 0{,}05$ es la tasa de rendimiento de la inversión en 1 período.

Para escribir 0,05 como un porcentaje, solamente multiplicamos $0{,}05 \times 100$ y escribimos 5%.

0,05, es equivalente a 5 %, luego la tasa a la que se colocó el principal fue, $r = 5\%$.

Ejemplo 23

Al vender la cosecha de frijoles, Ángel decide ahorrar cierta cantidad de dinero al 25% de interés simple anual. Al cabo de 18 meses, recibe C$ 5 000, de interés. ¿Cuál fue el capital invertido?

SOLUCIÓN

Antes de aplicar la fórmula debemos tener en cuenta si la taza es anual y el tiempo está en años.

El tiempo de la inversión está en meses y la tasa es anual, luego, convertimos el tiempo en años escribiendo; $\frac{18}{12} = 1{,}5$ años.

La fórmula del interés simple es $I = Prt$. Según el problema, r es $25\% = 0{,}25$ anual, t es de 1,5 años, I es C$ 5 000, luego para encontrar el capital invertido o principal P, debemos despejarlo de la fórmula $I = Prt$.

$P = P = \frac{I}{r\,t}$ despejando P de la fórmula, $I = Prt$.

$P = \frac{5\,000}{0{,}25\,(1{,}5)} = 12\,333{,}33$ es el capital inicial.

Interés compuesto y crecimiento poblacional

Consideremos ahora un capital de C$100 invertido a una tasa compuesta del 5% anual.

Al final del primer año, el valor de la inversión es C$ 100, más C$ 100 (0,05) = C$ 5 de intereses, C$ 105 = 100 + 5.

Para el segundo año, el nuevo principal es de 105, al finalizar el segundo año tendremos C$ 105 + C$ 105(0,05) = C$ 110,250

En general, tenemos: $S = \underbrace{P}_{\text{Pricipal}} + \underbrace{rP(1)}_{\substack{\text{Interés}\\ \text{en un año}}}$ es el monto obtenido en un año.

$S = P(1+r)$ sacando P como factor común.

Para el segundo año, el nuevo principal es de 105, al finalizar el segundo año tendremos:

$S = \underbrace{P}_{\substack{\text{Nuevo}\\\text{Pricipal}}} + \underbrace{rP(1)}_{\substack{\text{Interés}\\\text{del } 2^{\circ} \text{ año}}}$ es el nuevo monto, obtenido en el segundo año.

$S = P(1+r)^2$ efectuando el producto indicado.

$\boxed{S = P\,(1+r)^k}$ nuevo monto después de k períodos anuales.

Ejemplo 24

Suponga que C$ 10 000 son invertidos en una cuenta que genera el 6% compuesto anualmente. ¿Cuál es el monto obtenido al final de 10 años?

$$P = \text{C\$ } 10\,000, \quad t = 10 \text{ años}, \quad r = \frac{600}{100}$$

$S = P(1+r)^{10}$ nuevo monto después de 10 períodos anuales.

$S = 10\,000(1+0{,}06)^{10}$ sustituyendo los datos del problema en la fórmula.

$S = \text{C\$}10\,000(1{,}06)^{10}$ $\boxed{S = \text{C\$ } 17\,908{,}47}$ es el monto al final de 10 años.

Ejemplo 24

Suponga que C$ 10 000 son invertidos a una tasa anual del 6% compuesto trimestralmente.

a) ¿Cuál es el monto obtenido al final de 10 años?,

b) ¿Cuál es el monto compuesto mensualmente?,

c) ¿semanalmente?

SOLUCIÓN

a) $P = \text{C\$ } 10\,000$, $t = 10$ años, en este caso, la tasa anual es el 6%, pero el período de la reinversión será trimestral, en 1 año hay 4 trimestres, luego la tasa periódica sera el $r = \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015 = 1{,}5\%$.

La capitalización será trimestral (cuatro veces al año), luego en 10 años, habrán $10 \times 4 = 40$ períodos de capitalización, por tanto:

$S = 10\,000\,(1+0{,}015)^{40}$ es la fórmula del monto para 40 períodos.
$S = 10\,000\,(1{,}015)^{40}$ nuevo monto después de 40 períodos.
$S = 10\,000\,(1{,}015)^{40}$ $\boxed{S = \text{C\$ } 17\,908{,}47}$ es el monto después de 40 períodos.

b) $P = \$\ 10\ 000$, $t = 10$ años, en este caso, la tasa anual es el 6%, pero el período de la reinversión será mensual, luego la tasa periódica será el $r = \left(\frac{0{,}06}{12}\right) = 0{,}05 = 0{,}5\%$.

La capitalización será mensual (doce veces al año), luego en 10 años, habrán $10 \times 12 = 120$ períodos de capitalización, por tanto:

$S = 10\ 000\ (1 + 0{,}005)^{120}$ es la fórmula del monto para 120 períodos.

$S = 10\ 000\ (1{,}005)^{120}$ nuevo monto después de 120 períodos.

$S = 10\ 000\ (1{,}015)^{120}$ $\boxed{S = C\$\ 18\ 193{,}96}$ es el monto después de 120 períodos.

c) La capitalización será semanalmente (52 veces al año), luego en 10 años, habrán $10 \cdot 52 = 520$ períodos de capitalización, por tanto:

$S = 10\ 000\left(1 + \frac{0{,}06}{52}\right)^{520}$ es la fórmula del monto para 520 períodos.

$\boxed{S = C\$\ 18\ 214{,}88}$ nuevo monto después de 520 períodos.

Una sustancia radiactiva decrece conforme a decrece conforme la ecuación $A = A_0 e^{-kt}$ donde:

- kt es la vida media de la sustancia(tiempo que tarda en perderse la mitad).
- A, es la cantidad que quedará después de t años.
- A_0, es la cantidad inicial de sustancia.

Ejemplo 25

¿Qué cantidad de sustancia radiactiva queda, después de $3{,}5$ años, si 3 kg de la misma se desintegran a una tasa del 20% por año.

SOLUCIÓN

Si al inicio habían 3 kg de sustancia, ¿cuánto habrá al final de $3{,}5$ años?

Para resolver el ejercicio, solamente tenemos que sustituir los $3{,}5$ años en la función

$y = 3e^{-0.2t}$, luego

$y = 3e^{-0.2(3.5)} = 3e^{-0.7} = 3(0{,}4966) = \boxed{1{,}48\text{ kg}}$

Es la cantidad que habrá al final de $3{,}5$ años.

La fórmula del interés compuesto se utiliza para calcular el crecimiento poblacional y es;

$$P = P_0\ (1 + r)^t, \text{ donde;}$$

- P, es la población que se desea calcular.
- P_0, es la población inicial.

- r, es la tasa de crecimiento.
- t, es el número de años que se están considerando.

Ejemplo 26

Un poblado de 600 habitantes tiene un crecimiento poblacional del 3%. ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?

SOLUCIÓN

En este caso, la población inicial es P_0 es de 600 personas.

El tiempo es $t = 8$.

La tasa de crecimiento anual es $i = 0{,}03$.

$P = 600(1+0{,}03)^8$ es la población que habrá después de 8 años.

$P \approx 760$ será la población después de 8 años.

ACTIVIDADES 3.6

Analiza los ejemplos resueltos, luego puedes resolver.

I. Suponga que C$ 25 000 son invertidos a una tasa compuesta anual del 5,5% . Encuentra:

a) El monto compuesto cuatrimestralmente al final de 8 años.

b) ¿Cuál es el monto compuesto anual obtenido al final de 10 años?

c) ¿Cuál es el monto compuesto mensualmente al final de 7 años?

II. Lea detenidamente, analice los ejemplos resueltos y luego resuelva.

1) Doña Carmen cultiva piña en la zona de Ticuantepe, desea ahorrar C$ 15 000 al 20 % de interés simple anual, ¿Que cantidad recibirá al final del año?

2) Suponga que C$ 25 000 se invierten al 6% compuesto anualmente. ¿Cuál es el monto obtenido al final de 10 años ?

3) Si C$ 20 000, se colocan al 3,75 compuesto 5,5% semestralmente, ¿Cuál es el monto obtenido al final de 9 años?

4) ¿Cuál es la cantidad de dinero que capitalizada cuatrimestralmente al 6%, arrojó, al final de 10 años, un monto de C$ 36 280?

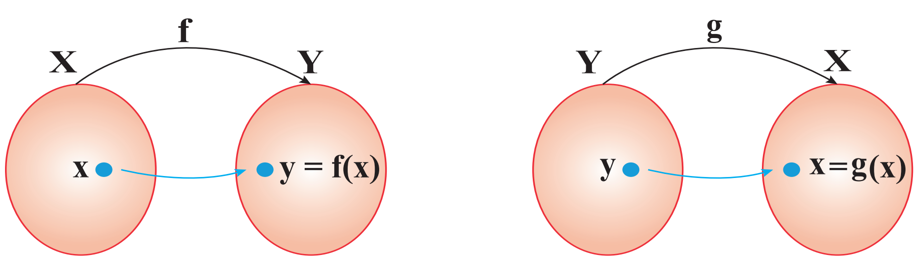
5) De acuerdo con el Datos del Instituto Nacional de Información y Desarrollo de Nicaragua, INDE, en el 2 005, la población nacional era de 3 millones, para una tasa de crecimiento anual de 1,7%. Estime con esa tasa de crecimiento, la cantidad de población, para el año 2020.

6) De acuerdo con datos del Instituto Nicaragüense de Desarrollo (INDE), la población nicaragüense en 2007, era de 3,5 millones. ¿Cuál sería la población aproximada (en millones) en el 2020 si la tasa en ese período fue del 2%?

7) De acuerdo con datos del Instituto Nicaragüense de Desarrollo (INDE), población la migración nicaragüense en 1 955, fue de 10 mil personas incluyendo hombres y mujeres. De acuerdo a proyecciones mismo organismo la tasa de migración es de 1%. Estime la cantidad, en miles, que habrá migrado en el 2 020?

Función inversa

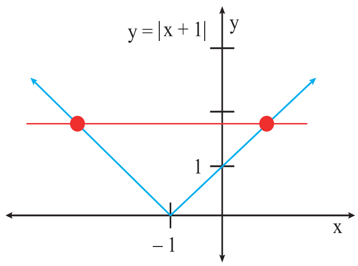
Si f es una función biunívoca, entonces, para cada y en el recorrido de f, hay exactamente un número x en el dominio X tal que $y = f(x)$, (figura a). Por la misma biunivocidad, podemos definir una función g de Y a X, tal que $x = g(y)$, (figura b).



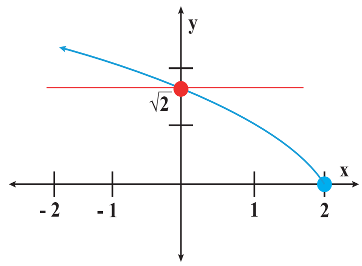
a. $y = f(x)$ b. $x = g(y)$

La biunivocidad de una función, se puede deducir también a partir de su gráfico, aplicando la técnica de la recta horizontal.

Si al trazar una recta horizontal a través de su gráfico, esta lo corta en un único punto, la función es biunívoca, de lo contrario no lo es.

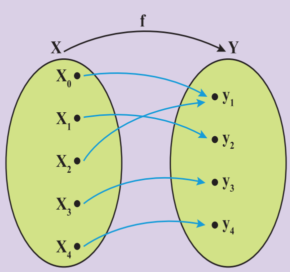


Función no biunívoca

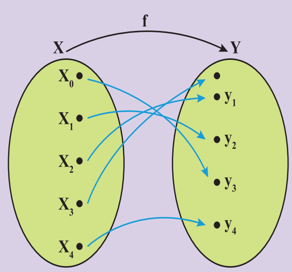


Función biunívoca

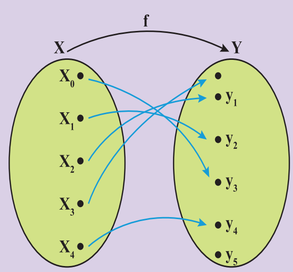
Otros ejemplos son los siguientes:



El diagrama representa una función que no es biunívoca, porque al elemento y_1 de Y, le corresponden dos elementos; x_0 y x_1 en X.



El diagrama representa una función biunívoca porque a cada elemento de X, le corresponde un único elemento en Y, y a cada elemento de Y, le corresponde un único elemento en X.



No es biunívoca porque a cada elemento de X, le corresponde un único elemento en Y, pero a cada elemento de Y, no le corresponde un único elemento en X.

Función inversa

Sea f una función biunívoca, con dominio X y recorrido Y,

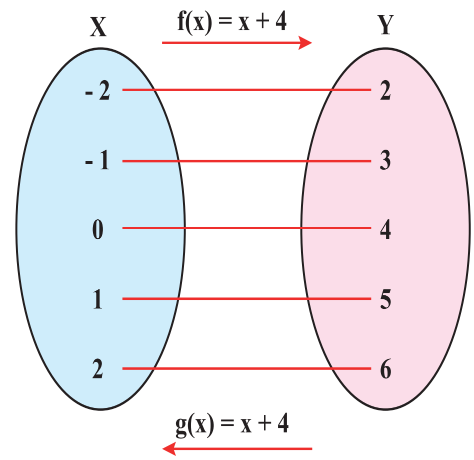
Si existe una función g con dominio Y y recorrido X tal que:

- $f(g(x)) = x$ para toda x del dominio de f.
- $g(f(x)) = x$ para toda x del dominio de g,

entonces las funciones f y g son inversas una de la otra.

Ejemplo 27

El diagrama, explica las razones que justifican la existencia de una función inversa g, determina en cada caso el dominio y el recorrido de cada una.



SOLUCIÓN

En el diagrama se muestra una función biunívoca, donde f y g son inversas una de la otra.

En la función $f(x) = x + 4$ vemos que;

$f(-2) = -2 + 4 = 2$ (al $-2 \in X$, le corresponde $2 \in Y$).

$f(-1) = -1 + 4 = 3$ (al $-1 \in X$, le corresponde $3 \in Y$).

$f(2) = 2 + 4 = 6$ (al $2 \in X$, le corresponde $6 \in Y$).

- El dominio de f es $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, el recorrido de f es, $R_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

En la función $g(x) = x - 4$ vemos que;

$g(2) = 2 - 4 = -2$ (al $2 \in Y$, le corresponde $-2 \in X$).

$g(3) = 3 - 4 = -1$ (al $3 \in Y$, le corresponde $-1 \in X$).

$g(6) = 6 - 4 = 2$ (al $6 \in Y$, le corresponde $2 \in X$).

- El dominio de g es $D_g = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, el recorrido de g es, $R_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

La función inversa de f, se representa por f^{-1}, donde -1, no es exponente, es una notación de función inversa.

Ejemplo 28

Comprueba en cada caso, que las funciones son inversas una de la otra.

a) $f(x) = x + 4$ y $f^{-1}(x) = x - 4$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4}$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 3}{2}$

SOLUCIÓN

a. Para comprobar que las dos funciones son inversas una de la otra, debemos demostrar que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x) = x$.

$f(f^{-1}(x)) = f(x - 4)$ sustituyendo $f^{-1}(x)$, por $x - 4$.

$= [(x - 4) + 4]$ sustituyendo la x de f por, $x - 4$.

$= [x - 4 + 4] = x$ luego, $f(f^{-1}(x)) = x$.

Ahora, debemos probar que $f^{-1}(f(x) = x$.

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 4)$ definición de función inversa.

$= [(x + 4) - 4]$ sustituyendo $x + 4$ en la x de f^{-1}.

$= [x + 4 - 4] = x$ luego, $f^{-1}(f(x)) = x$.

Por tanto, $f(x) = x + 4$ y $f^{-1}(x) = x - 4$, son inversas una de la otra.

b. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4}$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 3}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{4x + 3}{2}\right)$ sustituyendo $f^{-1}(x)$, por $\left(\dfrac{4x + 3}{2}\right)$.

$= \dfrac{2\left(\dfrac{4x + 3}{2}\right) - 3}{4}$ sustituyendo la x de f por, $\left(\dfrac{4x + 3}{2}\right)$.

$= \dfrac{\cancel{2}\left(\dfrac{4x + 3}{\cancel{2}}\right) - 3}{4}$ simplificando por 2.

$= \dfrac{4x + 3 - 3}{4}$ reduciendo.

$= \dfrac{4x}{4} = x$ luego, $f(f^{-1}(x)) = x$.

Ahora, debemos probar que $f^{-1}(f(x) = x$.

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\dfrac{2x - 3}{4}\right)$ definición de función inversa.

$= \dfrac{\cancel{4}\left(\dfrac{2x - 3}{\cancel{4}}\right) + 3}{2}$ sustituyendo la x de f^{-1}por, $\left(\dfrac{2x - 3}{4}\right)$.

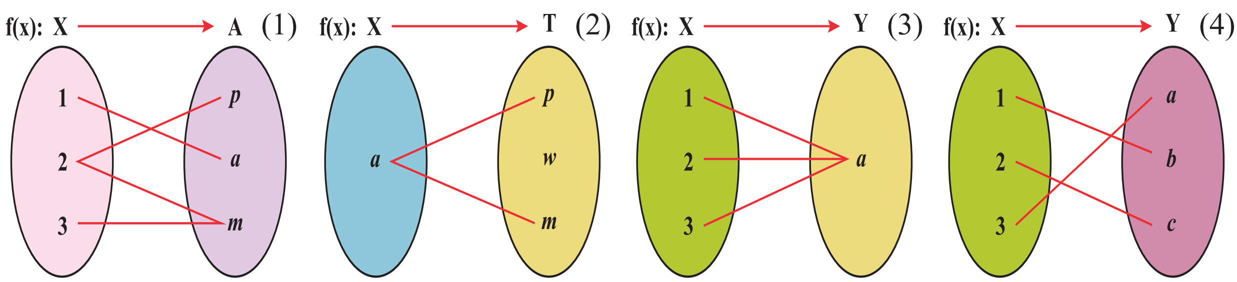
$= \dfrac{2x - 3 + 3}{2} = x$ simplificando por 4.

$= \dfrac{2x}{2} = x$ luego, $f^{-1}(f(x)) = x$.

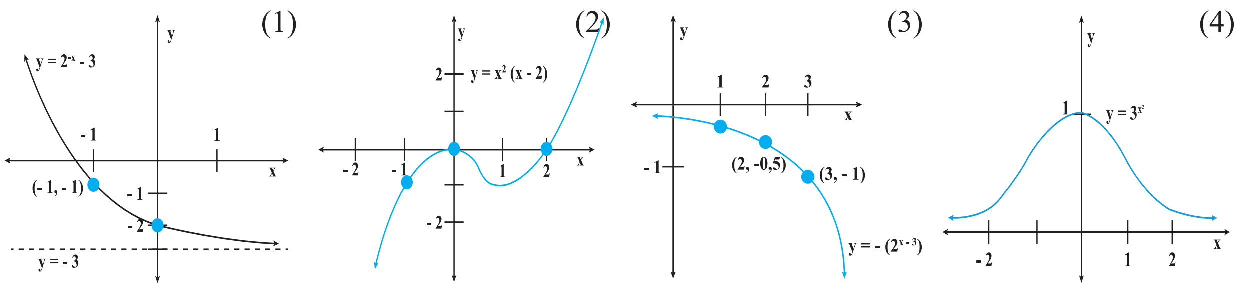
ACTIVIDADES 3.7

Analiza los ejemplos antes de resolver.

I. De acuerdo a cada uno de los dibujos, determina si corresponden a una función biunívoca. Justifica. Determina además, a partir de cada gráfico, el dominio y el recorrido de f y f^{-1}



II. Determina, a partir de cada gráfico, el dominio y el recorrido de f .



III. Utilizando la propiedad de las funciones inversas; $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$. Determina cuáles pares de funciones son inversas una de la otra.

1) $f(x) = x + 2,\ \ f^{-1}(x) = x - 2$

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{2},\ f^{-1}(x) = 2x + 1$

3) $f(x) = \dfrac{2x-2}{4},\ f^{-1}(x) = 4x + 2$

4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{10},\ f^{-1}(x) = \dfrac{2x+2}{3}$

5) $f(x) = \dfrac{x-1}{5},\ f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

6) $f(x) = 2x + 4,\ \ f^{-1}(x) = 2x - 4$

Indicador de logro: Plantea y resuelve problemas prácticos relacionados con las funciones logarítmicas y sus propiedades.

Función logarítmica

En matemática, el logaritmo de un número real, es el exponente al cual hay que elevar la base positiva, para obtener dicho número. Por ejemplo, el logaritmo de $1\,000$ en base 10 es 3, porque $1\,000$ es igual a 10^3.

Definición

La función logarítmica con base a ($a > 0$), $a \neq 1$, es la inversa de la función exponencial de base a.

$$\mathbf{y} = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y.$$

Las dos ecuaciones de la definición; $y = \log_a x$, y $x = a^y$, son equivalentes, la razón es que la función exponencial y la logarítmica, son inversas una de la otra.

La ecuación $y = \log_a x$, se llama forma logarítmica y $x = a^y$ se llama forma exponencial de la función logarítmica.

Hay que dominar la conversión de una forma a otra, ya que para graficar la función logarítmica, necesitamos escribirla en su forma exponencial. Vea esto en el cuadro que sigue.

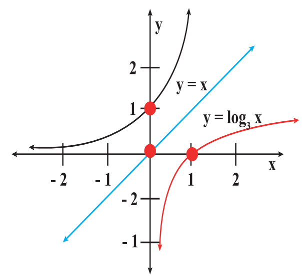
Forma logarítmica		Forma exponencial
a. $\log_5 u = 2$	$\rightarrow$	$5^2 = u$
b. $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$	$\rightarrow$	$(\sqrt{5})^2 = 5$
c. $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$8 = \sqrt{64}$
d. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\rightarrow$	$2^{-4} = \frac{1}{16}$
e. $r = \log_p q$	$\rightarrow$	$p^r = q$
f. $w = \log_4 (2t + 3)$	$\rightarrow$	$4^w = 2t + 3$
g. $\log_3 x = 5 + 2z$	$\rightarrow$	$3^{5+2z} = x$
h. $\log x = 3$	$\rightarrow$	$10^3 = x$
i. $\ln z = x + y$	$\rightarrow$	$e^{x+y} = z$

Esta es una lista de formas logarítmicas de uso necesario para resolver ejercicios.

Logarítmos de base a	Logaritmos de base 10, o logaritmos comunes	Logaritmos naturales
1. $\log_a 1 = 0$	5. $\log 1 = 0$	9. $\ln 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	6. $\log 10 = 10$	10. $\ln e = 1$
3. $\log_a a^x = x$	7. $\log 10^x = x$	11. $\ln e^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$	8. $10^{\log x} = x$	12. $e^{\ln x} = x$

Para facilitar la asignación de valores a $y = \log_3 x$, la escribimos en su forma equivalente: como $x = 3^y$ y asignamos valores a y.

y	− 2	− 1	0	1	2
$x = 3^y$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



El gráfico muestra la simetría de las funciones exponencial y logarítmica, respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 29

Grafica en el mismo sistema de coordenadas las funciones: $y = \log_2 x$, y $y = \log_{1/2} x$. Establezca además las semejanzas y diferencias entre ambas.

SOLUCIÓN

Para resolver, decidimos primero escribir las funciones, en su forma exponencial equivalente;

$$y = \log_2 x, \text{ es equivalente a } x = 2^y$$

$$y = \log_{1/2} x, \text{ es equivalente a } x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

Asignemos valores a y. Arbitrariamente hemos elegido para y, los valores: $-2, -1, 0, 1$ y 2.

y	− 2	− 1	0	1	2
$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$	4	2	1	0,5	0,25
$x = 2^y$	0,25	0,5	1	2	4

Los puntos de la tabla correspondientes a $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ son:

$$(4; -2), (2; -1), (1; 0), (0{,}5;\ 1), \text{ y } (0{,}25;\ 2)$$

Los puntos de la tabla correspondientes a $x = 2^y$ son:

$$(0{,}25; -2), (0{,}5;\ -1), (1; 0), (2; 1), \text{ y } (4; 2)$$

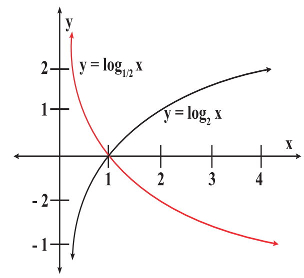
Del gráfico se deducen las siguientes propiedades:

Semejanzas

- El dominio es $(0; \infty)$.
- El recorrido es $(-\infty; \infty)$
- Intersecta al eje x, en $(1; 0)$
- No intersecta al eje y.
- El eje y, es asíntota vertical.

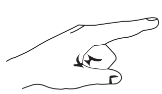
Diferencias

- $y = \log_2 x$, es creciente.
- $y = \log_{1/2} x$, es decreciente.



Los logaritmos de base e se llaman **logaritmos naturales o Neperianos**. Estos logaritmos fueron introducidos por John Napier a principios del siglo XVII, como un medio de simplificar los cálculos.

Al representarlos, se sobre entiende la base, y se escriben como: $\ln x$



De la equivalencia de las expresiones $y = \ln x$ y $x = e^y$, se deduce:

$$\ln e = 1 \text{ y } \ln 1 = 0,$$

ya que para que $x = 1$, en $x = e^y$, y, tendría que ser cero.

Ejemplo 30

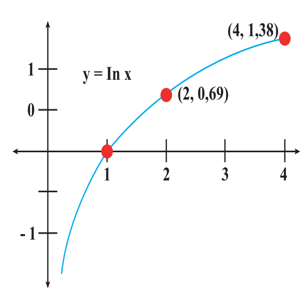
Grafica la función $y = \ln x$.

SOLUCIÓN

Los valores de la función $y = \ln x$, se calculan directamente en la calculadora, con la tecla **ln x**.

Solamente podemos asignar a x, valores positivos, ya que el dominio de la función es $(0; \infty)$.

x	1	2	3	4
ln x	0	0,69	1,09	1,38



ACTIVIDADES 3.8

Analiza los ejemplos del material, luego resuelve.

I. Justifica el cumplimiento o no de la definición de función logarítmica.

1) $y = \log_5 3$
2) $y = \ln_5 9$
3) $y = \log_5 (-10)$
4) $y = \log_6 6$
5) $y = \log_{20} 10$
6) $y = \ln 7$
7) $y = \log 300$
8) $y = \ln e$
9) $y = \log_{-1} 11$
10) $y = \log_{(-5)} 15$
11) $y = \ln 25$
12) $y = \log_{\frac{1}{3}} 6$

II. Cambie cada expresión logarítmica por su equivalente expresión exponencial.

1) $\log_{10} 100 = 2$
2) $\log_2 8 = 3$
3) $\log_7 49 = 2$
4) $\log_b 256 = 4$
5) $\log_e b = 6$
6) $\log_3 9 = t$

III. Elabore cada uno de los gráficos de las funciones dadas, determine su dominio y recorrido.

1) $f(x) = \ln (2x)$
2) $f(x) = \log_{1/3} x$
3) $f(x) = 2\ln x$
4) $f(x) = \ln (-x)$
5) $f(x) = \log_5 x$
6) $f(x) = \log_6 x$
7) $f(x) = \ln x + 1$
8) $f(x) = y = \log 2x$

Ecuaciones exponenciales

Se denomina ecuación exponencial aquella en la cual la incógnita aparece únicamente en los exponentes. Para resolver estas ecuaciones se recurre a las propiedades de la potenciación, radicación, de logaritmos y cambio de la incógnita por otra.

Definición

Una ecuación exponencial es aquella en la cual la incógnita aparece únicamente en los exponentes de potencias para ciertas bases constantes.

➢ Como ejemplos tenemos;

a) $2^{3x} = 7$
b) $2^{x} = 128$
c) $2^{x^2+6} = 32$

Al resolver ecuaciones exponenciales, tendremos en cuenta la propiedad de igualación de bases: Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

Ejemplo 31

Encuentre el valor de x en la ecuación $2^x = 128$.

SOLUCIÓN

$2^x = 128$ ecuación dada.

$2^x = 2^7$ escribiendo 128 como potencia de base 2.

$x = 7$ propiedad exponencial.

Ejemplo 32

Encuentre el valor de x en la ecuación $2^{x^2+6} = 32$.

SOLUCIÓN

$2^{x^2+6} = 32^x$ ecuación dada.

$2^{x^2+6} = (2^5)^x$ reemplazando 32 por 2^5.

$2^{x^2+6} = 2^{5x}$ aplicando leyes de exponentes.

$x^2 + 6 = 5x$ Igualando las bases.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ordenando la ecuación resultante.

$(x - 3)(x - 2) = 0$ factorizando la ecuación.

$x_1 = 2, \quad x_2 = 3$ son las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 33

Encuentre el valor de x en la ecuación $7^x + 7^{x-1} = 8^x$.

SOLUCIÓN

$7^x + 7^{x-1} = 8^x$ ecuación dada.

$7^x + 7^x(7)^{-1} = 8^x$ aplicando leyes de exponentes.

$7^x(1 + 7^{-1}) = 8^x$ sacando factor común.

$7^x\left(1 + \frac{1}{7}\right) = 8^x$ propiedad de exponentes negativos.

$7^x\left(\frac{7+1}{7}\right) = 8^x$ sumando fracciones.

$7^x\left(\frac{8}{7}\right) = 8^x$ sumando fracciones.

$\left(\frac{8}{7}\right)^1 = \left(\frac{8^x}{7^x}\right) = \left(\frac{8}{7}\right)^x$ dividiendo toda la ecuación por 7^x.

$x = 1$ propiedad exponencial (igualando bases).

ACTIVIDADES 3.8

Analiza los ejemplos del material, luego resuelve.

I. Encuentra en cada caso, el valor de la variable x.

1) $(16)^{3x} = 2$

2) $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$

3) $e^{3x+1} = 15$

4) $e^{2x} = 5$

5) $9^{5x-1} = 81^{x+2}$

6) $(10)^{\frac{4}{x}} = 6$

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = 243$

8) $4^{2x-2} = 2^{x^2}$

9) $2^x = 64$

10) $8^{3x-5} = \frac{1}{16}$

11) $3^x = 81^{-x-1}$

12) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} = 128$

13) $9^{10x-2} = 81^{2x+4}$

14) $2^x = \frac{1}{64}$

15) $(10)^{\frac{4}{x}} = \frac{1}{10}$

16) $9^{10x-2} = 27^{2x+4}$

Indicador de logro: Aplica el concepto y las propiedades de logaritmo en la solución de ejercicios.

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Antes de resolver ecuaciones logarítmicas, rememora las propiedades estudiadas en 3,8.

Definición

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual la variable a despejar es el argumento de un logaritmo.

Como ejemplo tenemos; $\log x^4 = 81$, es una ecuación en la que el argumento del logaritmo es x^4.

Para resolver las ecuaciones logarítmicas, debemos tener en cuenta las siguientes leyes:

Leyes de los logaritmos

Para cualquier par de números reales *M* y *N* se cumple:

i. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$

ii. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N.$

iii. $\log_a M^C = c\,(\log_a M).$

$$\log_a (M+N) \neq \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a (M-N) \neq \log_a M - \log_a N$$

Ejemplo 34

Aplique las leyes de los logaritmos a cada ecuación.

a. $\log_a \left(x\sqrt{x^2+1}\right)$

b. $\log_a \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$

c. $\dfrac{\log_a \left(x^3\sqrt{x^2+1}\right)}{(x-1)^4}$

SOLUCIÓN

a. $\log_a\left(x\sqrt{x^2+1}\right) = \log_a x + \log_a\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ Propiedad i.

$= \log_a x + \log_a (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ escribiendo la raíz como exponente.

$= \log_a x + \frac{1}{2}\log_a(x^2+1)$ Propiedad iii.

b $\log_a \dfrac{x^2}{(x-1)^3} = \log_a x^2 - \log_a (x-1)^3$ Propiedad ii.

$= 2\log_a x - 3\log_a (x-1)$ Propiedad iii.

c. $\log_a \dfrac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^4} = \log_a x^3\sqrt{x^2+1} - \log_a (x+1)^3$ Propiedad ii.

$= \log_a x^3 + \log_a \sqrt{x^2+1} - \log_a (x+1)^3$ Propiedad i

$= 3\log_a x + \frac{1}{2}\log_a (x^2+1) - 3\log_a (x+1)$ Propiedad iii.

Ejemplo 35

Aplique las propiedades de los logaritmos para resolver la ecuación: $\log x + \log(x+3) = 1$.

SOLUCIÓN

$\log x + \log(x+3) = 1$ ecuación dada.

$\log[x(x+3)] = 1$ propiedad i.

$\cancel{10}^{\cancel{\log}[x(x+3)]} = 10^1$ aplicando función inversa.

$[x(x+3)] = 10$ definición de logaritmo.

$x^2 + 3x - 10 = 0$ realizando operaciones indicadas.

Ahora debemos resolver la ecuación cuadrática resultante.

$(x+5)(x-2) = 0$ factorizando.

$x_1 = -5$ y $x_2 = 2$ soluciones de la ecuación.

La solución $x_1 = -5$ se descarta ya que al sustituirla en la ecuación original tendríamos una ecuación sin sentido como:

$\log(-5) + \log(-5+3) = \log(-2)$, que no existe, por tanto la solución es, $\boxed{x = 2}$.

Estamos ya preparados, para aplicar las propiedades de las funciones inversas y particularmente, de las funciones logarítmicas y exponenciales, estas las vimos en la sección **3.8**, no obstante te recordaremos las siguientes propiedades:

$4.\ a^{\log_a x} = x \qquad 8.\ 10^{\log x} = x \qquad 12.\ e^{\ln x} = x$

La propiedad 4, establece que la base a, elevada a $\log_a x$ es x, esto se debe a que la función exponencial de base a y la logarítmica de base a, son funciones inversas una de la otra.

Lo mismo ocurre con la propiedad 8, en este caso, la función exponencial base 10 y la logarítmica de base 10, son funciones inversas una de la otra, ocurre lo mismo, con la propiedad 12.

Ejemplo 36

Aplique las propiedades de los logaritmos para resolver la ecuación: $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.

SOLUCIÓN

$\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$ ecuación dada.

$\log_2 [x(x + 2)] = 3$ propiedad i.

$\cancel{2}^{\cancel{\log 2}\,[x(x + 2)]} = 2^3$ aplicando exponencial base 2. x.

$[x(x + 2)] = 8$ aplicando propiedades.

$x^2 + 2x - 8 = 0$ resolviendo el producto y ordenando.

$(x + 4)(x - 2) = 0$ factorizando la ecuación cuadrática resultante.

$x_1 = -4$ y $x_2 = 2$ son las soluciones.

Como en el ejercicio anterior, la solución $x_1 = -4$ se descarta, no tiene sentido.

luego, $\boxed{x = 2}$ es la solución.

Ejemplo 37

Aplique las propiedades de los logaritmos para resolver; $\ln (x + 6) - \ln (x - 1) = \ln 10 - \ln 2$.

SOLUCIÓN

$\ln (x + 6) - \ln (x - 1) = \ln 10 - \ln 2$ ecuación dada.

$\ln \frac{x + 6}{x - 1} = \ln \frac{10}{2}$ Propiedad ii.

$\ln \frac{x + 6}{x - 1} = \ln 5$ simplificando.

$\cancel{e}^{\cancel{\ln} \frac{x + 6}{x - 1}}$ aplicando $e^{\ln x} = x$.

$\frac{x + 6}{x - 1} = 5$ propiedad exponencial.

$x + 6 = 5x - 5$ multiplicando por $(x - 1)$.

$11 = 4x$ reduciendo.

$x = \frac{11}{4}$ dividiendo entre 4.

Probaremos esta respuesta, $\frac{11}{4}$ 275, para ello, sustituimos este valor en la ecuación dada.

$\ln(2{,}75+6) - \ln(2{,}75-1) = \ln\frac{10}{2}$ sustituyendo en la ecuación original.

$\ln(6{,}75) - \ln(1{,}75) = \ln 5{,}2$ la expresión tiene sentido, la respuesta es correcta.

luego, $\boxed{x = 2{,}75}$ es la solución.

Reducción del logaritmo a una base común

Consideremos $w = \log_b u$ (de base $\boldsymbol{b}$), lo deseamos escribir en base, $\boldsymbol{a}$, entonces escribimos w, de la siguiente manera; $w = \dfrac{\log_a u}{\log_a b}$.

A manera de ejemplo; supongamos que tenemos la expresión; $\log_2 5$, y queremos escribir el logaritmo con una base 7. Con una flechita, te señalamos dónde pasar el 5, y donde se pasar el 2, de este modo, hemos transformado un logaritmo de base 2, a un logaritmo de base 7.

$$\log_2 5 = \frac{\log_7 5}{\log_7 2}$$

Ejemplo 48

Cambie $\log_3 21$ a la base 10.

SOLUCIÓN

$x = \log_3 21$ escribiendo la ecuación en forma logarítmica.

$x = \dfrac{\log 21}{\log 3}$ cambiando de base 3 a base 10.

Para encontrar el valor de x, utilizamos la calculadora. ya que $\log$ de 21, se encuentra fácilmente utilizando la tecla **log**, automáticamente aparece el número $1{,}3222...$

Similarmente, $\log 3 = 0{,}477$, por tanto, $x = \dfrac{1{,}322}{0{,}477} = 2{,}77$.

Ejemplo 39

Resuelva la ecuación $\log_4 x = 2 + \log x$.

SOLUCIÓN

$\log_4 x = 2 + \log x$ ecuación dada.

Antes de continuar se hace necesario, unificar las bases de los logaritmos, en este caso, pasaremos el logaritmo de base 4 a un logaritmo de base 10.

$\log_4 x = \frac{\log x}{\log 4} = \frac{\log x}{0,60}$ cambiando de base 4 a base 10.

$\frac{\log x}{0,60} = 2 + \log x$ sustituyendo en la ecuación original.

$\log x = 2(0,6) + (0,6)\log x$ multiplicando por $0,6$.

$(\log x - 0,6 \log x) = 1,2$ asociando los logaritmos.

$0,4 \log x = 1,2$ realizando operaciones indicadas.

$\log x = \frac{1,2}{0,4} = 3$ despejando.

$\log x = 3$ despejando $\log 3$.

$\cancel{10}^{\cancel{\log}_{10} x} = 10^3$ aplicando función inversa de base 10.

$x = 1\,000$ es el valor de x.

Ejemplo 40

Resuelva la ecuación $\log_3 x = -3 + \ln x$.

SOLUCIÓN

$\log_3 x = -3 + \ln x$ ecuación dada.

En este caso, pasaremos el logaritmo de base 3 a un $\ln$ cuya base es e.

$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln x}{1,09}$ cambiando de base 3 a base e.

$\frac{\ln x}{1,09} = -3 + \ln x$ sustituyendo $\ln 3$.

$\ln x = -3(1,09) + (1,09)\ln x$ multiplicando por $1,09$.

$\ln x = -3,27 + 1,09 \ln x$ multiplicando.

$\ln x - 1,09 \ln x = -3,27$ asociando los logaritmos.

$-0,9 \ln x = -3,27$ realizando operaciones indicadas.

$\ln x = \frac{-3,27}{-0,09}$ despejando.

$\ln x = 36,33$ despejando $\ln$.

$e^{\ln x} = e^{36,33}$ $x = e^{36,33}$. Es el valor de x.

La cantidad $e^{36,33}$, se deja sin desarrollar, porque es muy grande.

ACTIVIDADES

Analiza las propiedades logarítmicas del material, antes de resolver.

I. Utilice las propiedades logarítmicas, para escribir como un sólo logaritmo.

1) $3\log_5 u + 4\log_5 v$
2) $2\log_4 u - 4\log_4 v$
3) $3\log_5 u - 4\log_5 v$
4) $\log_3 u - 3\log w$
5) $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2-1)$
6) $\log_3\sqrt{5-x} - \log_3(x+2)^2$
7) $8\log_2\sqrt{3x-2} - \log_2\frac{4}{x}$
8) $\log\sqrt{3x-2} - \log\frac{4}{x^2} + \log 8$
9) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2-x} - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)^3$

II. Encuentre el valor de x, en la ecuación.

1) $\log(2x+1) = \log(x+6)$
2) $\log x - \log(x-1) = \log 4$
3) $\ln(-x) = \ln x^2 - 6$
4) $2\ln(-x) = \ln(x^2-6)$
5) $\log_3 5x = \log_3 160$
6) $\log_2 x = \log_2 5 + \log_2 9$
7) $\log_{10}\frac{1}{x^2} = 2$
8) $\log_2(\log_3 x) = 2$

III. Cambia los logaritmos a la base 10.

1) $\log_3 21$
2) $\log_7 89$
3) $\log_8 56$
4) $\log_\pi e$
5) $\log_{25} 300$
6) $\log_\pi \sqrt{2}$
7) $\log_{\frac{1}{2}} 70$
8) $\log_{\frac{1}{3}} 90$
9) $\log_\pi\sqrt{5}$

Aplicaciones exponenciales y logarítmicas

Ejemplo 41

Se invierten C$ 10 000 en una cuenta, 4,5 % compuesto anualmente. ¿En cuanto tiempo se generará un monto de C$17 908,47?

$S = P(1+r)^{kt}$, donde k, es el número de capitalizaciones anuales.

Si el interés es anual, entonces se capitaliza una vez al año.

$17\,908{,}47 = 10\,000(1+0{,}045)^t$ nuevo monto después de t años.

$17\,908{,}47 = 10\,000(1{,}045)^t$ sustituyendo los datos del problema en la fórmula.

$\frac{17\,908{,}47}{10\,000} = (1{,}045)^t$ dividiendo entre 10 000.

$1{,}79 = (1{,}045)^t$ resolviendo.

Ahora debemos resolver la ecuación exponencial resultante, aplicando logaritmo.

$\log(1{,}79) = \log(1{,}045)^t$ aplicando log.

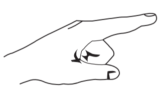
$0{,}252 = \log(1{,}045)^t$ utilizando log.

$0{,}252 = t(\log 1{,}045)$ aplicando el logaritmo de un exponente.

$0{,}252 = t(0{,}0191)$ utilizando log.

$\frac{0{,}252}{0{,}0191} = t$ despejando t.

$t = 13$ años es el tiempo requerido.



Se obtiene el mismo resultado aplicando log o aplicando ln.
Resuelve en tu cuaderno aplicando ln.

Ejemplo 42

El crecimiento de una población viene dado por $P = P_0(1+i)^3$ donde i es la tasa de crecimiento poblacional anual y t el número de años. Si en Nicaragua, según el Banco Mundial, éramos 6,08 millones en el 2013 con un crecimiento del 1,5% anual, ¿En que año, seremos 10 millones?

SOLUCIÓN

De acuerdo con el problema;

- $P_0 = 6\,080\,000$.
- $P = 20\,000\,000$
- t no se conoce.

$20\,000\,000 = 6\,080\,000(1 + 0{,}015)^t$ sustituyendo datos en $P = P_0(1 + i)^t$.

$\frac{20\,000\,000}{6\,080\,000} = (1\,015)^t$ dividiendo entre 6 080 000.

$3{,}28 = (1{,}015)^t$ resolviendo.

$\ln(3{,}28) = \ln(1{,}015)^t$ aplicando ln utilizando $\boxed{\ln}$.

$1{,}18 = t(\ln 1{,}015)$ por el logaritmo de un cociente.

$1{,}18 = t(0{,}0148)$ utilizando $\boxed{\ln}$.

$\frac{1{,}18}{0{,}0148}$ despejando t.

$\boxed{t = 99 \text{ años}}$ es el tiempo requerido.

Ahora sumamos 99 años al 2013 que es el año inicial que nos da el problema.

$2\,013 + 99 = 2\,112$ es el año en que seremos 20 000 000.

Ejemplo 43

¿Hace cuántos años fue momificado un cuerpo, si en 1,451 gramos de material, se encuentra una cantidad inicial de concentración de 3 g de C-14?

SOLUCIÓN

$M_t = M_0\, 0{,}886^{\,t}$, donde:

- M_t, es la masa final en gramos.
- M_i, es la masa inicial en gramos.
- 0,886, es la constante de proporcionalidad o decaimiento.
- t, es el tiempo transcurrido en <u>miles</u> de años.

Por consiguiente, sustituyendo en $M_t = M_0\, 0{,}886^{\,t}$, tenemos:

$1{,}45g = 3g\,(0{,}886)^t$ sustituyendo valores.

$\dfrac{1{,}4\cancel{5}\ g}{3\cancel{g}} = (0{,}886)^t$ dividiendo y simplificando g.

$0{,}48 = (0{,}886)^t$ efectuando operaciones.

$\ln 0{,}48 = \ln(0{,}886)^t$ aplicando $\ln$.

$\ln 0{,}48 = t[\ln(0{,}886)]$ propiedades de $\ln$.

$-0{,}733 = t(-0{,}121)$ calculando logaritmos.

$t = \dfrac{-0{,}733}{-0{,}121} = 6{,}05 \text{ miles}$ ya que el tiempo está en miles de años.

$6{,}05 \text{ miles} = 6{,}05(1\,000) = \boxed{t = 6\,050 \text{ años}}$.

ACTIVIDADES

Antes de resolver, analiza las propiedades correspondientes.

1) Las estrellas más brillantes, de flujo luminoso L, tienen una magnitud m de acuerdo con la fórmula:

$$m = 6 - (2{,}5)\log \frac{L}{L_0}.$$

i Calcule m, si $L = 10^{0,4}\, L_0$.

ii Despeje L de la fórmula en términos de m y L_0.

2) La altura h en metros y el peso promedio W en kilogramos para niños de 5 a 13 años es;

$$\ln W = \ln 2{,}4 + 1{,}8h$$

i. Exprese W, sin logaritmos en función de h.

ii. Estime el peso promedio de un niño de 8 años con una estatura de $1{,}5$ metros.

3) En el Banco Produzcamos de Nicaragua, se invierten C$1 000 al 12%, compuesto trimestralmente. ¿En cuanto tiempo se ha aculado el doble de esa cantidad?

4) La fórmula $D = 5e^{-0,4h}$ sirve para determinar el número de miligramos D de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente, h horas después de su administración. Cuando el número de miligramos llegue a 2 se debe suministrar de nuevo el medicamento. ¿Cuánto tiempo trascurre entre la aplicación de cada dosis, de inyecciones?

5) Nicaragua es un país sísmico. La magnitud M de un temblor y su energía E, están relacionadas por $5,8 = \log\left(\dfrac{E}{2,5 \text{ x } 10^{11}}\right)$.

¿Cual es la energía E del sismo.

Para $M = 5,8$ grados en la escala de Ritcher.

6) Para una compañía, el costo y de producir x unidades de un producto está dado por: $y = (2x \ln x) + 20$.

Encuentre el costo cuando $x = 6$.

7) La regla de Young y la regla de Couling, presentan fórmulas para determinar las dosis de medicinas para niños a partir de la dosis de adulto, estas son:

$$c = \left(\frac{A}{A+12}\right)d \qquad c = \left(\frac{A+1}{24}\right)d$$

Regla de Young   Regla de Cowling

donde A es la edad del niño, d es la dosis de adulto, c es la dosis de niño.

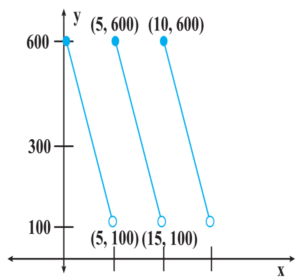
¿A qué edad las dosis son las mismas usando estas reglas?

AUTOEVALUACIÓN

Analiza y resuelve.

I. Completa la expresión, escribiendo el dominio y el recorrido de cada función.

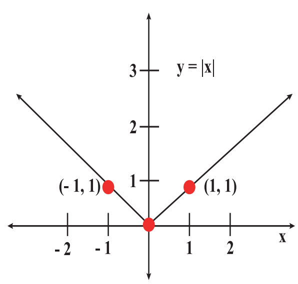
1)



$D_f =$ ______________________

$R_f =$ ______________________

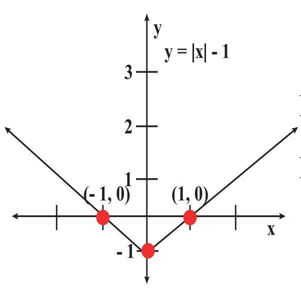
2)



$D_f =$ ______________________

$R_f =$ ______________________

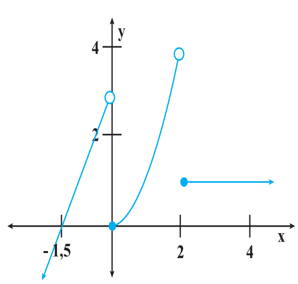
3)



$D_f =$ ______________________

$R_f =$ ______________________

4)



$D_f =$ ______________________

$R_f =$ ______________________

II. En tu cuaderno ilustre con un ejemplo cada una de las propiedades dadas.

1) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

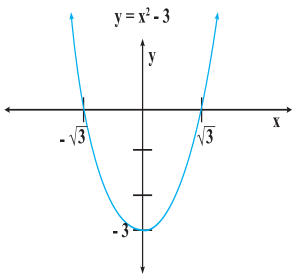
2) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$, $m \neq 0$

3) $\log \dfrac{5x}{y}$

4) $\log \dfrac{x^2 z}{y}$

III. Utilice el gráfico, para determinar el intervalo donde f crece o donde decrece, si sólo crece o decrece.

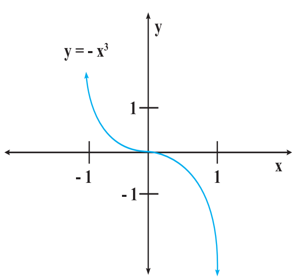
1)



Crece ____________

Decrece ____________

2)



Crece ____________

Decrece ____________

IV. Comprueba que las funciones dadas son inversas una de la otra.

1) $f(x) = 3x - 2 \quad g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

2) $g(x) = \dfrac{3x}{4}, \quad g(x) = \dfrac{3x}{4}$

V. Haga el gráfico de cada una de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

2) $f(x) = |-2x| + 1$

3) $f(x) = e^{2x}$

4) $f(x) = 3^{-2x}$

5) $f(x) = \log_3 x$

VI. Resuelva las siguientes ecuaciones.

1) $5(2^{3x}) = 8$
2) $\log_3 (3x - 2) = 2$

VII. Resuelva los siguientes problemas.

1) Un cristal obstruye el 3% de la luz que lo atraviesa. El porcentaje de luz que pasa por n cristales sucesivos está dado por:

$$P = 760e^{-0,03n}$$

Si $n = 10$, ¿qué porcentaje de luz pasará a través del cristal.

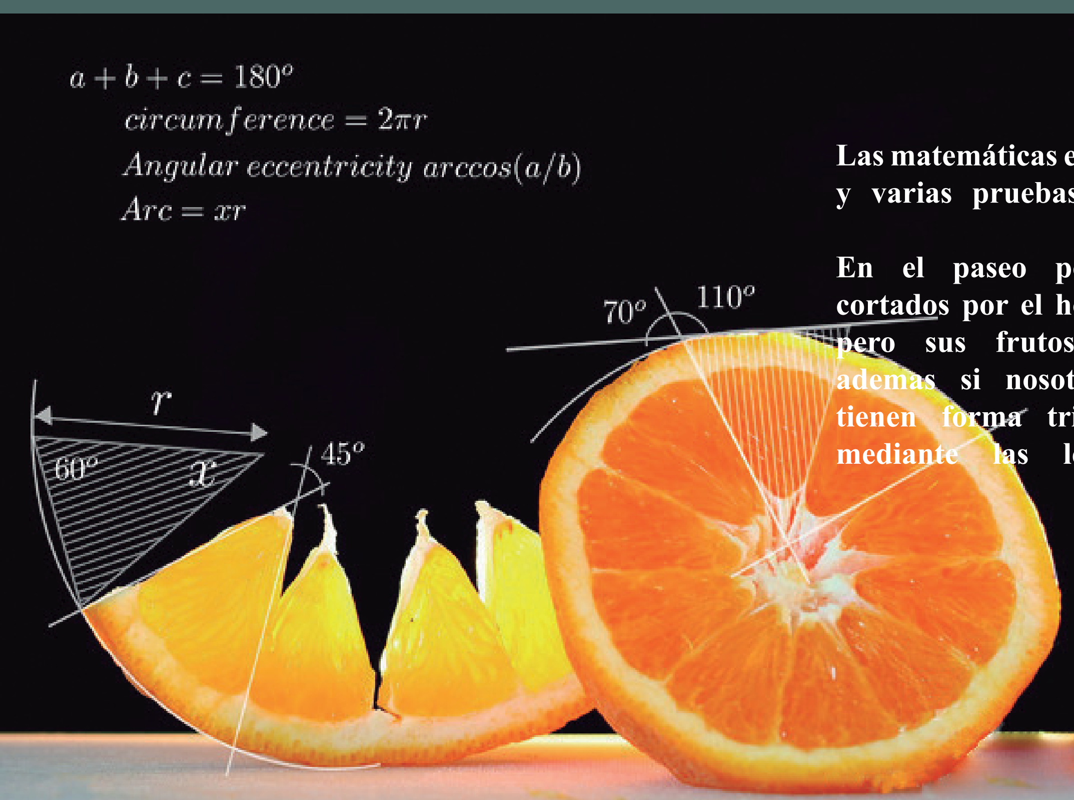
2) Se colocan C$ 450,52 en el banco, al 8%, compuesto anualmente. Si me han generado la cantidad de C$1 000, ¿por cuánto tiempo he mantenido ese dinero en el banco?

3) ¿Qué cantidad de sustancia radiactiva queda, después de 10 años, si la masa inicial es de 8 kg?

4) ¿Cuántos años hay que esperar para 10 gramos de una sustancia radiactiva disminuya a la mitad? $M_f = M_i(0,886)^t$. (t en miles de años).

IV UNIDAD

LA TRIGONOMETRÍA EN EL ÁMBITO RURAL



Las matemáticas están presentes en la naturaleza y varias pruebas de ello son las siguientes:

En el paseo podemos encontrar naranjos cortados por el hombre en forma semiesférica, pero sus frutos si son esferas perfectas, ademas si nosotros los pelamos, sus gajos tienen forma triangular y están dispuestos mediante las leyes de la trigonometría.

Nota histórica

La historia de la trigonometría comienza con los babilonios.

Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos.

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras muchas aplicaciones.

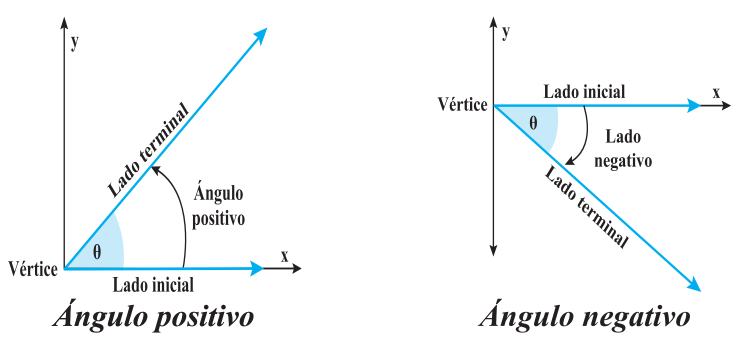
Indicador de logro: Induce las razones trigonométricas a partir del planteo y resolución en triángulos, rectángulos de problemas practicos de su realidad.

LA TRIGONOMETRÍA EN EL ÁMBITO RURAL

Ángulos y sus medidas

En trigonometría, los ángulos se interpretan como relaciones de rayos que tienen un vértice común.

Un ángulo se considera positivo si se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo, si se mide en sentido horario.



Existen tres unidades de medida de un ángulo, de acuerdo a tres sistemas de medidas distintos.

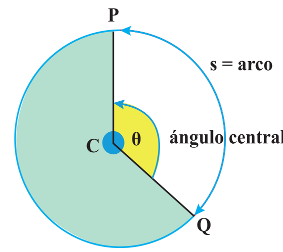
Sistema Sexagesimal

En este sistema, se considera la circunferencia dividida en 360 partes iguales o grados. Cada grado se considera, dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos.

$1° = 60'$ (minutos)	$1' = 60''$ (segundos)	$1° = 60' = 3600''$

Sistema circular

En este sistema se usa como unidad angular, el "radián". Un radián es el ángulo cuya medida del arco de la circunferencia, es igual al radio de la misma.



La longitud de una circunferencia es 2π radianes, es decir,

$$2(3{,}14...) \approx 6{,}28 \text{ rad}$$

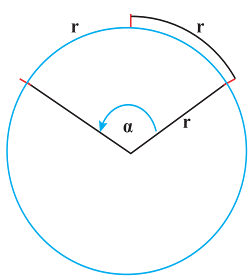
En muchas aplicaciones es necesario encontrar la longitud de un arco s, determinado por un ángulo central θ en una circunferencia de radio r.

Si $s = r$, entonces el ángulo θ mide un radian.

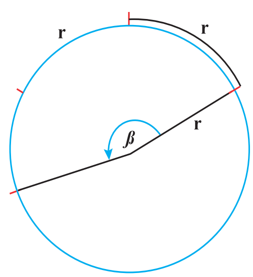
Ejemplo 1

Representar gráficamente los ángulos de: a. 2 radianes, b. 3 radianes, c. 5 radianes.

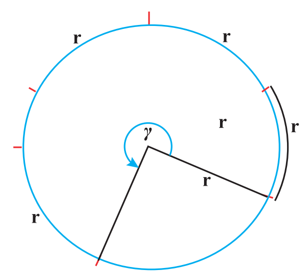
SOLUCIÓN



$\alpha = 2$ radianes
El arco mide 2 radios



$\beta = 3$ radianes
El arco mide 3 radios



$\gamma = 5$ radianes
El arco mide 5 radios

Relación grados - radianes	
i. $1 \text{ rad} = \dfrac{180}{\pi}$ grados	ii. $1^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}$ radianes

Ejemplo 2

Escribe los siguientes ángulos en grados minutos y segundos, si es posible.

a) $25{,}45^{\circ}$

b) $-30{,}16^{\circ}$.

SOLUCIÓN

a) Sabemos que $1° = 60'$, luego el decimal $0,45° = 0,45\ (60) = 27'$, por tanto:

$$25,45° = 25°\ 27' \text{ (25 grados, 27 minutos)}$$

b) $-\ 30,16° = -\ 30°\ (0,16)(60)' = -\ 30°\ 9,6'$.

Ahora, reducimos los $0,6'$ a segundos y tenemos: $0,6' = 0,6 \times 60'' = 36''$, luego:

$-\ 30,16° = -\ 30°\ (0,16)(60)' = -\ 30°\ 9,6' = -\ 30°\ 9'\ 36''$

Ejemplo 3

Escriba los siguientes ángulos en radianes.

a) 45°

b) 240°

SOLUCIÓN

a) Si $1°$, es igual a $\frac{\pi}{180}$ rad, $45°$ equivalen a $45° \bullet \frac{\pi}{180} = \frac{\overset{1}{\cancel{45°}}\pi}{\underset{4}{\cancel{180}}} = \frac{\pi}{4}$ rad, simplificando por 45.

b) Si $1°$, es igual a $\frac{\pi}{180}$ rad, $240°$ equivalen a $240° \bullet \frac{\pi}{180} = \frac{240\pi}{180}$, simplificamos por 60 y nos queda $\frac{\overset{4}{\cancel{240}}\pi}{\underset{3}{\cancel{180}}} = \frac{4\pi}{3}$.

La simplificación por 60, se puede hacer, simplificando por todos los factores comunes que tienen el numerador y el denominador.

Ejemplo 4

Escriba los siguientes ángulos en grados,

a) $\frac{3\pi}{2}$

b) $\frac{7\pi}{4}$

SOLUCIÓN

a) Si $1\text{rad} = \frac{180}{\pi}$ grados, entonces $\frac{3\pi}{2}$ equivalen a $\frac{\overset{90}{\cancel{180}}}{\pi} \bullet \frac{3\pi}{\cancel{2}} = \frac{90 \times 3\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 270°$.

b) Si $1\text{rad} = \frac{180}{\pi}$ grados, entonces $\frac{7\pi}{4}$ equivalen a $\frac{\overset{45}{\cancel{180}}}{\pi} \bullet \frac{7\pi}{\cancel{4}} = \frac{45(7\cancel{\pi})}{\cancel{\pi}} = 315°$

Sistema Centesimal

El grado centesimal, también llamado gradián, o gonio, no pertenece al sistema internacional de medidas, su uso ha quedado restringido a las áreas de la ingeniería civil y la topografía, se usa para medir ángulos planos; 1 gradián, se define como el ángulo central sustendido por un arco de longitud 1/400 partes de la circunferencia. Cada grado centesimal, es igual a 100 "minutos centesimales" y cada minuto tiene 100 "segundos centesimales".

1g equivale a 100 min   1min equivale a 100s   1g equivale a 10 000s

Equivalencias entre ángulos básicos

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Ejemplo 5

Convierta: a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ a grados, b) $\beta = 2$ a grados, c) convierta $30°$ a radianes.

SOLUCIÓN

a) El ángulo α no tienen unidad establecida, por tanto, está en radianes:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{180º}{6} = 30º$$

b) El ángulo β, no especifica la unidad de medida, luego, se deduce que está en radianes.

$$2 = 2\left(\frac{180º}{\pi}\right) = \frac{360º}{3{,}14} = 114\ 6497º$$

Convertimos el decimal; $0{,}6497°$, a minutos multiplicando por 60 minutos que tiene el grado.

$$(0{,}6497°)(60') = 38{,}980',$$

hacemos lo mismo para convertir los decimales de minuto a segundo y tenemos:

$$2\ \text{rad} = 114°\ 38'\ 59''$$

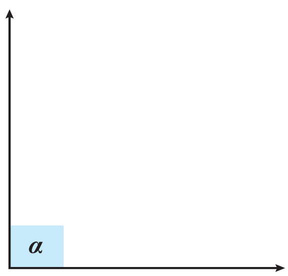
c) $1º = \frac{\pi}{180º}$ radianes, luego $30º = 30º\left(\frac{\pi}{180º}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Clasificación de los ángulos de acuerdo con su medida

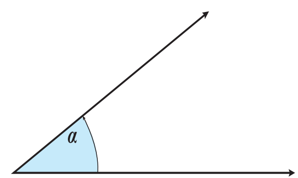
La medida de un ángulo es la abertura comprendida entre los lados que lo forman.

De acuerdo con su medida, un ángulo θ puede ser:

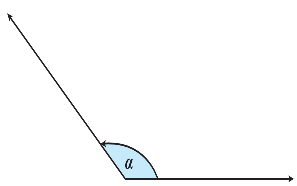
$0^{o} < \theta < 90^{o}$ ⟶ agudo
$\theta = 90^{o}$ ⟶ recto
$90 < \theta < 180^{o}$ ⟶ obtuso
$\theta = 180^{o}$ ⟶ llano



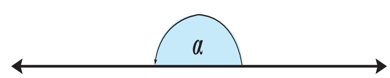
Ángulo recto: α = 90º



Ángulo agudo; α < 90º



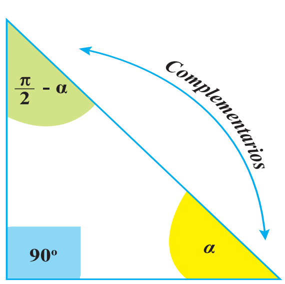
Ángulo obtuso:
90 < α < 180º



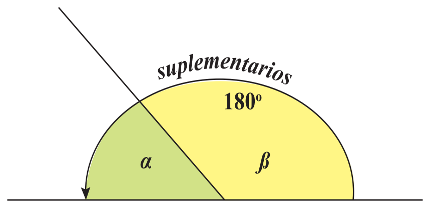
Ángulo llano: α = 180°

Ángulo complementario y suplementario

Para cualquier par de ángulos α y β, si $\begin{cases} \alpha + \beta = 90^{o} \longrightarrow \text{complementarios} \\ \alpha + \beta = 180^{o} \longrightarrow \text{suplementarios} \end{cases}$



α y $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, son complementarios, ya que; $\left(\frac{\pi}{2} \bullet \alpha\right) + \alpha = 90°$.



α y β, son suplementarios, ya que la suma de ellos es $180°$.

Te mostraremos como descomponer un ángulo, dado en grados en su equivalente que contenga minutos y segundos.

Al ángulo de $60°$ que tienes a la derecha, se le quita $1°$, entonces:

$$60° = 59° + 1°$$

$$60° = 59° + 1°$$

$$60° = 59° \quad 60'$$

$$60° = 59° \quad 59' + 1'$$

$$60° = 59° \quad 59' \quad 60''$$

Ahora descomponemos $1°$ en minutos y nos queda $59°\ 59' + 1'$.

Ahora descomponemos $1'$ en segundos y nos queda $59°\ 59'\ 60''$.

De esta manera: $60° = 59°\ 59'\ 60''$. Verlo a la derecha.

Ejemplo 6

Encuentra el ángulo complementario de θ, si: $\theta = 35°\ 25'\ 30''$.

SOLUCIÓN

El ángulo complementario de θ, es el valor que le hace falta, para completar $90°$, luego, el ángulo complementario es; $\alpha = 90° - \theta$.

El ángulo θ, está dado en grados, minutos y segundos, por tanto para restar a $90°$, un ángulo dado en grados, minutos y segundos, debemos descomponer los $90°$ en $89°\ 60'$ y luego en $89°\ 59'\ 60''$, de esta manera restamos, grados menos grados, minutos, menos minutos y segundos, menos segundos.

$$\begin{array}{r} 89°\ 59'\ 60'' \\ -\ 35°\ 25'\ 30'' \\ \hline 54°\ 34'\ 30'' \end{array}$$

El ángulo complementario es: $\boxed{\alpha = 54°\ 34'\ 30''}$

Ejemplo 7

Halle el ángulo suplementario de θ, si $\theta = 56{,}35°$.

SOLUCIÓN

El ángulo θ, no es un número entero, por lo que debemos convertir los $0{,}35°$ a minutos.

Sabemos que 1 grado tiene $60'$, luego $0{,}35°$, tendrá $0{,}35(60')$
$0{,}35° = 0{,}35(60') = 21'$,

luego, el ángulo θ de, $56{,}35°$ es equivalente a $56°21'$.

Teniendo en cuenta que el ángulo suplementario de θ, es el valor angular que le falta a θ para que sea igual a $180°$, en suplemento de θ es:

$$\begin{array}{r} 179°\ 60' \\ -\ \ 56°\ 21' \\ \hline 123°\ 39' \end{array}$$

$$\alpha = 179°60' - 56°21'$$

El ángulo suplementario es: $\boxed{\alpha = 123°39'}$.

ACTIVIDADES

Analiza la teoría y los ejemplos, antes de responder.

I. Dibuja en tu cuaderno:

1) Un ángulo agudo.
2) Un ángulo llano.
3) Un ángulo obtuso.

II. Escribe en la línea, la palabra agudo, llano u obtuso según el ángulo dado.

1) Si $\theta = 50°$ entonces es_______________
2) Si $\theta = 150°$ entonces _______________
3) Si $\theta = 90°$ entonces es_______________
4) Si $\theta = 180°$ entonces es_______________

III. Resuelve las operaciones indicadas y completa.

1) $179°60' - 56°\ 21' =$ ______________

2) $559° - 110°\ 25' =$ ______________

3) $229° + 25°15' =$ ______________

4) $200°60' + 56°\ 21' =$ ______________

IV. Convierte los ángulos dados a radianes.

1) $\alpha = 400°$

2) $\theta = 20°$

3) $\beta = 35°$

4) $\beta = 350°$

V. Convierta los ángulos en grados.

1) $\alpha = 4$

2) $\theta = 2$

3) $\theta = 3{,}5$

4) $\beta = 3$

VI. Encuentra el ángulo complementario del ángulo dado.

1) 22°

2) 73°

3) 15°

VII. Encuentra el ángulo suplementario del ángulo dado.

1) 27°

2) 110°

3) 73°

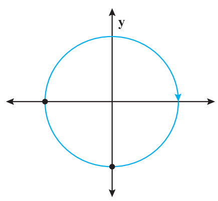
Posiciones de ángulos en el plano cartesiano

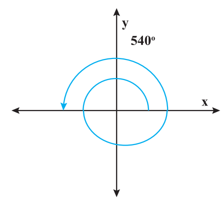
Cuando un segmento de recta, ℓ, se rota desde el lado inicial hasta el lado terminal, establece un ángulo que puede ser; positivo, si ℓ gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y negativo, si ℓ gira en sentido horario.

Ejemplo 8

Represente gráficamente los ángulos; a) $-360°$, b) $540°$, c) $120°$, d) -150.

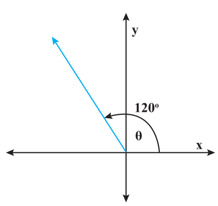
SOLUCIÓN

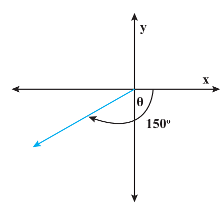




a) El ángulo de − 360° se obtiene haciendo una rotación completa en el sentido horario.

b) El ángulo de 540°, se obtiene haciendo una y media rotación en el sentido anti horario.



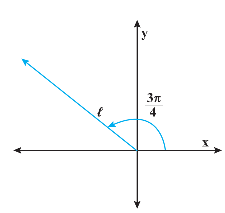


c) El ángulo de 120°, es positivo, luego se obtiene rotando en el sentido anti horario. 90º + 30º = 120º.

d) El ángulo de −150° es negativo, luego se obtiene rotando en el sentido horario.− (90º + 60º) = −150º

Ángulo en posición normal estándar

Un ángulo, en el sistema de coordenadas cartesianas, está en **posición normal estándar,** si su vértice está en el origen, y su lado inicial coincide con el eje positivo de las x.

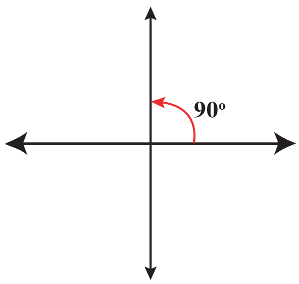


La figura muestra un ángulo positivo de $\frac{3\pi}{4}$ en posición estándar.

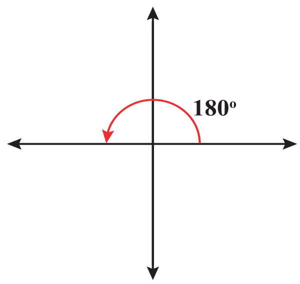
Ángulo cuadrantal

Se les llama así a los ángulos cuyo lado inicial empieza en el eje x positivo y su lado terminal finaliza en cualquiera de los cuadrantes del plano cartesiano, ya sea $90°$, $180°$, $270°$, $360°$, otros…

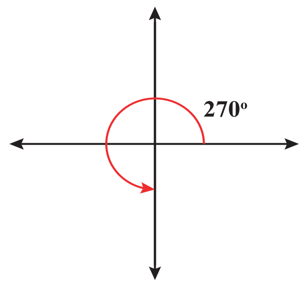
Los siguientes son ángulos cuadrantales.



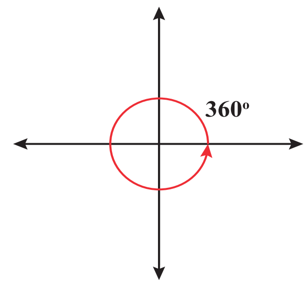
Ángulo cuadrantal de 90°



Ángulo cuadrantal de 180°



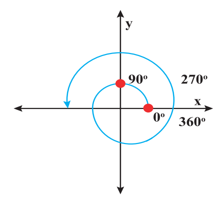
Ángulo cuadrantal de 270°



Ángulo cuadrantal de 360°

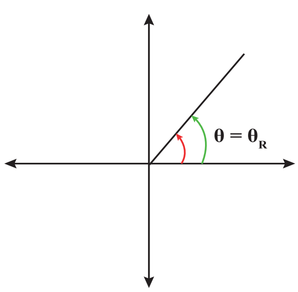
Ángulo coterminal

Los ángulos coterminales son ángulos en posición estándar (ángulos con el lado inicial en el eje positivo de las x) que tienen un lado terminal común. Por ejemplo $0°$ con $360°$ y $90°$ con $270°$ son coterminales.

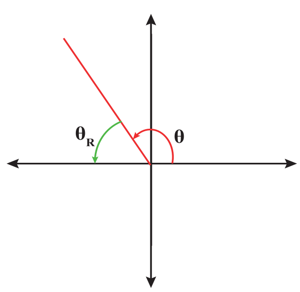


Ángulo de referencia

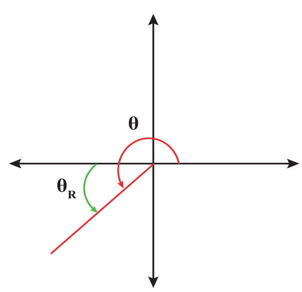
Un ángulo de referencia es un ángulo agudo positivo que representa un ángulo θ de cualquier medida. Éste es el ángulo más pequeño formado entre el lado terminal de θ y el eje x. Siempre utilizamos éste último como su marco de referencia y el procedimiento para medirlo dependerá del cuadrante en el que se encuentre θ. (ver gráficos).



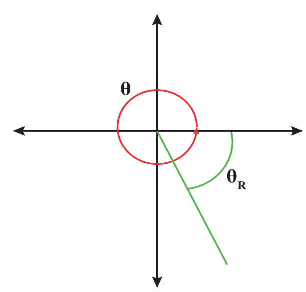
Ángulo de referencia en el primer cuadrante



Ángulo de referencia en el segundo cuadrante



Ángulo de referencia en el tercer cuadrante



Ángulo de referencia en el cuarto cuadrante

ACTIVIDADES

Responde en el cuaderno, lo que se te pide.

I. Dibuja en tu cuaderno, el ángulo que se te pide.

1) Un ángulo de $50°$ en posición normal estándard.

2) Un ángulo coterminal para $30°$.

3) Un ángulo coterminal para $150°$.

4) Un ángulo coterminal de $-270°$.

5) Un ángulo de referencia para un ángulo θ de $200°$.

6) Un ángulo de referencia para un ángulo θ de $275°$.

7) Un ángulo de referencia para un ángulo θ de $330°$.

8) Un ángulo de $150°$ en posición normal estándard.

II. Representa gráficamente los siguientes ángulos

1) Si $\theta = 50°$

2) Si $\theta = 150°$

3) Si $\theta = -125°$

4) Si $\theta = 90°$

5) Si $\theta = 180°$

6) Si $\theta = -140°$

Razones trigonométricas

Históricamente, las funciones trigonométricas, se definieron como razones, ya que al definirlas para ángulos agudos en triángulos rectángulos, no son más que cocientes entre los lados.

En un triángulo rectángulo, distinguimos: la <u>hipotenusa</u> (lado mayor) y los lados perpendiculares de menor tamaño que la hipotenusa, denominados <u>catetos</u>.

Por comodidad nos referiremos a la hipotenusa como **hip**, al cateto opuesto como **op**, y al cateto adyacente como **ad**.

Las seis razones trigonométricas para el ángulo agudo α son:

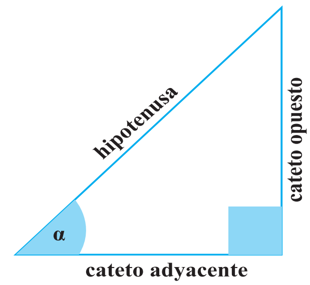
Las razones directas:

- seno de α que se abrevia $\operatorname{sen} \alpha$
- coseno de α que se abrevia $\cos \alpha$
- tangente de α que se abrevia $\tan \alpha$

Las razones recíprocas:

- cosecante de α que se abrevia $\csc \alpha$
- secante de α que se abrevia $\sec \alpha$
- cotangente de α que se abrevia $\cot \alpha$

Las 6 razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:



1) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$

2) $\cos\alpha = \dfrac{\text{ad}}{\text{hip}}$

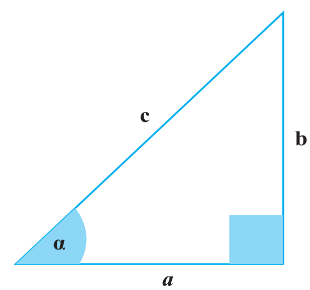
3) $\tan\alpha = \dfrac{\text{op}}{\text{ad}}$

4) $\csc\alpha = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

5) $\sec\alpha = \dfrac{\text{hip}}{\text{ad}}$

6) $\cot\alpha = \dfrac{\text{ad}}{\text{op}}$

Calcularemos ahora las razones trigonométricas del ángulo α, utilizando el triángulo de catetos a y b, e hipotenusa c. De acuerdo con las definiciones anteriores tenemos:



1) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{c}$

2) $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$

3) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$

4) $\csc\alpha = \dfrac{c}{b}$

5) $\sec\alpha = \dfrac{c}{a}$

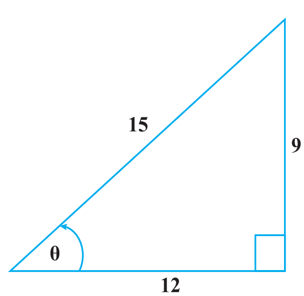
6) $\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$

Los catetos son de menor tamaño que la hipotenusa, por tanto al dividir cualquiera de los catetos entre la hipotenusa resulta un cociente menor que 1, luego el valor del seno y el coseno de cualquier ángulo, es siempre menor que 1.

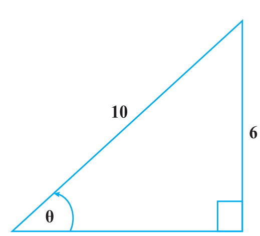
Ejemplo 9

Encuentre los valores de las seis funciones trigonométrica para el ángulo θ en los siguientes triángulos.

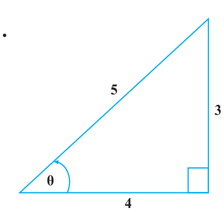
a.



b.



c.



SOLUCIÓN

Calculemos para cada triángulo las funciones.

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$

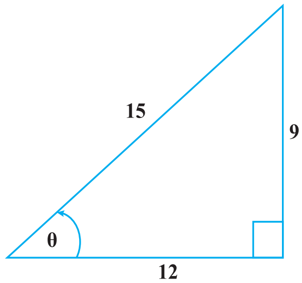
$\cos\theta = \dfrac{12}{15} = 0{,}8$

$\tan\theta = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$

$\csc\theta = \dfrac{15}{9} = 1{,}6$

$\sec\theta = \dfrac{15}{12} = 1{,}25$

$\cot\theta = \dfrac{12}{9} = 1{,}3$



$\text{sen}\ \theta = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

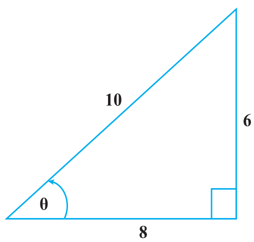
$\cos\theta = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

$\tan\theta = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$

$\csc\theta = \dfrac{10}{6} = 1{,}6$

$\sec\theta = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$

$\cot\theta = \dfrac{8}{6} = 1{,}3$



$\text{sen}\ \theta = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

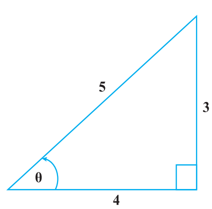
$\cos\theta = \dfrac{4}{5} = 0{,}6$

$\tan\theta = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

$\csc\theta = \dfrac{5}{3} = 1{,}6$

$\sec\theta = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

$\cot\theta = \dfrac{4}{3} = 1{,}3$



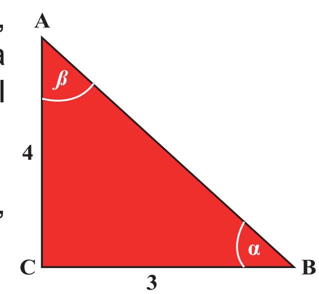
Los valores encontrados son los mismos, independientemente de las magnitudes de los lados del triángulo, lo que cuenta es, el valor de θ que en este caso, es el mismo para los tres triángulos.

Ejemplo 10

Ecuentre los ángulos α y β del triángulo de la figura.

SOLUCIÓN

Conocemos solamente los dos catetos del triángulo, por tanto, utilizaremos la tangente o la cotangente para encontrar los ángulos, ya que la tangente y la cotangente, son las que relacionan los catetos del triángulo.



El cateto opuesto al ángulo α es 4 y el adyacente es 3, luego, $\tan\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}33$.

Para encontrar el valor del ángulo, primero debemos asegurarnos de poner la calculadora en modo; grados, tecleamos el valor $1{,}33$, presionamos la tecla $\tan^{-1}$ y aparecerá el valor de $53{,}13°$, luego $\boxed{\alpha = 53{,}13°}$

Para calcular el valor de β, no hace falta repetir el procedimiento, sabemos que la suma de los tres ángulos interiores del triángulo suman $180°$, pero el triángulo ya tiene un ángulo recto $(90°)$, luego $\alpha + \beta$ completan los otros $90°$, por tanto $\alpha + \beta = 90°$.

Tenemos ya, que $\alpha = 53{,}13°$, luego $\beta = 90° - 53{,}13° = 36{,}87°$, entonces:

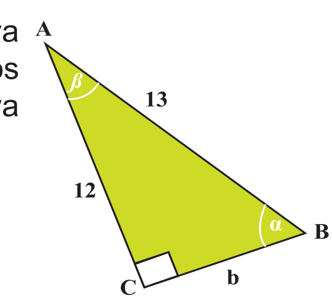
luego $\boxed{\beta = 36{,}87°}$

Ejemplo 11

Utilice razones trigonométricas para resolver el triángulo de la figura.

SOLUCIÓN

Resolver un triángulo, implica encontar los valores que le hacen falta, ya sean, ángulos o lados. En este caso, tenemos que encontrar los ángulos agudos y el lado b, el ángulo recto, no lo tenemos que encontrarlo, ya que mide $90°$.



Comenzaremos por hallar el ángulo β.

Para encontrarlo, utilizamos la razón coseno, ya que conocemos, la hipotenusa y el cateto adyacente a β.

$\cos\beta = \frac{12}{13} = 0{,}923$. Para obtener el valor del ángulo, tecleamos en la calculadora, en grados, el valor $0{,}923$, presionamos la tecla $\cos^{-1}$, y aparecerá el valor de $22{,}63°$,

luego $\boxed{\beta = 22{,}63°}$

Para encontrar α, utilizamos la estrategia del ejemplo anterior. Ya que α y β, suman $90°$, son complementarios, luego:

$\alpha + \beta = 90°$, por tanto $\alpha + 22{,}63° = 90°$,

de donde $\alpha = 90° - 22{,}63° = 67{,}37°$, entonces:

luego $\boxed{\alpha = 67{,}37°}$

El lado opuesto a β, lo podemos encontrar, utilizando la razón seno o tangente de β, también podemos utilizar coseno o tangente de α.

Utilizando la razón cos α, tenemos:

$\cos\ \alpha = \frac{b}{13}$	aplicando coseno.
$0{,}3847 = \frac{b}{13}$	sustituyendo cos α.
$13(0{,}3847) = b$	multiplicando por 13.
$5 = b$	efectuando el producto.

luego $\boxed{b = 5}$. Los valores requeridos son:

$\beta = 22{,}63$

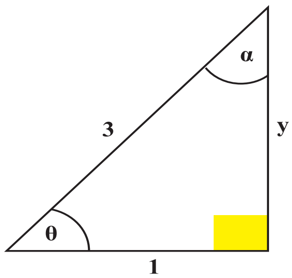
$\alpha = 67{,}37$

$b = 5$

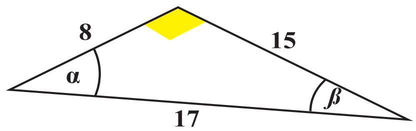
ACTIVIDADES

I. Utilice razones trigonométricas para calcular los valores de lados y/o ángulos que faltan en cada triángulo.

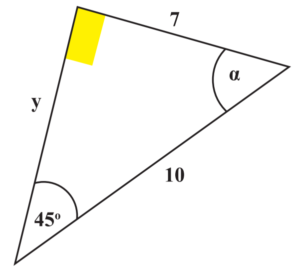
1)



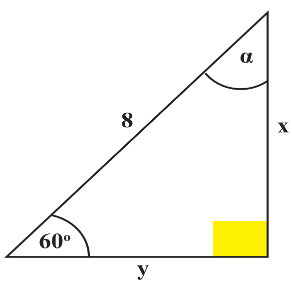
2)



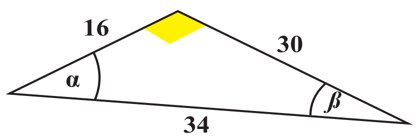
3)



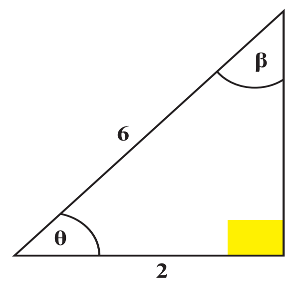
4)



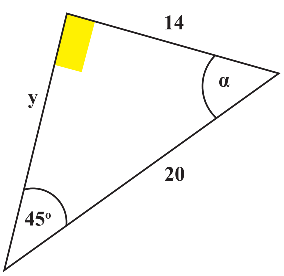
5)



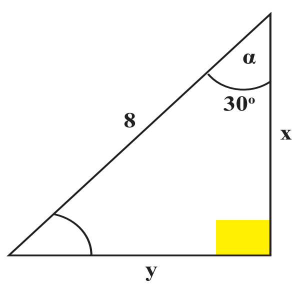
6)



7)



8)



Razones trigonométricas de ángulos particulares

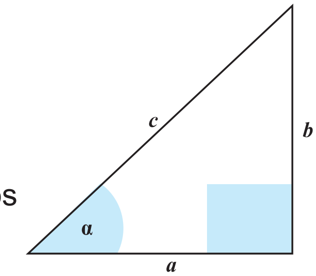
Recordaremos el **teorema de Pitágoras,** a fin de aplicarlo en los ejercicios que siguen.

Pitágoras fue un famoso matemático y filósofo griego que vivió aproximadamente entre los años 582 a. C. y 507 a. C. Su nombre pasó a la historia gracias al desarrollo del Teorema de Pitágoras relativo a los lados de los triángulos rectángulos. Éste teorema establece que:

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

En el triángulo de la figura, los catetos son a y b, la hipotenusa es c,

luego, según Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$ o bien, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

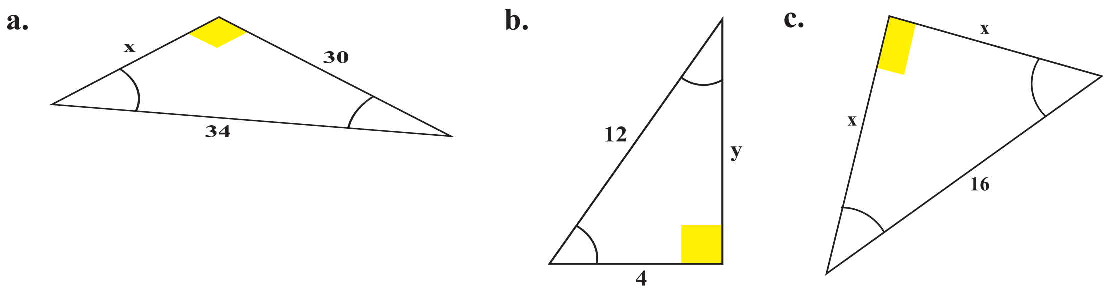


De esta forma, podemos encontrar la hipotenusa, y cualquiera de los catetos ya que del teorema se deriva que:

$a^2 = c^2 - b^2$ o, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, también $b^2 = c^2 - a^2$ o, $b = c^2 - a^2$

Ejemplo 12

Utilice el teorema de Pitágoras para encontrar los lados de los triángulos:



SOLUCIÓN

Empezamos por escribir la fórmula:

a)

$c^2 = a^2 + b^2$	escribiendo la fórmula.
$34^2 = x^2 + 30^2$	sustituyendo.
$1\ 156 = x^2 + 900$	resolviendo la potencias.
$1\ 156 - 900 = x^2$	asociando 1 156 y 900.
$256 = x^2$	despejando x.
$x = \sqrt{256}$, $x = 16$	es el valor de x.

b)

$c^2 = a^2 + b^2$	escribiendo la fórmula.
$12^2 = y^2 + 4^2$	sustituyendo.
$144 = y^2 + 16$	resolviendo la potencias.
$128 = y^2$	asociando 144 y 16.
$y = \sqrt{128}$	despejando y.
$y = 11{,}3$	es el valor de y.

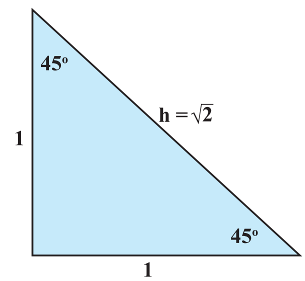
c)

$c^2 = a^2 + b^2$	escribiendo la fórmula.
$16^2 = x^2 + x^2$	sustituyendo.
$256 = 2x^2$	asociando las x^2.
$128 = x^2$	dividiendo entre 2.
$x = \sqrt{128}$	despejando x.
$x = 11{,}3$	es el valor de x.

En este caso, el triángulo es rectángulo, isósceles, ya que tiene dos lados iguales.

Razones trigonométricas para un ángulo de 45°

El triángulo de la figura, es isósceles, luego, sus catetos son de igual magnitud, sea 1 su valor.
El triángulo es rectángulo, luego tiene un ángulo recto,



Debido a que es isósceles, sus ángulos agudos miden 45° cada uno.

Por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

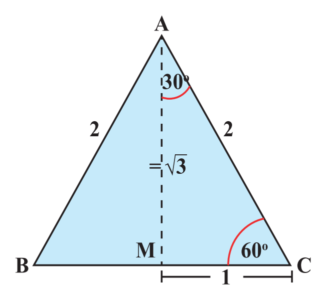
$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \text{ de donde } h = \sqrt{2}.$$

Ahora, aplicamos las razones trigonométricas, y encontramos los valores de las 6 razones.

$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$

Valores de las razones trigonométricas para el ángulos de 30° y 60°.

Consideremos ahora un triángulo equilátero ABC de la figura.



Por ser el triángulo, equilátero, sus lados, tienen la misma medida, sus ángulos también tienen la misma medida (60° cada uno).

Sea 2, el valor de cada uno de sus lados, ya que el triángulo es equilátero, la altura desde el punto A divide al lado opuesto $\overline{B}$ en dos partes iguales, de tal manera que, el triángulo ABM, tiene las mismas dimensiones que el triángulo AMC.Utilizando el Teorema de Pitágoras, en el triángulo AMC, tenemos:

$$2^2 = 1^2 + (\overline{AM})^2$$
$$4 = 1 + (\overline{AM})^2$$
$$3 = (\overline{AM})^2 \text{ de donde } \overline{AM} = \sqrt{3}$$

Conociendo $\overline{AM}$, podemos establecer los valores de las razones trigonométricas para $30°$ y $60°$.

Razones trigonométricas para el ángulo de $30°$					
$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$

El mismo procedimiento seguimos para encontrar las razones trigonométricas de $60°$.

Razones trigonométricas para el ángulo de $60°$					
$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 13

Haga un resumen de los valores de las 6 razones para los ángulos de $30°$ $45°$ y $60°$, en radianes.

SOLUCIÓN

Empezaremos por hacer la conversión de los ángulos, de $30°$ $45°$ y $60°$, a radianes.

En la sección 4.1 vimos la relación grados - radianes, y en la parte ii, vimos que: $1° = \frac{\pi}{180}$ radianes, luego:

Si $1° = \frac{\pi}{180}$, entonces,

$$30° = \frac{\cancel{30}\pi}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{6}$$ simplificando por 30.

Similarmente

$$60° = \frac{\cancel{60}\pi}{\cancel{180}_{3}} = \frac{\pi}{3}$$ simplificando por 60.

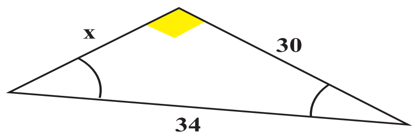
Funciones / θ	Radianes	sen	cos	tan	csc	sec	cot
$\theta = 30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\theta = 45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1
$\theta = 60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

ACTIVIDADES

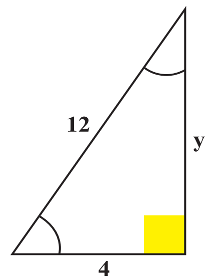
Responde en el cuaderno.

I. Utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar los lados que faltan en los triángulos.

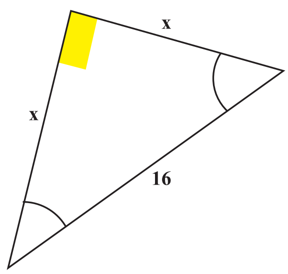
1)



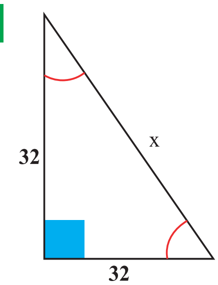
2)



3)



4)



II. Escribe cada ángulo en radianes.

1) 120°
2) − 135°
3) − 15°
4) 15°
5) 9°
6) 35°
7) 90°
8) 180°
9) − 240°
10) 270°

III. Escribe cada ángulo en grados, minutos y segundos si es posible.

1) 12,08°
2) − 13,25°
3) − 15,40°
4) 1,5°
5) 9,36°
6) 3,05°
7) 19,09°
8) 18,20°
9) − 24,10°
10) 27,30°

Indicador de logro: Aplica las identidades fundamentales de la suma, resta, ángulo medio y ángulo doble en la demostración de identidad.

Identidades generales

En matemáticas, una **identidad** es la **igualdad** de dos expresiones que matemáticamente se escriben diferente, pero que de hecho representan la misma expresión. Además, una identidad es siempre cierta, sean cuales sean, los valores de las distintas variables involucradas.

Ejemplos de identidades son:

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Son válidas para toda x en $\mathbb{R}$.

La diferencia entre una ecuación, y una identidad, es que la ecuación es válida para algunos valores de la variable, en cambio la identidad es válida para todo $\mathbb{R}$.

Las identidades suelen utilizarse para transformar una expresión matemática en otra equivalente, particularmente, para resolver ecuaciones.

Identidad

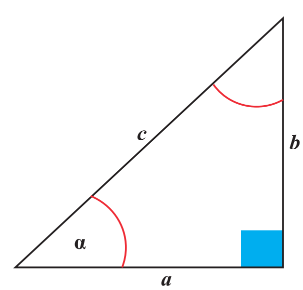
Dos expresiones f y g son idénticas si para toda x en el dominio de ambas funciones, estas coinciden.

Consideremos el triángulo de la figura. Hemos aprendido que:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b}{c}$ por definición de $\operatorname{sen}\alpha$.

$\operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{c}{b}\right)^{-1}$ propiedades de exponentes.

$\operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{c}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\csc\alpha}$ luego $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$



Similarmente:

$\cos\alpha = \frac{\text{ad}}{\text{hip}} = \frac{a}{c}$ por definición de $\cos\alpha$.

$\cos\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{-1}$ propiedades de exponentes.

$\cos\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sec\alpha}$ luego $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$

Utilizando el mismo triángulo tenemos, por definición de tangente:

$\tan\alpha = \frac{\text{op}}{\text{ad}} = \frac{b}{a}$ por definición de $\tan\alpha$.

$\tan\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ propiedades de exponentes.

$\tan\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\cot\alpha}$ luego $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

Identidad para la tangente.

$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}$ dividiendo fracciones.

$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ luego $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Identidad para la cotangente.

$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}$ dividiendo fracciones.

$\cot\alpha = \frac{a}{b}$ luego $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Se conocen como identidades pitagóricas, las identidades deducibles del teorema de Pitágoras. Identidades pitagóricas del seno y el coseno y son:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad$ $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ $\quad$ $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

Resumen de las Identidades			
Identidades recíprocas	$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
Identidades de tangente y cotangente	$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$	
Identidades pitagóricas	$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	$1 + \cot^2\alpha = \csc\alpha^2$
	$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$	

Ejemplo 14

Utilice las identidades para simplificar la expresión, $\tan\alpha + \cot\alpha$

SOLUCIÓN

Simplificar expresiones trigonométricas significa hacer sustituciones trigonométricas y operaciones algebraicas, a fin de escribirla, en forma más simple. Conviene comenzar en el miembro de la ecuación que tenga identidades más complicadas a fin de simplificarlas y comprobar que de un miembro de la identidad se puede obtener el otro.

$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ sustituyendo $\tan\alpha$ por $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ y $\cot\alpha$ por $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

$= \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha},$ aplicando mínimo común múltiplo.

$= \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\,\alpha},$ sustituyendo $(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha)$ por 1 en el numerador.

$\tan\alpha + \cot\alpha = \csc\alpha\,\sec\alpha$ sustituyendo $\csc\alpha$ por $\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$, y $\sec\alpha$ por $\dfrac{1}{\cos\,\alpha}$.

luego: $\tan\alpha + \cot\alpha = \csc\alpha\,\sec\alpha$

Ejemplo 15

Utilice las identidades para simplificar la expresión, $\dfrac{\tan\alpha\,(1+\cot^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}$

SOLUCIÓN

$\dfrac{\tan\alpha\,(1+\cot^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}$ expresión dada.

$\dfrac{\tan\alpha\,(\csc^2\alpha)}{\sec^2\alpha}$ sustituyendo $(1+\cot^2\alpha)$ por $\csc^2\alpha$ y $(1+\tan^2\alpha)$ por $\sec^2\alpha$.

$= \dfrac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}\cdot\dfrac{1}{\text{sen}^2\,\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$ sustituyendo: $\tan\alpha$ por $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}$, $\csc^2\alpha$ por $\dfrac{1}{\text{sen}^2\,\alpha}$ y $\sec^2\alpha$ por $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

$= \dfrac{\cancel{\text{sen}}\,\alpha}{\cancel{\cos}\,\alpha}\cdot\dfrac{1}{\text{sen}^{\cancel{2}}\,\alpha}\cdot\cos^{\cancel{2}}\alpha$ dividiendo las fracciones y simplificando adecuadamente.

$= \dfrac{\cos\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ reduciendo.

luego: $\dfrac{\tan\alpha\,(1+\cot^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{\cos\,\alpha}{\sec\,\alpha}$

Ejemplo 16

Demuestre la identidad $\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\text{sen}\,x} = 2\csc x$

SOLUCIÓN

$\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{\text{sen}^2x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\,\text{sen}\,x}$ sumando fracciones.

$(1+\cos x)^2 = 1^2 + 2\cos x + \cos^2 x$ aplicando el $(x+y)^2$.

$= \dfrac{\text{sen}^2x + (1 + 2\cos x + \cos^2x)}{(1+\cos x)\,\text{sen}\,x}$ sustituyendo el desarrollo del binomio.

$= \dfrac{\overbrace{(\text{sen}^2x + \cos^2x)} + 1 + 2\cos x}{(1+\cos x)\,\text{sen}\,x}$ asociando adecuadamante.

$= \dfrac{1 + 1 + 2\cos x}{(1+\cos x)\,\text{sen}\,x}$ sustituyendo $\text{sen}^2x + \cos^2x$ por 1.

$= \dfrac{2 + 2\cos x}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}$ reduciendo.

$= \dfrac{2(1 + \cancel{\cos x})}{(1 + \cancel{\cos x})\operatorname{sen} x}$ simplificando y factorizando.

$= \dfrac{2}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x$ utilizando $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$

En conclusión; $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x}$

Ejemplo 17

Demuestre la identidad $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \tan x$

SOLUCIÓN

$\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x - \cos^2 x}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$ operando en el primer miembro.

$= \dfrac{(1 - \cos^2 x) + \operatorname{sen} x}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$ asociando adecuadamente.

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$ sustituyendo $(1 - \cos^2 x)$ por $\operatorname{sen}^2 x$.

$= \dfrac{\operatorname{sen} x(1 + \cancel{\operatorname{sen} x})}{(1 + \cancel{\operatorname{sen} x})\cos x} = \tan x$ factorizando y simplificando.

$= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$ usando $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Hemos comprobado que $\boxed{\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \tan x}$

Ejemplo 18

Demuestre la identidad $= \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

SOLUCIÓN

$\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$ multiplicando numerador y denominador por $(1 + \operatorname{sen} x)$.

$= \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$ utilizando $(x + y)(x - y) = (x^2 - y^2)$.

$= \dfrac{\cos^2 x}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$ sustituyendo $(1 - \operatorname{sen}^2 x)$ por $\cos^2 x$.

$= \dfrac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}\,(1 + \operatorname{sen} x)} = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ simplificando $\cos x$.

Hemos comprobado que $\boxed{\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}}$

ACTIVIDADES

Lee con cuidado, y resuelve.

I. Escriba el primer término, en función del segundo

1) $\cot\theta,\ \text{sen}\,\theta$
2) $\tan\theta,\ \cos\theta$
3) $\text{sect}\,\theta,\ \text{sen}\,\theta$
4) $\cos\theta,\ \cos\theta$
5) $\text{sen}\,\theta,\ \cot\theta$

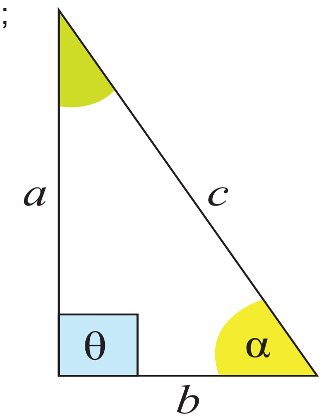
II. Comprueba las siguientes identidades.

1) $\cos\beta\csc\beta = 1$
2) $\tan\beta\cot\beta = 1$
3) $\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \cot x$
4) $\cot\beta\sec\beta = \csc\beta$
5) $\csc\theta - \text{sen}\,\theta = \cot\theta\cos\theta$
6) $\text{sen}\,\theta + \cos\theta\cot\theta = \csc\theta$
7) $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \text{sen}^2\,x$
8) $\tan\theta + 2\cos\theta\csc\theta = \sec\theta\csc\theta + \cot\theta$
9) $\dfrac{\csc^2\gamma}{1+\tan^2\gamma} = \cot^2\gamma$
10) $\dfrac{1-\cos z}{\text{sen}\,z}\quad\dfrac{\text{sen}\,z}{1-\cos z} = 2\csc z$
11) $\tan^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \tan^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$
12) $\dfrac{1}{1-\cos z} + \dfrac{1}{1+\cos z} = 2\csc z$
13) $\dfrac{1+\csc\lambda}{\sec\lambda} - \cot\lambda = \cos\lambda$
14) $(\sec\beta - \tan\beta)(\csc\beta + 1) = \cot\beta$
15) $1 - 2\,\text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$
16) $\cos^2 y - \text{sen}^2 y = 2\cos 2y - 1$

Fórmulas para ángulos complementarios

El triángulo de la figura, es rectángulo en θ. Los tres ángulos α, β y θ, suman $180°$, si $\theta = 90°$ entonces, $\beta + \alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$, luego $\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Se observa también, que el cateto a, es opuesto al ángulo α y a la vez, adyacente al ángulo β, pero $\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, por tal razón, si α y β, son complementarios, entonces;



1) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{c} = \cos \alpha$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{c} = \text{sen}\ \alpha$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{b}{a} = \cot \alpha$

4) $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{c}{b} = \sec \alpha$

5) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{c}{a} = \csc \alpha$

5) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{c}{a} = \tan \alpha$

Fórmulas para la suma y diferencia de ángulos

Presentamos a continuación las siguientes fórmulas (la deducción de las mismas está fuera de los objetivos de este texto), las mismas, nos ayudarán a deducir las funciones trigonométricas de ángulos dobles y ángulos medios:

Fórmulas para la suma	Fórmulas para la diferencia
1) $\text{sen}\ (u + v) = \text{sen}\ u \cos v + \cos u\ \text{sen}\ v$.	3) $\text{sen}\ (u - v) = \text{sen}\ u \cos v - \cos u\ \text{sen}\ v$.
2) $\cos\ (u + v) = \cos u \cos v - \text{sen}\ u\ \text{sen}\ v$.	4) $\cos\ (u - v) = \cos u \cos v + \text{sen}\ u\ \text{sen}\ v$.

Partiendo de estas dos fórmulas podemos obtener a manera de ejercicio, una tercera para encontrar la tangente.

$\tan\ (u + v) = \dfrac{\text{sen}\ (u + v)}{\cos\ (u + v)}$ aplicando $\tan x = \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x}$.

$\tan\ (u + v) = \dfrac{\text{sen}\ u \cos v + \cos u\ \text{sen}\ v}{\cos u \cos v + \text{sen}\ u\ \text{sen}\ v}$ aplicando $\text{sen}\ (u + v)$ y $\cos(u + v)$.

$$\frac{\dfrac{\text{sen}\ u\ \cancel{\cos v}}{\cos \cancel{u} \cos v} + \dfrac{\cos \cancel{u}\ \text{sen}\ v}{\cos \cancel{u} \cos v}}{\dfrac{\cos u\ \cancel{\cos v}}{\cos \cancel{u} \cos v} + \dfrac{\text{sen}\ u\ \text{sen}\ v}{\cos u \cos v}} = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

dividiendo cada término por $\cos u\ \cos v$ y simplificando.

De esta manera se obtienen los siguientes resultados para la suma de ángulos.

1) $\text{sen}(u+v) = \text{sen}\, u \cos v + \cos u\, \text{sen}\, v.$ 2) $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v$ 3) $\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1-\tan u \tan v}$	**Resultado 1**

De forma análoga:

$\tan(u-v) = \dfrac{\text{sen}(u-v)}{\cos(u-v)}$ aplicando $\tan x = \dfrac{\text{sen}}{\cos}$.

$\tan(u-v) = \dfrac{\text{sen}\, u \cos v - \cos u\, \text{sen}\, v}{\text{sen}\, u \cos v + \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v}$ aplicando $\text{sen}(u-v)$ y $\cos(u-v)$.

$$\dfrac{\dfrac{\text{sen}\, u \cancel{\cos v}}{\cos u \cancel{\cos v}} - \dfrac{\cancel{\cos u}\, \text{sen}\, v}{\cancel{\cos u} \cos v}}{\dfrac{\cos u \cancel{\cos v}}{\cos \cancel{u} \cos v} - \dfrac{\text{sen}\, u\, \text{sen}\, v}{\cos u \cos v}} = \dfrac{\tan u - \tan v}{1+\tan u \tan v}$$

dividiendo cada término por $\cos u \cos v$ y simplificamos.

1) $\text{sen}(u-v) = \text{sen}\, u \cos v - \cos u\, \text{sen}\, v.$ 2) $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v.$ 3) $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1+\tan u \tan v}$	**Resultado 2**

Fórmulas para ángulos dobles

El seno de 2*u*, lo podemos escribir; $\text{sen}(2u) = \text{sen}(u+u)$, luego:

$\text{sen}(2u) = \text{sen}(u+u)$ sustituyendo u por v en $\cos(u+v)$.

$\text{sen}(2u) = \text{sen}\, u \cos u + \cos u\, \text{sen}\, u$ aplicando $\text{sen}(u+v)$.

$\text{sen}(2u) = 2\text{sen}\, u \cos u$ realizando la suma indicada.

$$\boxed{\text{sen}(2u) = 2\text{sen}\, u \cos u}$$

Similarmente para el coseno de 2u, tenemos: $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v$.

$\cos(2u) = \cos(u+u)$ sustituyendo u por v en $\cos(u+v)$.

$\cos(2u) = \cos u \cos u - \text{sen}\, u\, \text{sen}\, u$ aplicando resultados anteriores.

$\cos(2u) = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$ realizando los productos indicados.

$$\boxed{\cos(2u) = \cos^2 u - \text{sen}^2 u}$$

Fórmula para $\tan(2u)$

Utilizaremos la fórmula $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, de las identidades generales, para encontrar $\tan(2u)$.

$\tan 2u = \frac{\text{sen}\,2u}{\cos 2u}$ utilizando identidades fundamentales.

$\tan 2u = \frac{2\,\text{sen}\,u\cos u}{\cos^2 u - \text{sen}^2 u}$ aplicando los resultados anteriores.

$\dfrac{\frac{2\,\text{sen}\,u\cancel{\cos u}}{\cos^{\cancel{2}} u}}{\frac{\cancel{\cos^2 u}}{\cancel{\cos^2 u}} - \frac{\text{sen}^2 u}{\text{sen}^2 u}}$ dividiendo término a término por $\cos^2 u$ y simplificando.

$\tan(2u) = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$ $\tan(2u) = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$

1) $\text{sen}(2u) = 2\text{sen}\,u\cos u$. 2) $\cos(2u) = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$ 3) $\tan(2u) = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$	**Resultado 3**

Ejemplo 19

Verifique la identidad: $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\,x$

SOLUCIÓN

$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\,\pi\cos x - \cos\pi\,\text{sen}\,x$ aplicando $\text{sen}(u - v)$

$= (0)\cos x - (-1)\,\text{sen}\,x = \text{sen}\,x$ sustituyendo $\text{sen}\,\pi = 0$ y $\cos\pi = -1$

Ejemplo 20

Verifique la identidad: $\tan(x - \pi) = \tan x$.

SOLUCIÓN

$\tan(x-\pi) = \frac{\tan x - \tan\pi}{1 + \tan x\tan\pi}$ aplicando el resultado 2.

$\tan(x-\pi) = \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x(0)}$ ya que tangente de π, es 0.

Fórmulas para ángulo medio

Sabemos que: $\cos(2u) = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$

Si sustituimos $\cos^2 u = 1 - \text{sen}^2 u$, en la ecuación anterior, tenemos:

$\cos 2u = (1 - \text{sen}^2 u) - \text{sen}^2 u$ sustituyendo $\cos^2 u$ por $(1 - \text{sen}^2 u)$.

$\cos 2u = 1 - 2\text{sen}^2 u$ reduciendo términos semejantes.

Si hacemos $2u = x$ entonces, $u = \left(\frac{x}{2}\right)$, luego:

$$\underset{2u}{\cos x} = 1 - 2\,\text{sen}^2 \underset{u}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$ sustituyendo x por $2u$ $\left(\frac{x}{2}\right)$ y por u.

$-2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x - 1$ despejando $-2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$ despejando $\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ despejando $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\ .$$

similarmente, $\cos(2u) = \cos^2 u - (1 - \cos^2 u)$ sustituyendo $\text{sen}^2 u$ por $(1 - \cos^2 u)$.

$\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$ ➊ reduciendo términos semejantes.

Si hacemos $2u = x$ entonces, $u = \left(\frac{x}{2}\right)$, luego:

$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ sustituyendo en ➊, $(2u)$ por x, y u por $\left(\frac{x}{2}\right)$.

Además, $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$ despejando $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$ despejando $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

En los ejemplos siguientes se deduce la fórmula para la cotangente, basándose en estos ejemplos, usted puede deducir una fórmula para la tangente del ángulo medio.

Resumen de fórmulas para el ángulo doble y el ángulo medio

1) $\text{sen}\,(2u) = 2\text{sen}\,u \cos u$

2) $\cos\,(2u) = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$

3) $\tan\,(2u) = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

4) $\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

5) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

6) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Ejemplo 21

Si $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{4}$, encuentre el valor de $\cos(2x)$.

SOLUCIÓN

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ por identidades generales.

$\cos^2 x = 1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2$ expresión dada.

$\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{1}{16}\right)$ por identidades fundamentales.

$\cos^2 x = \dfrac{16 - 1}{16}$ sustituyendo el valor dado del seno.

$\cos^2 x = \dfrac{15}{16}$ resolviendo.

Sustituyendo en; $\cos\,(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, tenemos;

$\cos\,(2x) = \dfrac{15}{16} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} - \dfrac{1}{16}$ sustituyendo los valores de $\text{sen}\,x$, y $\cos x$.

$\cos\,(2x) = \dfrac{14}{16}$ reduciendo.

$\cos\,(2x) = \dfrac{7}{4}$

Ejemplo 22

Demuestre las siguientes identidades:

a) $\csc 2x = \frac{1}{2}\sec x \csc x$

b) $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$

$\csc 2x = \frac{1}{\text{sen } 2x}$ utilizando la identidad $\csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$.

$\csc 2x = \frac{1}{2\text{sen } x \cos x}$ sustituyendo $\text{sen } 2x$ por $2\text{sen } x \cos x$.

$\csc 2x = \frac{1}{2}\frac{1}{\text{sen } x}\cdot\frac{1}{\cos x}$ sustituyendo $\sec x$, por $\frac{1}{\text{sen } x}$ y $\csc x$, por $\frac{1}{\cos x}$.

$\csc 2x = \frac{1}{2}\csc x \sec x$ usando identidades.

b) $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$

$\cot 2u = \frac{\cos 2u}{\text{sen } 2u}$ utilizando la identidades.

$\cot 2u = \frac{\cos^2 u - \text{sen}^2 u}{2\text{ sen } u \cos u}$ sustituyendo $\text{sen } 2x$ por $2\text{sen } x \cos x$.

$\cot 2u = \dfrac{\frac{\cos^2 u}{\text{sen}^2 u} - \frac{\text{sen}^2 u}{\text{sen}^2 u}}{\frac{2\cancel{\text{sen}}\, u \cos u}{\text{sen}^{\cancel{2}} u}}$ dividiendo por término a término por $\text{sen}^2 u$.

$\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$ simplificando y usando identidades.

Ejemplo 23

Si $x = \frac{5\pi}{4}$, utilice las fórmulas anteriores, para obtener la tangente del ángulo medio.

Si $x = \frac{5\pi}{4}$, el ángulo medio correspondiente es $\frac{5\pi}{4} \div 2 = \frac{5\pi}{8}$.

Teniendo en cuenta la identidad, $\tan\frac{u}{2} = \pm\frac{1-\cos u}{1+\cos u}$ tenemos:

$\tan\frac{x}{2} = \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}}}$ utilizando la identidad, $\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$.

$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{1+\cos\frac{5\pi}{4}}}$ sustituyendo el valor de $\cos\frac{5\pi}{4}$.

$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-(-0{,}70)}{1+(-0{,}70)}}$ sustituyendo valores.

$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1{,}7}{0{,}3}}$ ya que $\left(\frac{5\pi}{8}\right)$, está en el cuadrante II.

$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) - 2{,}38$ es el valor de la tangente.

Ejemplo 24

Demuestre la identidad: $\operatorname{sen}\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2} = \frac{\operatorname{sen} z}{2}$.

SOLUCIÓN

El miembro izquierdo de la identidad es el producto del seno y el coseno del ángulo medio.

$\operatorname{sen}\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos z)}\ \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos z)}$ sustituyendo las fórmulas del ángulo medio.

$= \sqrt{\frac{1}{4}(1-\cos^2 z)}$ haciendo el producto indicado.

$\operatorname{sen}\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 z}{4}}$ sustituyendo, $1-\cos^2 z$ por $\operatorname{sen}^2 z$.

$\operatorname{sen}\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2} = \frac{\operatorname{sen} z}{2}$ eliminando la raíz cuadrada.

Ejemplo 25

Demuestre la identidad $\csc 2x = \frac{1}{2}\sec x \csc x$.

SOLUCIÓN

$\csc 2x = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x}$ utilizando la identidad $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

$\csc 2x = \frac{1}{2\operatorname{sen} x \cos x}$ utilizando cosecante de $2u$.

$\csc 2x = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1}{\cos x}$ descomponiendo el producto.

$\csc 2x = \frac{1}{2}\sec x\ \csc x$ sustituyendo $\csc x$ por $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$, y $\sec x$ por $\frac{1}{\cos x}$.

ACTIVIDADES

I. Utilice las fórmulas de suma para encontrar el valor de:

1) $\tan\frac{5\pi}{12}$

2) $\cos\frac{\pi}{12}$

3) $\tan\frac{7\pi}{12}$

4) $\cot\frac{19\pi}{12}$

5) $\cos -\frac{\pi}{12}$

6) $\csc -\frac{\pi}{12}$

7) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

8) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

II. Encuentre el valor exacto de cada expresión

1) $\text{sen } 30° \cos 20° - \cos 30° \text{ sen } 20°$

2) $\cos 15° \text{ sen } 10° - \text{sen } 30° \cos 10°$

3) $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

5) $\tan 60° + \tan 225°$

6) $\cos 135° - \cos 60°$

7) $\cos\frac{13\pi}{4}$

8) $\cos 345°$

III. Verifique las identidades

1) $\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot t$

2) $\cos(t+\pi)=-\cos t$

3) $\text{sen}(t+\pi)=-\text{sen } t$

4) $\cos(t-\pi)=-\cos t$

5) $\tan(\pi-t)=-\tan t$

6) $\cot(\pi-t)=-\cot t$

7) $\text{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen } t+\cos t)$

8) $\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t-\text{sen } t)$

9) $\cot(t+\pi)=\cot$

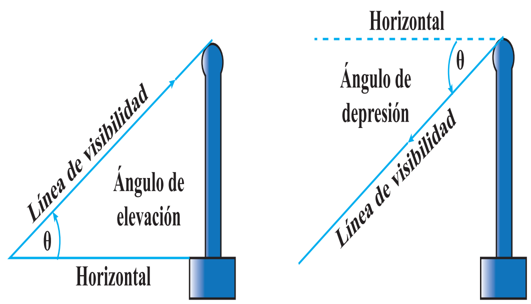
10) $\tan(\pi-t)=-\tan t$

Problemas con triángulos rectángulos

Ángulos de elevación y depresión

Antes de abordar la solución de problemas, requerimos estudiar los conceptos de ángulo de elevación y depresión.

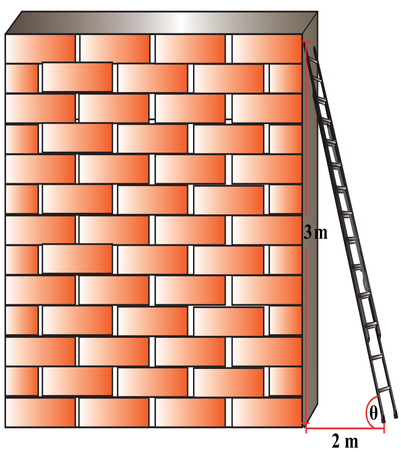
Los ángulos entre la línea de visibilidad de un observador y la horizontal, reciben nombres especiales. Si la línea de visibilidad está por encima de la horizontal, el ángulo determinado se llama ángulo de elevación.



Si la línea de visibilidad está por debajo de la horizontal, el ángulo se llama ángulo de depresión.

Ejemplo 26

Se desea calcular el ángulo de elevación θ, mostrado en la figura. La altura de la pared es de 3 metros y la distancia de la base de la escalera a la pared es de 2 m.



SOLUCIÓN

La figura forma un triángulo rectángulo. Para calcular el ángulo señalado, podemos utilizar la razón tangente de θ, ya que ésta, relaciona los catetos de un triángulo, rectángulo.

Conocemos la altura de la escalera y la distancia de la base de la escalera a la pared, luego:

$$\tan\theta = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

El ángulo cuya tangente es $1{,}5$, lo encontramos utilizando la calculadora, antes debemos asegurarnos que esté en modo grados, de esta manera, tecleamos el valor de $1{,}5$, presionamos la techa $\tan^{-1}$, y aparece en pantalla $56{,}30°$.

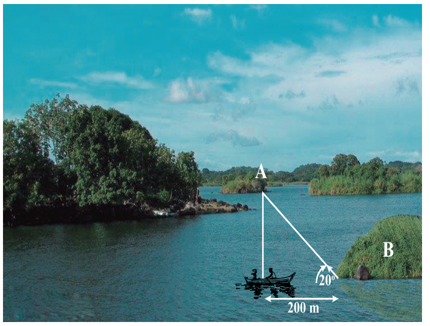
luego el ángulo buscado es: $\theta = \tan^{-1}(1{,}5) = 56{,}30^{\circ}$

Ejemplo 27

Un bote en el lago Cocibolca, está ubicado a 200 metros en línea horizontal, con el islote B (al Este) y en el Norte, en línea con el islote A. El ángulo que se forma desde B hasta el punto A es de $20°$. Calcule la distancia entre los islotes A y B.

SOLUCIÓN

La distancia d entre los islotes A y B, en el lago Cocibolca, es la hipotenusa del triángulo que se forma en la figura.



Conocemos el cateto adyacente al ángulo dado, luego, utilizaremos, una relación que involucre tanto el cateto adyacente, como la hipotenusa d (relación coseno de $20°$).

$\cos 20° = \dfrac{200}{d}$ por definición de coseno.

$d \cos 20° = 200$ ordenando y despejando d.

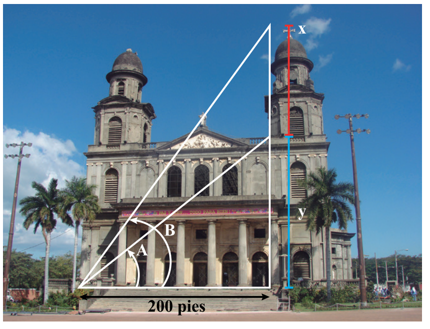
$d(0{,}939) = 200$ sustituyendo el valor del coseno.

$d = \dfrac{200}{0{,}939}$ despejando d.

$d = 212{,}99$ m es el valor de d.

Ejemplo 28

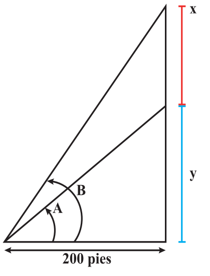
Encuentra la altura x de la torre de la antigua catedral de Managüa. Suponiendo que se conocen los ángulos $A = 26°$ y $B = 35°$, la distancia de 200 pie, medidos desde la perpendicular hasta el observador. Vea la figura.



SOLUCIÓN

Tanto el ángulo A como B son ángulos de un triángulo rectángulo.

Aplicando la definición de $\tan 35°$, tenemos: $\tan 35° = \dfrac{x+y}{200}$.



$\tan 35° = \dfrac{x+y}{200}$ ecuación original.

$0{,}70 = \dfrac{x+y}{200}$ sustituyendo el valor de $\tan 35°$.

$x + y = 200\,(0{,}7)$ ➊ despejando $x + y$.

$\tan 26° = \dfrac{y}{200}$ por definición de tangente.

$0{,}49 = \dfrac{y}{200}$ ➋ sustituyendo el valor de $\tan 26°$.

$y = 0{,}49(200) = 98$ es el valor de y.

Sustituyendo el valor de $y = 98$ en ➊ tenemos:

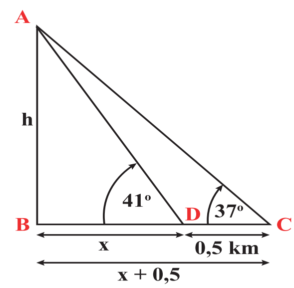
$0{,}70 = \dfrac{x + 98}{200}$ sustituyendo el valor de y en ❶.

$x = 200(0{,}7) - 98 = 42{,}04$ es la altura de la torre.

$x = 42{,}04$ pie es la altura.

Ejemplo 29

Un topógrafo quiere medir la altura de una montaña. El ángulo de elevación entre el nivel del suelo y la cima de la montaña es de $41°$. Medio kilómetro más lejos el ángulo de elevación mide $37°$. Calcule la altura de la montaña.



SOLUCIÓN

Con los datos del problema, se genera la figura. En el gráfico hay dos triángulos rectángulos: el ABC y el ABD, en ambos, se aplican las razones trigonométricas.

$\tan 37° = \dfrac{h}{x + 0{,}5}$ aplicando tangente con el ángulo de $37°$.

$\tan 37° = 0{,}75$ calculando $\tan 37°$.

$0{,}75 = \dfrac{h}{x + 0{,}5}$ sustituyendo $\tan 37°$ en $\tan 37° = \dfrac{h}{x + 0{,}5}$

$h = 0{,}75\,(x + 0{,}5)$ ❶ despejando h.

La ecuación resultante tiene dos variables, por tanto debemos buscar otra ecuación para resolver.

Con el ángulo de $41°$, tenemos:

$\tan 41° = \dfrac{h}{x}$ aplicando tangente de $41°$.

$0{,}8693 = \dfrac{h}{x}$ sustituyendo el valor de la tangente.

$0{,}86\,x = h$ ❷ despejando h.

Ahora igualamos las ecuaciones ❶ y ❷.

$0{,}86\,x = 0{,}75\,(x + 0{,}5)$ igualando ❶ y ❷.

$0{,}86x = 0{,}75x + 0{,}37$ resolviendo el producto.

$0{,}11x = 0{,}37$ reduciendo la ecuación.

$x = 3{,}36$ es el valor de x.

luego, $h = 0{,}86(3{,}36)$ sustituyendo el valor de x en ❷.

ACTIVIDADES

Revisa los ejemplos del material antes de resolver.

I. Resuelve los siguientes triángulos, siendo a opuesto a A, b opuesto a B y c opuesto a C.

1) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $a = 415$ m y $b = 280$ m.

2) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $c = 33$ m y $b = 21$ m.

3) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $a = 45$ m y $B = 22°$. Resolver el triángulo.

4) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $b = 5{,}2$ m y $B = 37°$.

5) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $a = 5$ m y $B = 41{,}7°$.

6) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $b = 3$ m y $B = 54.6°$.

7) Encuentre las 6 razones trigonométricas para un ángulo $\theta = 33{,}69°$.

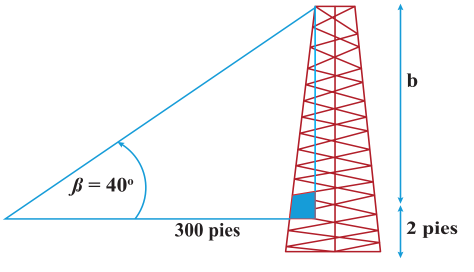
8) Encuentre las 6 razones trigonométricas para un ángulo $\theta = 35°26'$.

II. Resuelva los siguientes problemas.

1) Obtener el ángulo de depresión que forma un poste de 7,5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13,75 m

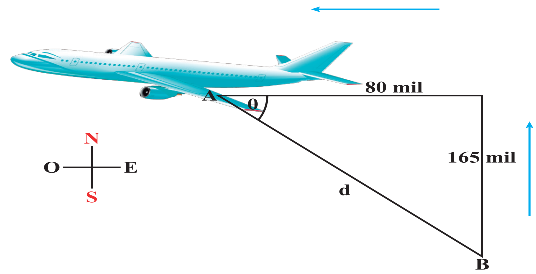
2) Tres pueblos A, B y C que no están en la misma línea, se unen por carretera de la manera siguiente; la distancia $\overline{BC}$, mide 9 km, la distancia $\overline{AC}$ es de 6 km, el ángulo ABC, es de 54° ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?

3) En una zona despejada del campo, se ha instalado una antena de emisora. A 300 pies de la base de la antena y a 2 pies del suelo, se determina con su cúspide, un ángulo de elevación que mide 40°. Halle la altura de la antena.



4) Un agrimensor puede medir el ancho de un río, colocando un punto C de un lado del río y tomando un punto de referencia A del otro lado. Después de doblar 90º en C, camina 20 metros hasta llegar al punto B. Si el ángulo β de la figura es de 20º, encuentre el ancho del río.

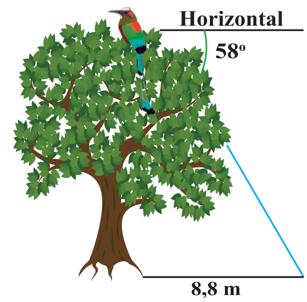
5) Un avión vuela 165 millas hacia el Sur,desde un punto B. En su recorrido, se mueve luego, 80 millas en dirección Oeste. Encuentre:



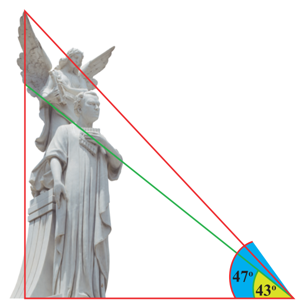
a) La distancia aproximada a la que se encuentra del punto B.

b) El ángulo θ, que se forma en A.

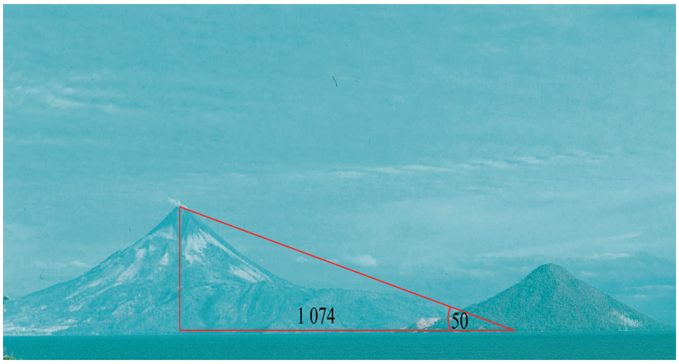
6) Un guarda barranco, está ubicado en la copa del árbol como se muestra en la figura. El árbol proyecta una sombra que se observa con un ángulo de depresión de 58°. Si la longitud de la sombra sobre el suelo es de 8,8 m, calcule la altura del árbol.



7) Se quiere medir la altura del busto del ángel que sobresale de la cabeza de la estatua de Rubén Darío, en el Parque Darío de Managüa, para ello se hacen observaciones, a una distancia de 400 pie del centro de la estatua. El ángulo de elevación desde el nivel de la calle a la base de la estatua fue de 43° y el de elevación hasta la parte superior de la estatua fue de 47°. Halle la altura del busto del ángel.



8) El Momotombo es un volcán de Nicaragua perteneciente a la cordillera de los Marrabios. Encuentre la altura del volcán, si a una distancia de 1 074 m se forma con la horizontal y la cúspide del volcán, un ángulo de elevación de 50°.

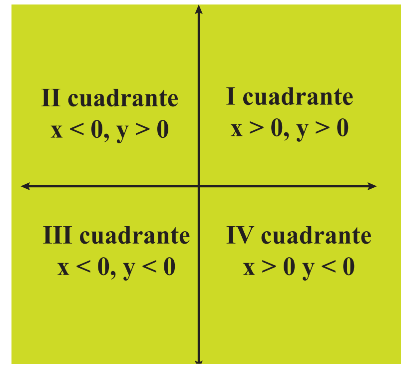


9) Dos lanchas salen de Ometepe, se separan en un ángulo recto, una hacia San Juan del Sur, y la otra hacia Granada, a qué distancia están cuando han recorrido 20 Km y 30 Km respectivamente?

10) Los puntos A, B y C, determinan un triángulo rectángulo en C, dicho punto está a 375 metros de A y a 530 de B. Si el ángulo BAC mide 49,5°, calcule la distancia entre A y B.

Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Empezaremos por recordar, los signos para x e y en cada uno de los cuadrantes del sistema de coordenadas cartesianas xy.



- El eje x es positivo a la derecha y negativo a la izquierda.
- El eje y es positivo hacia arriba negativo hacia abajo.

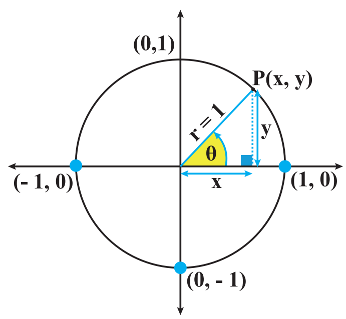
Las funciones trigonométricas para cualquier ángulo, son una extensión de las razones trigonométricas, ya que en el círculo, se pueden medir, todos los valores de θ, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

Sea P un punto en la circunferencia unitaria, y θ, un ángulo de referencia en el primer cuadrante, medido en radianes.

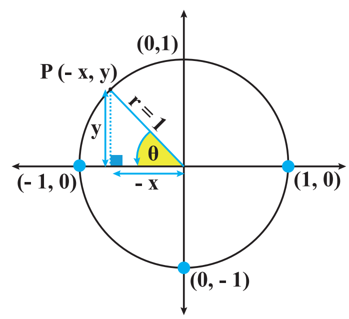
- En el primer cuadrante

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$



Primer cuadrante

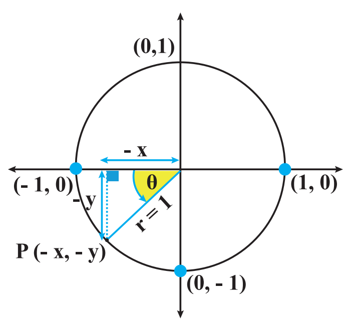


Segundo cuadrante

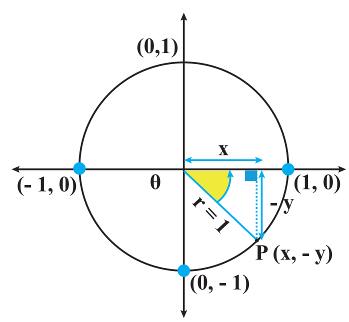
- En el segundo cuadrante

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{1} = -x$$



Tercer cuadrante



Cuarto cuadrante

- En el tercer cuadrante

$$\text{sen}\ \theta = \frac{-y}{r} = \frac{-y}{1} = -y$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{1} = -x$$

- En el cuarto cuadrante

$$\text{sen}\ \theta = \frac{-y}{r} = \frac{-y}{1} = -y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

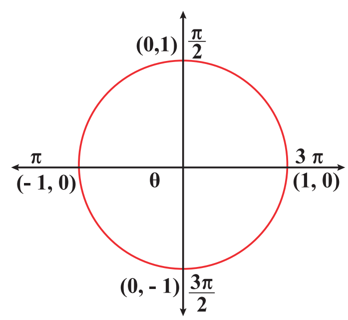
De esta manera deducimos los signos de las funciones.

Cuadrante	x	y	r	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
I	+	+	+	$\frac{y}{r}=y$	$\frac{x}{r}=x$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{y}$
II	–	+	+	$\frac{y}{r}=y$	$\frac{-x}{r}=-x$	$\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$	$\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$
III	–	–	+	$\frac{-y}{r}=-y$	$\frac{-x}{r}=-x$	$\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}$	$\frac{1}{-y}=-\frac{1}{y}$	$\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$	$\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}$
IV	+	–	+	$\frac{-y}{r}=-y$	$\frac{x}{r}=x$	$\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}$	$\frac{1}{-y}=-\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}$

Definición de función trigonométrica

El valor de una función trigonométrica de un número real t es su valor en un ángulo de t radianes, suponiendo que ese valor exista.

Si sabemos, en qué cuadrante está el punto P, y si la circunferencia es unitaria, podemos determinar los signos y valores de las funciones trigonométricas para los ángulos; $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.



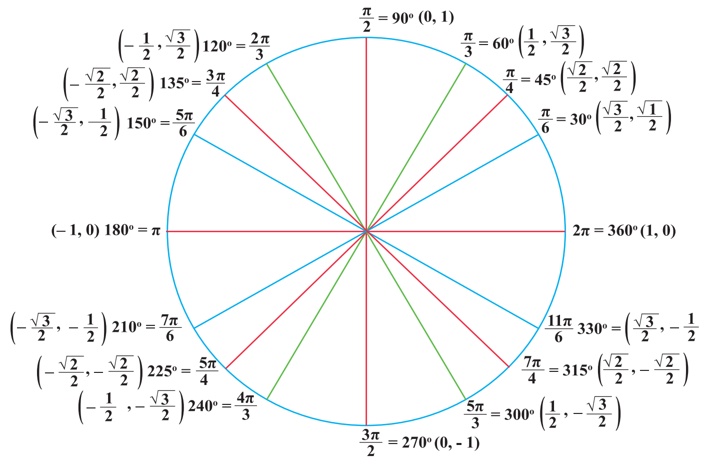
De este modo se deducen los valores de las 6 funciones trigonométricas.

Algunas funciones no están definidas para determinado ángulo, por ejemplo:

$$\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{0},$$ no está definida para este ángulo.

Ángulo \ Función	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0°	0	1	0	Indefinida	1	Indefinida
90°	1	0	Indefinida	1	Indefinida	0
180°	0	– 1	0	Indefinida	– 1	Indefinida
270°	– 1	0	Indefinida	– 1	Indefinida	0
360°	0	1	0	Indefinida	1	Indefinida

De mucha utilidad es la **circunferencia trigonométrica.** En él representamos, en grados y radianes, el resumen de los valores de las funciones trigonométricas de uso más frecuente.



- En rojo, los valores del seno y el coseno del ángulo de $45°$ y sus múltiplos.
- En verde, los valores del seno y el coseno de $60°$ y sus múltiplos.
- En azul, los correspondientes al ángulo de $30°$ y sus múltiplos.
- En el eje x aparecen los valores correspondientes a las funciones trigonométricas de 0, π y 2π.
- En el eje vertical, los valores correspondientes a los ángulos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

Ejemplo 30

Sea θ un ángulo en posición normal estándard, si cot $\theta = 2$, encuentre los valores de las 5 funciones trigonométricas restantes.

SOLUCIÓN

El ángulo está en posición normal estándar, luego, su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas.

La cotangente es positiva por tanto está en el cuadrante I.

$\cot\theta = \frac{2}{1} = 2$, es positiva, luego, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

La cotangente es la razón del cateto adyacente 2 sobre el cateto opuesto 1, por esta razón el punto P sobre el círculo, tiene coordenadas $(2;\ 1)$. Para hallar la hipotenusa, aplicamos el teorema de Pitágoras.

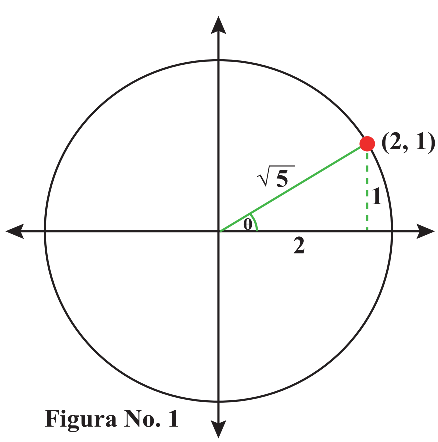


Figura No. 1

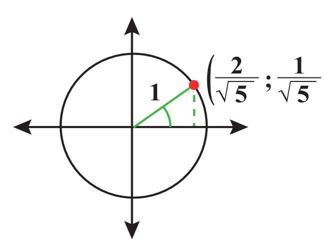


Figura No. 2

$r^2 = x^2 + y^2$ por Pitágoras.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ despejando r.

$r = \sqrt{2^2 + 1^2}$ sustituyendo.

$r = \sqrt{5}$ es el valor de r.

Para que el círculo sea unitario, dividimos su radio entre $\sqrt{5}$ y para mantener la proporción, dividimos sus lados entre $\sqrt{5}$, de esta manera, las coordenadas quedan divididas también entre $\sqrt{5}$. Ver figura.

Hecho esto, calculamos los valores de las restantes funciones trigonométricas.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \tan\theta = \frac{1}{2} \quad \csc\theta = \sqrt{5} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \cot\theta = 2$$

Ejemplo 31

Utiliza el circulo trigonométrico y las identidades fundamentales, para obtener los valores de las funciones trigonométricas que faltan para el ángulo de $150 = \frac{5\pi}{6}$.

SOLUCIÓN

De la circunferencia trigonométrica, se deduce que $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, luego, por identidades fundamentales, tenemos:

Si $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, y $\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ entonces,

$\tan\frac{5\pi}{6} = \dfrac{\text{sen}\ \frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ sustituyendo.

$\tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ simplificando.

$\cot\theta = \sqrt{3}$

si $\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, entonces, $\csc\frac{5\pi}{6} = 2$ es el valor de la cosecante.

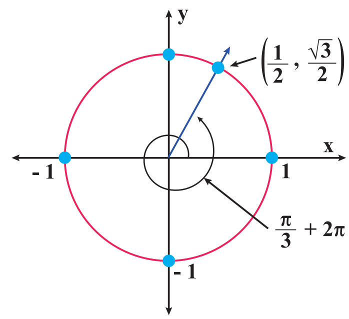
si $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, $\sec\frac{5\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

En conclusión tenemos:

$$\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \csc\frac{5\pi}{6} = 2 \quad \sec\frac{5\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cot\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas, tienen la particularidad de ser periódicas, esto significa, que sus valores se repiten periódicamente. Tienen igual valor en todos sus ángulos coterminales.



Por ejemplo:

- Los valores de todas las funciones de seno y coseno de $360°$ y de $0°$, tienen el mismo valor.
- Los valores de todas las funciones $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$, tienen el mismo valor.

Las funciones seno y coseno, repiten sus valores al completar un ángulo $360°$ o 2π, ya que $360°$, es una vuelta completa, a partir de ahí, se repiten otra vez los mismos valores.

En el gráfico, observamos que los ángulos $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$, son coterminales, luego:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$

Se puede generalizar que: $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)$ $\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$

Concluimos que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

Funciones periódicas

Una función f, es periódica, de período T, si para cualquier x, en el dominio de f, se cumple que, $f(x) = f(x + T)$.

La tangente de un ángulo se obtiene, dividiendo el seno entre el coseno, haciendo esta operación con los pares del circunferencia trigonométrica, vemos que $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, y $\tan\theta = \tan(\theta + \pi)$, sus valores se repiten en el período π, luego, el período de la tangente y la cotangente,es π .

En resumen tenemos:

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)$	$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$
$\csc\theta = \csc(\theta + 2\pi)$	$\sec\theta = \sec(\theta + 2\pi)$
$\tan\theta = \tan(\theta + \pi)$	$\cot\theta = \cot(\theta + \pi)$

Ejemplo 32

Si $\theta = 150°$, encuentre los valores de seno y coseno para el ángulo de $\theta = (150° + 2\pi)$.

SOLUCIÓN

Por la periodicidad, los valores de seno y soseno de $(150° + 2\pi)$, son los mismos de $150°$, y según el circunferencia trigonométrica son; $\text{sen}\,(150° + 2\pi) = \frac{1}{2}$ y $\cos\,(150° + 2\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejemplo 33

Utilice la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular:

a) $\text{sen}\ 30°$ y $\text{sen}\ 390°$.

b) $\tan 45°$ y $\tan 225°$.

SOLUCIÓN

a) $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2} = \text{sen}\,(30° + 2\pi)$ $\text{sen}\,(30° + 2\pi) = \text{sen}\ 390° = \frac{1}{2}$

b) $\tan 45° = 1 = \tan\,(45 + \pi)$ $\tan\,(45° + 180°) = \tan 225° = 1$

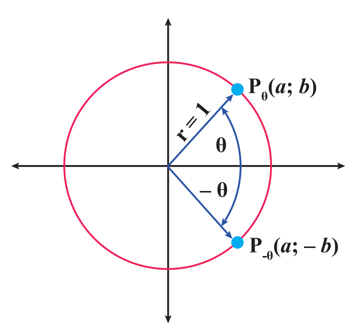
Propiedad par e impar de las funciones trigonométricas

Una función trigonométrica f:

- Es **par**, si $f(-\theta) = f(\theta)$ para todo θ en el dominio de f.
- Es **impar**, si $f(-\theta) = -f(\theta)$ para todo θ en el dominio de f.

Consideremos el círculo unitario de la figura.

Representemos por $P_\theta(a; b)$ las coordenadas del punto que determina el ángulo positivo θ y por $P_{-\theta}(a; -b)$ las coordenadas del punto que determina el ángulo $(-\theta)$.



Hemos visto que en un círculo es unitario,

$P(a; b)$ equivale a $P(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, luego:

$\cos\theta = a$, y $\text{sen}\,\theta = b$

$P(a; -b)$ equiva a $P[\cos(-\theta), \text{sen}(-\theta)]$, por tanto:

$\cos(-\theta) = a$, y $\text{sen}(-\theta) = -b$

En otras palabras;

i. $\cos(-\theta) = \cos\theta = a$ ii. $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\ \theta = -b$

- Si la función seno es una función impar, también lo es la función cosecante.
- Si la función coseno es una función par, también lo es la función secante.
- Si la función seno es impar, y la función coseno es par, entonces la tangente y la cotangente son funciones impares ya que;

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\text{sen}(-\theta)} = \frac{\cos(-\theta)}{-\text{sen}(-\theta)} = \cot\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\text{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\text{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = -\tan\theta$$

Funciones pares	Funciones trigonométricas impares	
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\ \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Ejemplo 34

Utilice la propiedad par e impar de las funciones trigonométricas para encontrar los valores de las 6 funciones trigonometricas del ángulo $\theta = -30°$.

SOLUCIÓN

El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares luego;

- si $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, entonces, $\text{sen}(-30°) = -\frac{1}{2}$.
- si $\csc(30°) = 2$, entonces, $\csc(-30°) = -2$.
- si $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces, $\tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- si $\cot(30°) = \sqrt{3}$, entonces, $\cot(-30°) = -\sqrt{3}$.

El coseno, y la secante son funciones pares luego;

- si $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- si $\sec(30°) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, entonces, $\sec(-30°) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ACTIVIDADES

Lea con cuidado antes de resolver.

I. Determinar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas, correspondientes a los puntos P dados. Ver gráfico.

1) P(2; 3)

2) P(− 2; − 1)

3) P(4; − 2)

4) P(2; − 5)

5) P(− 4; 4)

6) P(− 5; − 6)

II. Use las propiedades par e impar para calcular:

1) sen (− 135°)

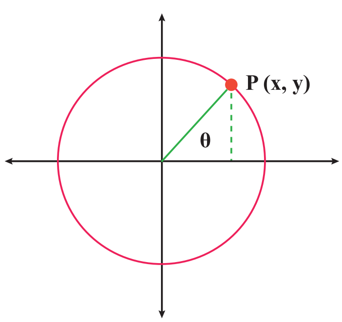
2) sec (− 60°)

3) csc (− 30°)

4) sen (− 90)

5) csc (− 45°)

6) cot (− 30)



III. Responde, ¿porqué?

1) ¿El coseno de θ y el coseno de (− θ) son iguales?

2) ¿El seno de (− θ) es igual − sen de0 θ?

3) ¿La secante de θ y la secante de (− θ) son iguales?

4) ¿La tangente θ es igual a la tangente de $(\theta + \theta)$?

5) Si $\cos\theta = 0{,}2$, encuentre el valor de $\cos(\theta + 2\pi)$.

6) Si $\operatorname{sen}\theta = 0{,}3$, encuentre el valor de $\operatorname{sen}(\theta + 4\pi)$.

7) Si $\tan\theta = 3$, encuentre el valor de $\tan(\theta + 3\pi)$.

IV. Determine el cuadrante en el que se encuentra el ángulo. sabiendo que:

1) $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta > 0$.

2) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$.

3) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$.

4) $\csc\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$.

V. Complete las 6 razones trigonométricas, utilizando los valores dados.

1) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{65}}$, $\tan\theta = \frac{1}{8}$.

2) $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$.

3) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, $\cos\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

4) $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$.

5) $\operatorname{sen} x = -\frac{5}{12}$, $\cos x < 0$.

6) $\cos x = -\frac{1}{3}$, $\csc x > 0$.

Indicador de logro: Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando identidades, para un ángulo cualquiera.

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es aquella, en la que aparece una o más funciones trigonométricas.

Para resolver una ecuación trigonométrica, hay que expresar todos los términos de la ecuación en función de una sóla razón si es posible. Nos podemos ayudar, haciendo uso del circunferencia trigonométrica y las identidades que ya hemos estudiado en secciones anteriores.

Ejemplo 35

Resolver la ecuación, $\text{sen } x = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN

Resolver esta ecuación implica, encontrar el ángulo x tal que $\text{sen } x = 1$.

$\text{sen } x = 1$ expresión dada.

$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = \text{sen}^{-1}(1)$ aplicando función inversa del seno.

$x = \text{sen}^{-1} 1$ $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x$, por propiedad de la función inversa.

$x = \frac{\pi}{2}$, o $90°$ ya que $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$.

Teniendo en cuenta que estas funciones se repiten después de cada período, se pueden encontrar infinitas soluciones, en este caso, se nos piden las soluciones en $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 36

Resolver la ecuación, $\cos x = -\frac{1}{2}$ en el intervalo $[0; 2\pi]$.

SOLUCIÓN

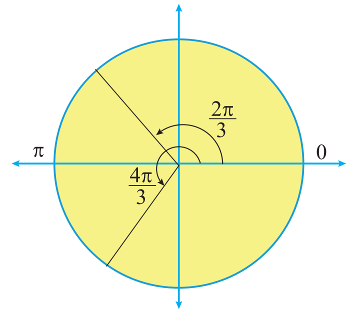
En este caso, encontraremos el ángulo o los ángulos en $[0, 2\pi]$, cuyo coseno sea, $-\frac{1}{2}$.

En los cuadrantes II y III, $\cos x < 0$, luego, la solución estaría en estos dos cuadrantes.

$\cos x = -\frac{1}{2}$ expresión dada.

Los dos ángulos cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$, son:

$x_1 = \frac{2\pi}{3} = 120°$, y $x_2 = \frac{4\pi}{3} = 240°$.

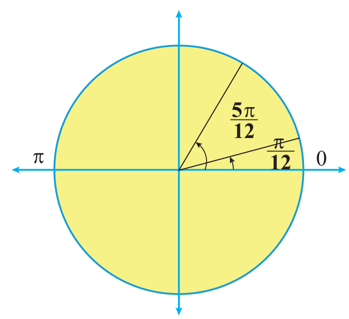


En la circunferencia trigonométrica vemos que las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} = 120°, \text{ y } x_2 = \frac{4\pi}{3} = 240°$$

Ejemplo 36

Resolver la ecuación, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en el intervalo $[0; 2\pi]$.



$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ expresión dada.

$\operatorname{sen}^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ aplicando función inversa.

$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ propiedad de la inversa.

$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$, y $\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{3}$ son las dos soluciones.

Si $x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$, entonces $x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Si $x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$, entonces $x_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

Las soluciones son: $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{5\pi}{12}$

Ejemplo 37

Resolver la ecuación, $4\operatorname{sen}^2 t - 8\operatorname{sen} t + 3 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN

La ecuación $4\operatorname{sen}^2 t - 8\operatorname{sen} t + 3 = 0$, es, cuadrática, la variable es $\operatorname{sen} t$, luego, podemos utilizar los métodos de factorización o bien la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para resolver.

Una forma

$4\operatorname{sen}^2 t - 8\operatorname{sen} t + 3 = (2\operatorname{sen} t - 3)(2\operatorname{sen} t - 1) = 0$ factorizando el trinomio.

Si $(2\operatorname{sen} t - 3) = 0$, entonces, $\operatorname{sen} t = \frac{3}{2} > 1$, se descarta, ya que $\frac{3}{2} > 1$.

Si $(2\operatorname{sen} t - 1) = 0$, entonces, $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2} < 1$ factorizando el trinomio.

$t_1 = \frac{\pi}{6} = 30°$ $t_2 = \frac{5\pi}{6} = 150°$ son los valores obtenidos.

Otra forma

Resolveremos ahora utilizando la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

La ecuación es; $4\,\text{sen}^2\,t - 8\text{sen}\,t + 3 = 0$.

con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3$. La variable es ($\text{sen}\,t$).

$\text{sen}\,t = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)}$ aplicando la fórmula cuadrática.

$\text{sen}\,t = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{8}$ sustituyendo en la fórmula, los valores de a, b y c.

$\text{sen}\,t = \dfrac{8 \pm 4}{8}$ reduciendo.

$\text{sen}\,t = \dfrac{8 + 4}{8} = 1{,}5 > 1$ se descarta por ser mayor que 1.

$\text{sen}\,t_1 = \dfrac{8 - 4}{8} = 0{,}5$ es el valor válido, encontrado.

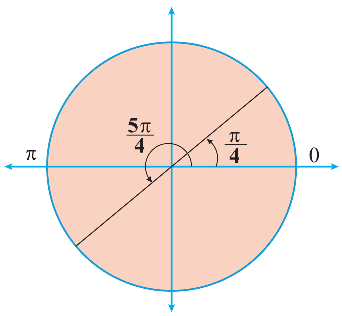
$t_1 = \text{sen}^{-1}\ 0{,}5$ aplicando la función inversa del seno.

Ejemplo 38

Resuelva la ecuación $\text{sen}\,t - \cos t = 0$, en el intervalo $[0; 2\pi]$.

SOLUCIÓN

Esta es una ecuación con dos variables que son; el seno y el coseno, por tanto, se hace necesario utilizar identidades para transformar la expresión en función de una sóla variable.



$\dfrac{\text{sent}}{\text{cost}} - \dfrac{\text{cost}}{\text{cost}} = \dfrac{0}{\text{cost}}$ dividiendo entre $\text{cost} \neq 0$.

$\dfrac{\text{sent}}{\text{cost}} - \dfrac{\cancel{\text{cost}}}{\cancel{\text{cost}}} = \dfrac{0}{\text{cost}}$ simplificando.

$\tan t - 1 = 0$ ecuación resultante.

$t = \tan^{-1} 1$ aplicando función inversa.

Ya que la tangente es positiva en los cuadrantes I y III, entonces, por la periodicidad de esta función, concluimos que las soluciones son $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{5\pi}{4}$, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Véalo en el gráfico.

ACTIVIDADES

Lea con cuidado antes de resolver.

I. Encuentre, el valor de θ para cada ecuación, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

1) $\text{sen } 3\theta = -1$

2) $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$

3) $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

4) $\text{sen}\left(3\theta - \frac{\pi}{18}\right) = 1$

5) $\tan \frac{3\theta}{2} = -1$

6) $\cos \frac{2\theta}{3} = -\sqrt{3}$

7) $\cos^2 x + \cos x = 0$

8) $\text{sen}^2 \theta - 1 = 0$

9) $2\text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$

10) $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

11) $2\text{sen } \theta \cos \theta = \cos \theta$

12) $\cos \theta + \text{sen } \theta = 0$

13) $\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \cos \theta$

14) $\cos x = \text{sen } x$

15) $2\text{sen}\alpha \cos \alpha = \text{sen } \alpha$

16) $\tan \alpha = \cot \alpha$

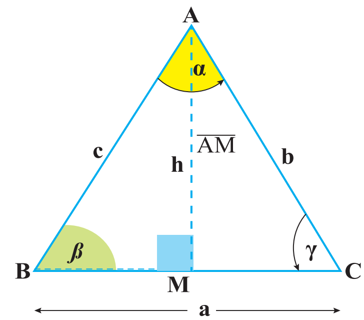
17) $\tan \theta = 2 \text{ sen } \theta$

18) $\cos y \text{ sen}^2 y = \cos y$

Indicador de logro: Aplica la ley seno y ley coseno en la solución de problemas con triángulos oblicuángulos relacionados con la vida cotidiana.

Ley del seno

Consideraremos el triángulo equilátero de lados a, b y c, y ángulos α, β y γ. Vea la figura.



Consideremos ahora el triángulo rectángulo AMB que se forma al bajar la perpendicular, desde el vértice A, al lado $\overline{BC}$.

Si h es la altura sobre el lado $\overline{BC}$, en el triángulo AMB entonces,

$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{c}$, luego;

$h = c \operatorname{sen}\beta$, ❶

Similarmente en el triángulo AMC, de a), $\operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{b}$, por tanto;

$h = b \operatorname{sen}\gamma$, ❷

Igualando las expresiones obtenidas para h en ❶ y ❷, obtenemos;

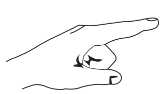
$c \operatorname{sen}\beta = b \operatorname{sen}\gamma$, de donde obtenemos $\boxed{\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}}$ ❸.

Repitiendo un procedimiento similar, bajando las alturas a otro lado del triángulo se obtiene:

Ley del seno

Sean a, b y c los lados de un triángulo cuyos ángulos opuestos son respectivamente α, β y γ, entonces;

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

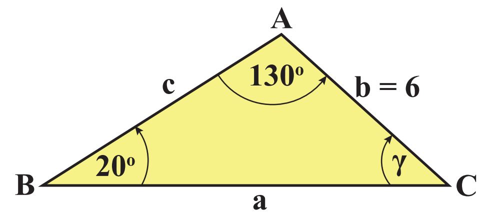


La ley del seno se aplica en general en triángulos que no son rectángulos.

Ejemplo 39

Encuentre los valores de los ángulos y lados que faltan en el triángulo.

SOLUCIÓN



En la figura vemos; $\alpha = 130°$, $\beta = 20°$,$b = 6$.

Desconocemos, los lados a, c y el ángulo γ.

Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo miden 180°, conociendo que $A = 130°$ y $B = 20°$, encontramos γ de la siguiente manera; $\gamma = 180° - 130° - 20° = 30°$.

Conociendo los ángulos α y β, aplicamos la ley del seno para calcular el lado a.

$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b}$ utilizando la Ley del seno

$\frac{\text{sen}\,130°}{a} = \frac{\text{sen}\,20°}{6}$ sustituyendo los valores correspondientes.

$a\,\text{sen}\,20° = 6\,\text{sen}\,130°$ resolviendo operaciones indicadas.

$a = \frac{6\,\text{sen}130°}{\text{sen}20°} = \frac{6(0,766)}{0,3420} = 13,4$ resolviendo para a.

Repetimos el procedimiento para calcular el valor del lado c.

$\frac{\text{sen}\,20°}{6} = \frac{\text{sen}\,30º}{c}$ de acuerdo con la ley del seno para c.

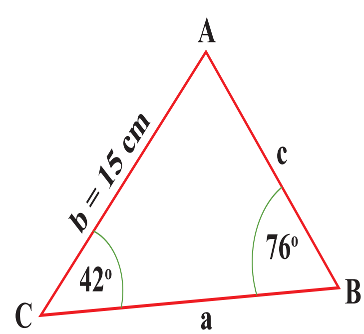
$c\,\text{sen}\,20° = 6\,\text{sen}30°$ resolviendo operaciones indicadas.

$c = \frac{6\,\text{sen}30°}{\text{sen}\,20°} = \frac{6(0,5)}{0,3420} = 8,77$ resolviendo para c.

Los valores encontrados son;

$\gamma = 30°$, $a = 13,4$ y $c = 8,77$

Ejemplo 40



En el triángulo ABC, $b = 15$ cm, el ángulo C mide, 42°, el ángulo $B = 76°$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

SOLUCIÓN

$\frac{\text{sen}\,76°}{15} = \frac{\text{sen}\,42°}{c}$ utilizando la Ley del seno

$\frac{0,97}{15} = \frac{0,67}{c}$ sustituyendo los valores correspondientes.

$c = \frac{0,67 \cdot 15}{0,97}$ resolviendo operaciones indicadas.

$c = 10,36 \text{ cm}$ es el valor del lado c.

Para hallar el lado a, necesitamos encontrar su ángulo opuesto A, este lo encontramos, restando de 180°, la suma de los otros dos.

$A = 180° - (42° + 76°)$ ya que la suma de los ángulos $A + B + C = 180°$.

$A = 180° - (118°) = 62°$ resolviendo, $A = 62°$.

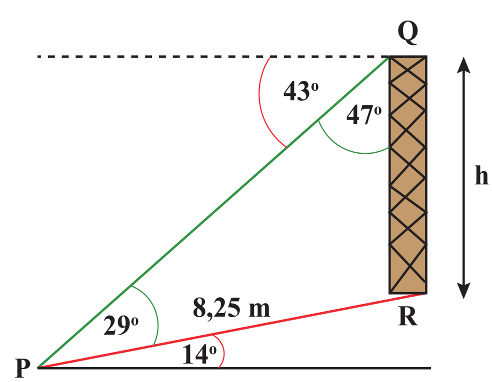
$\frac{\text{sen } 62°}{a} = \frac{\text{sen } 42°}{10,36}$ utilizando la Ley del seno

$\frac{0,88}{a} = \frac{0,67}{10,36}$ sustituyendo los valores correspondientes.

$a = 13,6 \text{ cm}$ es el valor del lado a.

Ejemplo 41

Una torre está en una colina con inclinación de 14°, respecto a la horizontal. Desde un punto P, a 8,25 metros, colina abajo, el ángulo de depresión de la parte superior de la torre es de 43°. Encuentre la altura de la torre.



SOLUCIÓN

Empezamos por determinar, valores que faltan en el gráfico.

El ángulo de 47° se deduce porque es el complemento de 43°. El ángulo de 29°, se obtiene restando.

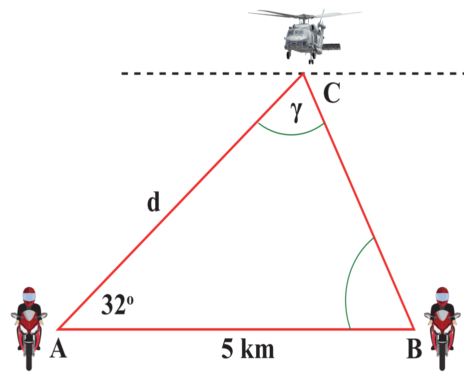
$43° - 14° = 29°$. Vea la figura.

$\frac{\text{sen } 29°}{h} = \frac{\text{sen } 47°}{8,25}$ aplicando la ley del seno.

$\frac{0,4848}{h} = \frac{0,7314}{8,25}$ sustituyendo valores.

Ejemplo 42

Un piloto de helicóptero del ejército de Nicaragua, está volando sobre una carretera. Observa dos policías, con ángulos de depresión de 32° y 45° respectivamente, los cuales están a 5 kilómetros de distancia entre sí. (Ver figura). Determine La distancia del helicóptero al punto A.



SOLUCIÓN

Empezamos por determinar el valor del ángulo γ.

La suma $32° + 45° + \gamma = 180°$ son ángulos suplementarios.

$\gamma = 180° - 32° - 45°$ despejando γ.

$\gamma = 103°$ es el valor de γ.

Para encontrar la distancia al punto A, aplicamos la ley del seno.

$\frac{\text{sen } 130°}{5} = \frac{\text{sen } 45°}{\text{d}}$ aplicando la ley del seno.

$\frac{0{,}766}{5} = \frac{0{,}707}{\text{d}}$ sustituyendo valores.

$\text{d} = \frac{5(0{,}707)}{0{,}766} = 4{,}6 \text{ km}$ es la distancia al punto A.

ACTIVIDADES

Analiza y luego responde.

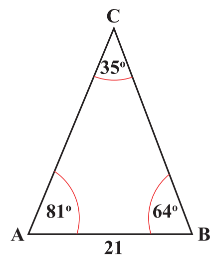
I. Resuelve cada uno de los triángulos utilizando la ley del seno. Coloca: a como lado opuesto a

α , b opuesto a β y c opuesto a β.

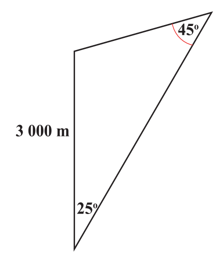
1)	$\alpha = 41°$	$\gamma = 77°$	$b = 10{,}5$	**2)**	$\beta = 20°$	$\gamma = 31°$	$b = 210$
3)	$\alpha = 27°40'$	$\beta = 52°10'$	$a = 32{,}4$	**4)**	$\beta = 50°50'$	$\gamma = 70°30'$	$c = 537$
5)	$\alpha = 42°10'$	$\gamma = 61°20'$	$b = 19{,}7$	**6)**	$\alpha = 103{,}45°$	$\gamma = 27{,}19°$	$b = 38{,}84$
7)	$\gamma = 81°$	$b = 12$	$c = 13$	**8)**	$\alpha = 32{,}32°$	$a = 263{,}6$	$c = 574{,}3$
9)	$\gamma = 53°20'$	$a = 140$	$c = 12$	**10)**	$\alpha = 27°30'$	$a = 28{,}1$	$c = 52{,}8$

III. Resuelve utilizando la ley de los senos.

1) Encuentre los dos lados que faltan en el triángulo de la figura.



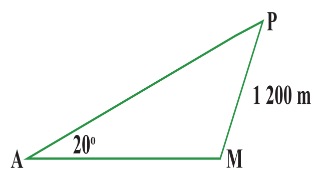
2) Encuentre los dos lados y el ángulo que faltan en el triángulo de la figura.



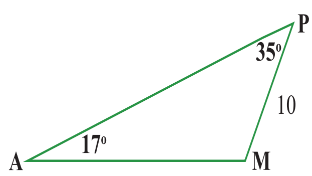
3) Para determinar la distancia entre los puntos A y B, un topógrafo, escoge un punto C que está a 375m de A y 530m de B, si ∠BAC, mide 49°30', calcule la distancia de A a B.

4) Para determinar la distancia entre los puntos A y B, un topógrafo, escoge un punto C que está a 200m de A y 230m de B, si ∠BAC, mide 43,50', calcule la distancia de A a B.

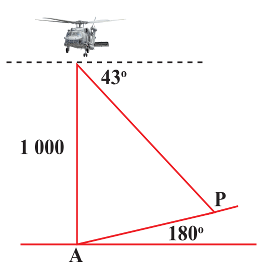
5) Calcule la distancia del punto A al punto P sabiendo que la distamcia de P a M es de 1200m. A y A = 20°, y M = 112°.



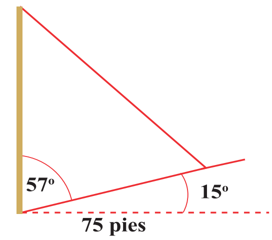
6) Encuentre los dos lados y el ángulo que faltan en el triángulo de la figura.



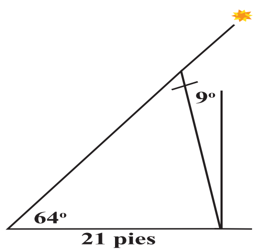
7) Un helicóptero vuela a 1 000 pie, el piloto observa el punto P, con un ángulo de depresión de 43°. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y P?



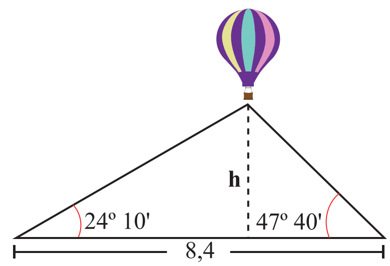
8) Una carretera, forma un ángulo de 15° con la horizontal. Un poste vertical, hace con la carretera, un ángulo de 57° y proyecta una sombra de 75 pie. Halle la altura del poste.



9) Cuándo el ángulo de elevación del Sol es de $64°$, un poste telefónico inclinado $9°$, respecto a la vertical hace una sombra de 21 pie. Encuentre la longitud del poste.

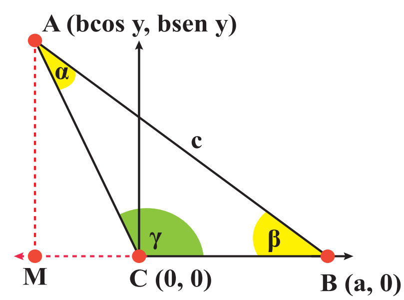


10) Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo, miden respectivamente $24°10'$ y $47°40'$. Los puntos A y B se encuentran separados 8.4 millas. Calcule la altura del globo.



Ley del coseno

Sea el triángulo de ángulos y lados de la figura, sean: a el lado opuesto a α, b opuesto a β y c opuesto a γ.



Estableciendo la distancia entre dos puntos c^2, se puede concluir;

i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

iii) $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$

Estos resultados se conocen como **ley del coseno**.

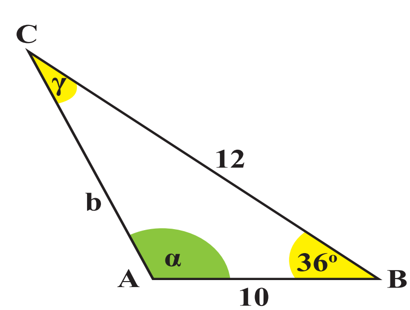
Ley del coseno

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estas longitudes por el coseno del ángulo entre ellos.

i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, iii) $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$

Ejemplo 43

Utilice la ley del coseno para encontrar los elementos que faltan en la figura.



SOLUCIÓN

En el triángulo faltan: los ángulos α, γ , y el lado b.

Usando la ley del coseno para el lado b, tenemos que,

$b^2 = (10)^2 + (12)^2 - 2(10)(12)\cos 26^\circ$

$b^2 = 100 + 144 - 2(10)(12)(0{,}8988)$ usando la ley del coseno para b^2.

$b = \sqrt{28\ 2894} = 5\ 318$ calculando en valor de b.

$100 = (5{,}32)^2 + (12)^2 - 2(5{,}32)(12)\cos\gamma$ ley del coseno para encontrar el ángulo γ.

$100 - 28{,}30 - 144 = -127{,}68\cos\gamma$ resolviendo.

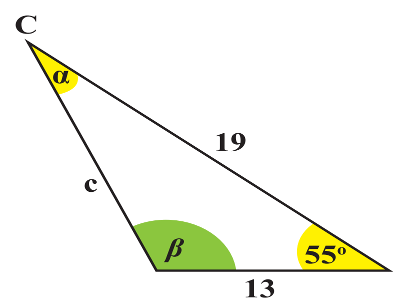
$\cos\gamma = \dfrac{72\ 3024}{127\ 68} = 0{,}5663$ despejando el coseno de γ.

$\gamma = \cos^{-1}(0{,}5663) = 55{,}51^\circ$ aplicando función inversa.

$\alpha = 180^\circ - 55{,}51^\circ - 26^\circ = 98{,}49^\circ$ encontrando el valor de α.

$b = 5{,}3 \quad \gamma = 55{,}51^\circ \text{ y } \alpha = 98{,}49^\circ$

Ejemplo 44



Resuelva el triángulo ABC, con; $a = 13$ cm, $c = 19$cm, $< \beta = 55^\circ$.

SOLUCIÓN

Sea c, el lado opuesto a 55°, entonces, por la ley del coseno:

$c^2 = 19^2 + 13^2 - 2(19)(13)\cos 55^\circ$

$c^2 = 19^2 + 13^2 - 2(19)(13)(0{,}573)$ sustituyendo $\cos 55^\circ$.

$c^2 = 246{,}93$ resolviendo.

$c = \sqrt{246{,}93} = 15{,}7142 \approx 16$ $c = 15\ 7142 \approx 16$

Necesitamos ahora encontrar el valor, de uno de los ángulos, ya sean α o β. Podríamos aplicar la ley del seno $\dfrac{\operatorname{sen} 55^\circ}{16} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{13}$, no obstante aplicaremos la ley del coseno, según la cual;

$13^2 = (19)^2 + (16)^2 - 2(16)(19)\cos\alpha$ ley del coseno.

$169 = 361 + 256 - 608\cos\alpha$ efectuando operaciones indicadas.

$169 = 617 - 608\cos\alpha$ reduciendo.

$169 - 617 = -608\cos\alpha$ restando 617.

$-448 = -608\cos\alpha$ reduciendo

$\cos\alpha = \dfrac{-448}{-608} = 0{,}736$ es el valor del coseno.

$\alpha = 43{,}53^\circ$ $\alpha = 43{,}53^\circ$ aplicando $\cos^{-1}$

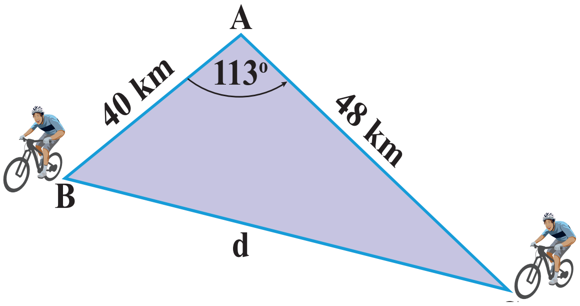
El ángulo β, lo encontramos, haciendo: $\beta = 180° - 55° - 43{,}53° = 81{,}47°$.

Ejemplo 45

Ana y Karen entrenan para la competencia ciclista de este año. Ambas salen de un mismo punto, y se separan en línea recta, haciendo un ángulo de $113°$. Cuando una de ellas ha recorrido 48 km, la otra ha recorrido 40 km. ¿A qué distancia están una de la otra?

SOLUCIÓN

Del gráfico, deducimos el modelo matemático que nos ayudará a resolver.



El problema genera un gráfico triangular que se ilustra en la figura. Se pide la distancia entre B y C.

Sea d, dicha distancia.

Según la ley del coseno

$d^2 = (40)^2 + (48)^2 - 2(40)(48)\cos 113^{\circ}$

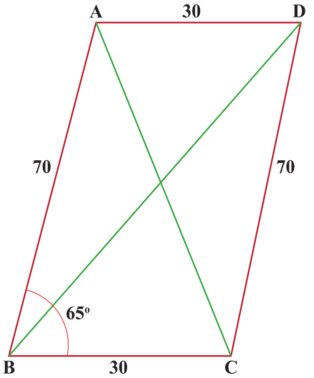
$d^2 = 1\,600 + 2\,304 - 3\,840\,(-0{,}3907)$

$d = 73{,}51$ km.

Ejemplo 46

Un paralelogramo tiene 30 y 70 cm de longitud, uno de sus ángulos es $65°$. Calcule la longitud de las diagonales.

SOLUCIÓN



Usemos el triángulo ABC con $< B = 65°$, entonces:

$(\overline{AC})^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 65^{\circ}$ usando la ley del coseno para $\overline{AC}$.

$(\overline{AC})^2 = 900 + 4\,900 - 2(30)(70)\,0{,}423$ sustituyendo $\cos 65°$.

$(\overline{AC})^2 = 5\,800 - 4\,200(0{,}423)$ resolviendo.

$(\overline{AC})^2 = 5\,800 - 1\,776{,}6$ reduciendo.

$(\overline{AC})^2 = 4\,023{,}4$ despejando $(\overline{AC})^2$.

$\overline{AC} = \sqrt{4\,023{,}4} = 63{,}43$ cm

$\overline{AC}$ $63{,}43$ cm

De manera análoga:

$(\overline{BD})^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 115^o$ usando la ley del coseno para $\overline{AC}$.

$(\overline{AC})^2 = 900 + 4\,900 - 2(30)(70)\,(-\,0{,}423)$ sustituyendo $\cos 115°$.

$(\overline{AC})^2 = 5\,800 + 1\,746$ resolviendo.

$(\overline{AC})^2 = 7\,564$ reduciendo.

$AC = \sqrt{7\,564} = 86{,}9 \text{ cm}$

$\overline{AC} \approx 87\text{cm}$

ACTIVIDADES

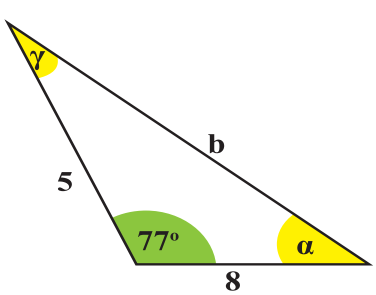
Analiza y luego contesta.

I. Resuelve cada uno de los triángulos utilizando la ley del coseno. Coloca: a como lado opuesto a α, b opuesto a β y c opuesto a γ.

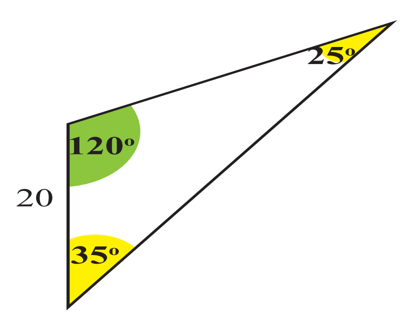
1)	$\alpha = 60°$	$c = 30$	$b = 20$	**2)**	$a = 15$	$\gamma = 45°$	$b = 10$
3)	$c = 30$	$\beta = 150°$	$a = 150$	**4)**	$\beta = 73°50'$	$a = 87$	$c = 14$
5)	$a = 1{,}1$	$\gamma = 115°10'$	$b = 2{,}1$	**6)**	$\alpha = 23°{,}40'$	$c = 4{,}3$	$b = 70$
7)	$a = 2$	$b = 3$	$c = 4$	**8)**	$a = 10$	$b = 15$	$c = 12$
9)	$a = 25$	$b = 80$	$c = 60$	**10)**	$a = 20$	$b = 20$	$c = 10$

II. Resuelve utilizando la ley de los cosenos.

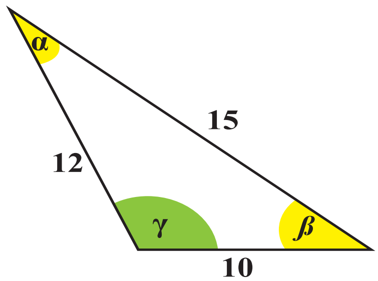
1) Encuentre el lado y los ángulos que faltan en el triángulo de la figura.



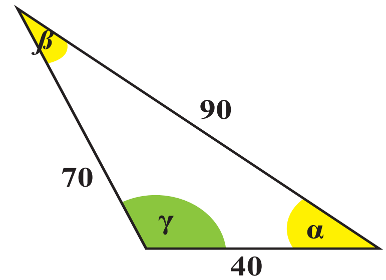
2) Encuentre los dos lados que faltan en el triángulo de la figura.



3) Encuentre los ángulos que faltan en el triángulo de la figura.



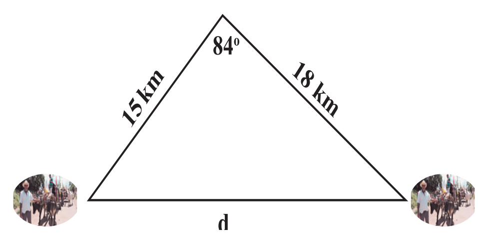
4) Encuentre los ángulos en el triángulo de la figura.

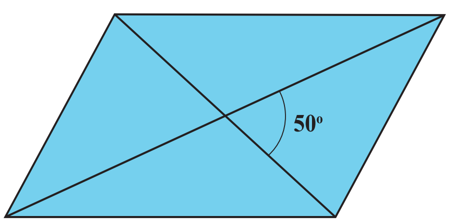


5) Un ángulo de la esquina de un terreno triangular, mide $73°40'$, y los lados que concurren en dicha esquina, miden 175 y 150 pies de longitud. ¿Cuánto mide el tercer lado?

6) Para determinar la distancia entre los lados A y B, un topógrado escoge un punto C, que se encuentra a 400 metros de A y 400 metros de B. Si $< C = 63°10'$. Calcule la distancia entre A y B.

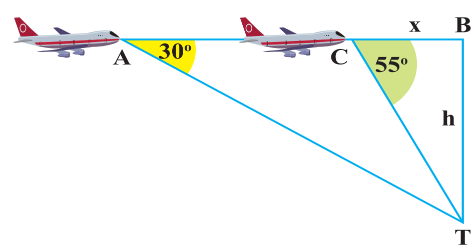
7) Dos carretas A y B, salen de Boaco, viajan por caminos rectos que forman entre si un ángulo de $84°$. ¿A qué distancia se encuentran cuando han recorrido respectivamente 15 y 18 km?





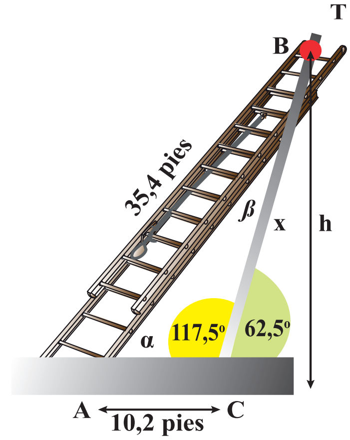
8) Los lados de un paralelogramo miden 6 y 5 cm respectivamente. Calcule el valor de la diagonal.

10) Un piloto de avión, observa un punto del terreno con un ángulo de depresión de $30°$. Dieciocho segundos después el ángulo de depresión sobre el mismo punto es, de $55°$. Si el avión vuela horizontalmente, a una velocidad constante de 400 millas por hora, ¿a qué altura se encuentra?



11) Una escalera de $35{,}4$ pie, está recostada en una rampa como se aprecia en el gráfico.

Determine la altura h que alcanza la escalera y la longitud x de la rampa cubierta por la escalera, desde el suelo hasta el punto B del gráfico.

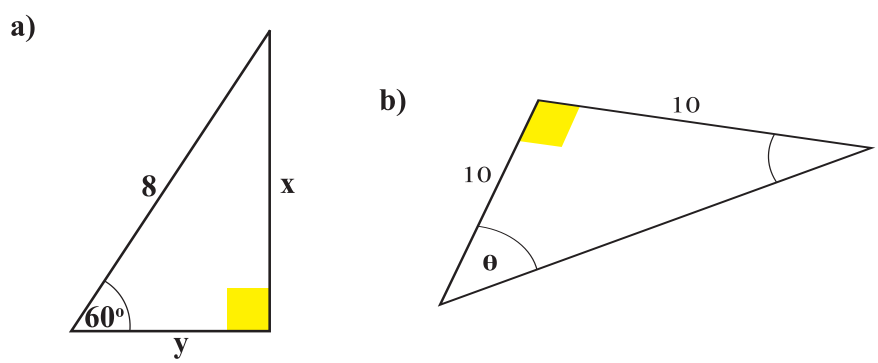


AUTOEVALUACIÓN

I. Interpreta y resuelve.

1) Escriba los siguientes ángulos en grados, a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{2}$.
2) Escriba los siguientes ángulos en radianes, a) 110^o b) 450.
3) Halle el ángulo complementario de θ, a) si $\theta = 16{,}35°$, b) si $\theta = 61°35'$.
4) Halle el ángulo suplementario de θ, a) si $\theta = 126{,}35°$, b) si $\theta = 63°35'$.
5) Dibuja en tu cuaderno:

   a) Un ángulo agudo   b) Un ángulo llano   c) Un ángulo obtuso



6) Utilice razones trigonométricas para calcular los valores de lados y/o ángulos que faltan en cada triángulo.

7) Utiliza el circunferencia trigonométrica para calcular la secante y la tangente de $\frac{5\pi}{3}$.
8) Utilice la periodicidad de las funciones para encontrar el valor exacto de:

   a) $\text{sen}\,\frac{17\pi}{4}$ b) $\cos 6\pi$
9) Utilice las propiedades, par e impar, para encontrar el valor exacto de:

   a) $\text{sen}\,(-\pi) + \cos 5\pi$,   b) $\tan(-6\pi).\cos 5\pi$
10) Si $\text{sen}\,\theta = -\frac{4}{5} =$ y C no está en el IV cuadrante, encuentre las 5 funciones trigonométricas θ.
11) Demuestra las identidades.

   a) $-\text{sen}\,\theta + \csc\theta = \cos\theta\cot\theta$ b) $\cos\theta\cot\theta + \text{sen}\,\theta = \csc\theta$

Bibliografía

1) Aldana Maria Elena, Geometría y Trigonometría, colección DGTI, primera edición ,México 2000.
2) Briseño Luis Alberto, Matemáticas 3,Colección Santillana Secundaria, ,serie 2000,México 1967.
3) BALDOR. "Geometría Plana y del Espacio, con una Introducción a la Trigonometría". Editorial. Cultura Venezolana, S.A. Caracas - Venezuela.
4) GELTNER & PETERSON. "Geometría". Editorial Thomson. Tercera Edición.
5) CLEMENS, et al. "Geometría". Editorial Addison Wesley Longman de México, S.A. Primera Edición, 1998. México.
6) BARNETT. "Geometría". Editorial Mc Graw Hill. México.
7) SWOKOWSKI & COLE. "Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica". Editorial Thomson. Décima Edición.
8) WALTER & DALE. "Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica". Editorial Hall. Tercera Edición.
9) STUDER. "Precálculo, Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica". Editorial Cultura Moderna Ltda. Bogotá. Colombia. 8.- SWOKOWSKI & COLE. "Trigonometría". Editorial Thomson. Octava Edición.
10) FLEMING, W., VARBEG, D. 1991. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall. México.
11) Baldor, Aurelio “Geometría”, Editorial Publicaciones Cultural.
12) Baldor, Aurelio “Álgebra, Editorial Publicaciones Cultural.
13) Barnett, Raymond, “Álgebra y Trigonometría”, Editorial Mc Graw – Hill.
14) Zill, D. “Trigonometría y Geometría Analítica”.
15) Swokosky, Earl, “Trigonometría y Geometría Analítica”.
16) Problemarios Diversos en Internet.